Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Власов, С. А. Иванов, Оценки решений уравнений с последствием в пространствах Соболева и базис из разделенных разностей, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 303–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:29:37

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА И БАЗИС ИЗ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

В. В. Власов, С. А. Иванов

В предлагаемой заметке в шкале пространств Соболева с произвольным индексом установлена базисность Рисса специально выбранной системы функций (см. [1]), построенной по системе экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа и получены неулучшаемые оценки их решений. При этом, в отличие от работ [2]–[4], не предполагается отделимость нулей характеристического квазимногочлена.

Рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} u^{(j)}(t - h_k) + \sum_{j=0}^m \int_0^h B_j(\tau) u^{(j)}(t - \tau) d\tau = 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Здесь a_{kj} – комплексные коэффициенты, числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, функции $B_j(\tau)$ принадлежат $L^2(0, h)$. Начальная функция g принадлежит пространству Соболева $H^s(-h, 0)$, $s \geq m$. Подробнее о пространстве H^s см. в [5, гл. I]. Предполагается, что s не является полуцелым ($s \neq 3/2, 5/2, \dots$).

Под *решением задачи* (1), (2) мы понимаем такую функцию u , что для любого $T > 0$ функция u принадлежит пространству $H^s(-h, T)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $H^{s-m}(0, T)$ и условию (2) в пространстве $H^s(-h, 0)$.

Обозначим через H_U^s подпространство функций в $H^s(-h, 0)$, удовлетворяющих следующим $[s - m + 1/2]$ условиям согласования:

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} g^{(j+r)}(-h_k) + \sum_{j=0}^m \int_0^h B_j(\tau) g^{(j+r)}(-\tau) d\tau = 0 \quad (3)$$

при $r = 0, 1, \dots, [s - m - 1/2]$.

Введем характеристическую функцию $L(\lambda)$ уравнения (1):

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} \lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^m \lambda^j \int_0^h B_j(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau,$$

через λ_q обозначим ее нули, упорядоченные в порядке возрастания модулей, через ν_q – их кратности, через Λ – множество всех нулей $\{\lambda_q\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00790, № 00-15-96100 и № 02-01-00554.

Приведем результат о полноте системы экспоненциальных решений $V = \{v_{qj}\}$ уравнения (1):

$$v_{qj}(t) = \frac{t^j \exp(\lambda_q t)}{|\lambda_q|^s + 1}, \quad \lambda_q \in \Lambda, \quad j = 0, 1, \dots, \nu_q - 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть существуют $k_0, j_0, r_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие неравенствам $k_0 \leq n$, $j_0 \leq m$, $r_0 \leq m$, такие, что $a_{k_0 m} \neq 0$, $a_{km} = 0$ при $k < k_0$, $a_{nj_0} \neq 0$, $a_{np} = 0$ при $p > j_0$, $a_{0r_0} \neq 0$, $a_{0q} = 0$ для $q > r_0$, $B_q(t) \equiv 0$ при $q > \min\{j_0, r_0\}$. Тогда семейство V является полным в пространстве $H_U^s(-h, 0)$ при $s \geq m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При s , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq s - m < 1/2$, условия согласования (3) не накладываются.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|L(iy)|^2}{(1 + |y|^{m+1})^2} dy < +\infty.$$

Тогда система V минимальна в пространстве $H^s(-h, 0)$ при $s \geq m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если число запаздываний $n > 1$ и запаздывания h_j несоизмеримы, то, как правило, множество Λ неотделимо, и семейство V не образует безусловный базис в пространстве $H^s[-h, T]$ при любом T и любом s , ибо семейство V не является равномерно минимальным. Оказывается, однако, что если объединить (аналогично [6]) близкие точки спектра Λ , то подпространства, образованные соответствующими экспонентами, образуют безусловный базис.

Сделаем основное для дальнейшего предположение: коэффициенты $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$.

Обозначим через $D_\lambda(r)$ круг радиуса r с центром λ , а через $G^{(p)}(r)$, $p = 1, 2, \dots$, — связанные компоненты объединения $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda(r)$.

Пусть $\Lambda^{(p)}(r)$ — подпоследовательность точек из Λ , лежащая в $G^{(p)}$, т.е. $\Lambda^{(p)}(r) := \Lambda \cap G^{(p)}(r)$, и $\mathcal{L}^{(p)}(r)$, $p = 1, 2, \dots$, — подпространства, являющиеся линейными оболочками соответствующих экспонент: $\{t^n e^{\lambda t}\}$, $\lambda \in \Lambda^{(p)}(r)$, $n = 0, 1, \dots, \nu_\lambda - 1$ (ν_λ — кратность λ).

Обозначим через M_p число точек в $\Lambda^{(p)}$ с учетом кратности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда множество Λ лежит в полосе $\{\lambda: \kappa_- \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \kappa_+\}$, где

$$\kappa_- := \inf_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q > -\infty, \quad \kappa_+ := \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q < +\infty,$$

и найдется натуральное N_0 такое, что $M_p \leq N_0$ при любом p .

ТЕОРЕМА 3. Пусть коэффициенты $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда семейство $\{\mathcal{L}^{(p)}(r)\}$ образует базис Рисса из подпространств в пространстве H_U^s при $s \geq m$.

ТЕОРЕМА 4 (см. [2], [4]). Пусть коэффициенты $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ и множество Λ отделимо, т.е. $\inf_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$. Тогда семейство V образует базис Рисса в пространстве H_U^s при $s \geq m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы 3 и 4 при целочисленных s могут быть получены как следствие результатов работы [6], если применить эти результаты к оператору, являющемуся оператором дифференцирования с условиями вида (3).

Согласно замечанию 2 система V не образует безусловный базис в случае, когда множество Λ неотделимо. Для получения базиса из элементов необходимо выбрать в каждом из подпространств $\mathcal{L}^{(p)}$ соответствующие линейные комбинации экспонент. Оказывается, что удобным выбором являются так называемые разделенные разности. Напомним соответствующее определение (подробнее см. [1]).

Пусть μ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, — произвольные комплексные числа, не обязательно различные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разделенная разность (РР) нулевого порядка функции $e^{\mu t}$ есть $[\mu](t) := e^{\mu t}$. Разделенная разность порядка $m - 1$, отвечающая $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, определяется следующим образом:

$$[\mu_1, \dots, \mu_r](t) = \int_0^1 d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{m-2}} d\tau_{r-1} t^{r-1} \exp(tZ(\mu_1, \dots, \mu_r)),$$

где

$$Z := [\mu_1 + \tau_1 \delta_1 + \dots + \tau_{r-1} \delta_{r-1}], \quad \delta_j := \mu_{j+1} - \mu_j.$$

Если все точки μ_k различны, то явные формулы для РР имеют вид

$$[\mu_1, \dots, \mu_r](t) = \sum_{k=1}^r \frac{e^{\mu_k t}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j)}.$$

Обозначим точки из множества $\Lambda^{(p)}(r)$ через $\{\lambda_{j,p}\}$, $j = 1, 2, \dots, M_p(r)$; $\operatorname{Re} \lambda_{j,p} \leq \operatorname{Re} \lambda_{j+1,p}$, а разделенные разности $[\lambda_{1,p}], [\lambda_{1,p}, \lambda_{2,p}], \dots, [\lambda_{1,p}, \dots, \lambda_{M_p,p}]$ — через $\varphi_{p,1}, \dots, \varphi_{p,M_p}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть коэффициенты a_{0m}, a_{nm} ненулевые. Тогда система элементов $\{\tilde{\varphi}_{p,j}\}_{p,j}$, где

$$\tilde{\varphi}_{p,j} = \frac{\varphi_{p,j}}{(|\mu_p| + 1)^s}, \quad \mu_p = \max_{j=1, \dots, M_p} |\lambda_{p,j}|,$$

образует базис Рисса в пространстве $H_U^s(-h, 0)$ при $s \geq m$.

Отметим, что при доказательстве теорем 3–5 для нецелочисленных s существенно используются результаты и методы, представленные в работах [1], [7], [8].

На основании теорем 3–5, используя методы работ [2], [3], может быть установлен следующий результат об оценке решений задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ и начальная функция g лежит в пространстве $H_U^s[-h, 0]$. Тогда решение $u(t)$ задачи (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{H^s(T-h, T)} \leq d(T+1)^{M-1} \exp(\kappa_+ T) \|g\|_{H^s(-h, 0)}, \quad T \geq 0, \quad (4)$$

где постоянная d не зависит от функции g , а величина M определяется следующим образом:

$$M := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \max \{M_p \mid \operatorname{Re} \kappa_p > \kappa_+ - \varepsilon\},$$

где $\kappa_p = \max \operatorname{Re} \lambda_{j,p}$, $j = 1, 2, \dots, M_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Оценки типа (4), для которых величина κ_+ заменяется на $\kappa_+ + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), давно и хорошо известны; см., например [9]–[11]. Полученная нами оценка (4) неумлучаема в следующем смысле: константу κ_+ нельзя заменить на $\kappa_+ + \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В соответствии с предложением 1 величина $M \leq N_0$, а в случае отделимости множества Λ справедливо неравенство $M \leq \max_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для полуцелого s , $s = m + r + 1/2$, r натуральное, оценки, аналогичные (4), справедливы в более сильной норме, чем норма в $H^s(-h, 0)$, при условии, что для начальной функции g эта норма конечна и g удовлетворяет r условиям согласования и дополнительному условию интегрального характера.

Приведем результаты об оценке снизу решений задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 7. Пусть коэффициенты $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда при любой ненулевой функции $g \in H_U^s(-h, 0)$ для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\|u\|_{H^s(T-h, T)} \geq c \exp(\kappa_- T), \quad c = c(g) > 0, \quad T \geq 0, \quad (5)$$

с постоянной $c(g)$, зависящей от функции g и не зависящей от $T > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В случае простых и отделимых нулей $\{\lambda_q\}$ ($\inf_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$) оценка (5) является равномерной по g и, тем самым, постоянная c не зависит от g .

В заключение уместно отметить, что изучение базисности экспоненциальных решений в векторном случае (т.е. в ситуации, когда a_{kj} , $B_j(\tau)$ – квадратные матрицы) при $m = 1$ в шкале пространств Соболева вектор-функций с целочисленным индексом проводилось в [12]–[14]. При ином понимании решений базисность экспоненциальных решений в пространстве $L_2((-h, 0), \mathbb{C}^m) \oplus \mathbb{C}^m$ рассматривалась в [15]. Полнота систем экспоненциальных решений изучалась рядом авторов как в векторном, так и в скалярном случаях. Ограничимся здесь указанием работ [15]–[17] (там же см. библиографию). При этом работа [17], насколько известно авторам, является одной из первых, в которой изучалась полнота и минимальность системы экспоненциальных решений. Приведенные теоремы 1, 2 являются ее естественным обобщением. В свою очередь, оценка решений вида (4) для систем уравнений с последствием первого порядка (при $m = 1$) в шкале пространств Соболева с целочисленным индексом получены в [12]–[14].

Авторы благодарят А. А. Шкаликова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин С. А., Иванов С. А. // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 3. С. 1–17.
2. Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 1999. № 2. С. 20–29.
3. Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 2001. № 6 (469). С. 23–29.
4. Власов В. В., Иванов С. А. // УМН. 2001. Т. 56. № 3. С. 151–152.
5. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
6. Шкаликов А. А. // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
7. Васюнин В. И. // Тр. МИАН. 1978. Т. 130. С. 5–49.
8. Ivanov S. A., Kalton N. // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 2. С. 93–115.
9. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
10. Henry D. // J. Differential Equations. 1974. V. 15. № 1. P. 106–128.
11. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
12. Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 2000. Т. 4(455). С. 14–22.
13. Власов В. В. // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 583–585.
14. Власов В. В. // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 3. С. 302–304.
15. Lunel S. V., Yakubovich D. V. // Integral Equations and Operator Theory. 1997. V. 27. P. 347–378.
16. Lunel S. V. // J. Differential Equations. 1990. V. 85. № 1. P. 17–53.
17. Levinson N., McCalla C. // Studies in Appl. Math. 1974. V. 53. P. 1–15.