Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Бучок, О двух новых подходах к получению оценок в проблеме Данцера–Грюнбаума, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 519–527

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 03:42:06

УДК 514.11

О двух новых подходах к получению оценок в проблеме Данцера–Грюнбаума

Л. В. Бучок

Данная работа посвящена применению вероятностных методов к оценке мощностей множеств точек евклидова пространства, в которых никакие три точки не образуют прямого или тупого угла. Обозначим через $a(n)$ мощность максимального множества $S \subset \mathbb{R}^n$, обладающего указанным свойством. Доказана оценка

$$a(n) \geq \frac{2}{3} \left\lfloor \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor.$$

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное множество точек, обладающее тем свойством, что любые три точки в нем образуют острый угол. Положим $a(n) = \max |S|$. Впервые задача оценивания величины $a(n)$ была поставлена в 1962 г. Данцером и Грюнбаумом. Ими была высказана гипотеза о том, что $a(n) = 2n - 1$ (см. [1]). В 1983 г. эта гипотеза была опровергнута Эрдешем и Фюреди, доказавшими с помощью вероятностного метода, что

$$a(n) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor \approx 0.5 \dots \times (1.154 \dots)^n$$

(см. [2]). В 2006 г. Беван усовершенствовал метод Эрдеша–Фюреди (см. [3]) и показал, что

$$a(n) \geq 2 \left\lfloor \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \right\rfloor \approx 0.769 \dots \times (1.154 \dots)^n.$$

Также Беваном был получен ряд результатов (конструктивных и с помощью компьютерных вычислений) для малых размерностей n , вследствие чего гипотеза Данцера–Грюнбаума была опровергнута при $n \geq 7$. При $n \leq 3$ гипотеза справедлива: $a(1) = 2$, $a(2) = 3$, $a(3) = 5$. Также известно, что $a(n) \leq 2^n$.

В 2007 г. автором данной статьи была доказана оценка

$$a(n) \geq \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{22\sqrt{33}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor \approx 0.780 \dots \times (1.154 \dots)^n$$

(см. [4]).

Далее будут изложены два новых рассуждения, позволяющие на основе метода Эрдеша–Фюреди улучшить существующую нижнюю оценку для $a(n)$ соответственно до

$$a(n) \geq \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{11\sqrt{165}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor \approx 0.872 \dots \times (1.154 \dots)^n$$

и

$$a(n) \geq \frac{2}{3} \left\lfloor \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor \approx 0.9428 \dots \times (1.154 \dots)^n.$$

2. Первый подход. В данном пункте мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место неравенство*

$$a(n) \geq \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{11\sqrt{165}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor \approx 0.872 \dots \times (1.154 \dots)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$m = \left\lfloor \frac{11\sqrt{165}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor.$$

Если при данном n оказывается, что $m = 0$, то оценка из теоремы тривиальна. Иначе построим случайное (мульти)множество $S \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из $M = \lceil 27m/11 \rceil$ (не обязательно различных) векторов. А именно, координаты каждого вектора $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ из S мы выберем в соответствии с полиномиальной схемой, т.е. независимо друг от друга, с вероятностями

$$P(v_i = 0) = P(v_i = 1) = P(v_i = -\varepsilon_i) = P(v_i = 1 + \varepsilon_i) = \frac{1}{4}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где ε_i – произвольные фиксированные положительные числа, удовлетворяющие следующим двум условиям:

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) < 1, \quad (1)$$

$$\varepsilon_j^2 > \sum_{i=j+1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2), \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (2)$$

Правда, может возникнуть вопрос о корректности определения чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

ЛЕММА. *Последовательность со свойствами (1), (2) существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varepsilon_i = 1/3^{2^i-1}$, $1 \leq i \leq n$, и убедимся в том, что эта последовательность обладает свойствами (1), (2).

Проверим сначала справедливость второго свойства. Для этого применим индукцию по j . База индукции: $j = n-1$. Нам необходимо доказать, что $\varepsilon_{n-1}^2 > \varepsilon_n + \varepsilon_n^2$:

$$\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 = \frac{1}{3^{2^n-1}} + \frac{1}{(3^{2^n-1})^2} < \frac{2}{3^{2^n-1}} < \frac{3}{3^{2^n-1}} = \frac{1}{3^{2^n-2}} = \varepsilon_{n-1}^2.$$

ТАБЛИЦА

u_i, v_i	w_i	$-\varepsilon_i$	0	1	$1 + \varepsilon_i$
$-\varepsilon_i, -\varepsilon_i$	0	ε_i^2	$(1 + \varepsilon_i)^2$	$(1 + 2\varepsilon_i)^2$	
$-\varepsilon_i, 0$	0	0	$1 + \varepsilon_i$	$(1 + \varepsilon_i)(1 + 2\varepsilon_i)$	
$-\varepsilon_i, 1$	0	$-\varepsilon_i$	0	$(1 + 2\varepsilon_i)\varepsilon_i$	
$-\varepsilon_i, 1 + \varepsilon_i$	0	$-\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	$-\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	0	
$0, -\varepsilon_i$	0	0	$1 + \varepsilon_i$	$(1 + \varepsilon_i)(1 + 2\varepsilon_i)$	
$0, 0$	ε_i^2	0	1	$(1 + \varepsilon_i)^2$	
$0, 1$	$\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	0	0	$\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	
$0, 1 + \varepsilon_i$	$\varepsilon_i(1 + 2\varepsilon_i)$	0	$-\varepsilon_i$	0	
$1, -\varepsilon_i$	0	$-\varepsilon_i$	0	$\varepsilon_i(1 + 2\varepsilon_i)$	
$1, 0$	$\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	0	0	$\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	
$1, 1$	$(1 + \varepsilon_i)^2$	1	0	ε_i^2	
$1, 1 + \varepsilon_i$	$(1 + \varepsilon_i)(1 + 2\varepsilon_i)$	$1 + \varepsilon_i$	0	0	
$1 + \varepsilon_i, -\varepsilon_i$	0	$-\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	$-\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i)$	0	
$1 + \varepsilon_i, 0$	$\varepsilon_i(1 + 2\varepsilon_i)$	0	$-\varepsilon_i$	0	
$1 + \varepsilon_i, 1$	$(1 + \varepsilon_i)(1 + 2\varepsilon_i)$	$1 + \varepsilon_i$	0	0	
$1 + \varepsilon_i, 1 + \varepsilon_i$	$(1 + 2\varepsilon_i)^2$	$(1 + \varepsilon_i)^2$	ε_i^2	0	

Далее, пусть для всех j , для которых $k + 1 \leq j \leq n - 1$, условие (2) выполнено. Докажем, что оно выполнено при $j = k$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) &= \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+1}^2 + \sum_{i=k+2}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) < \varepsilon_{k+1} + 2\varepsilon_{k+1}^2 \\ &= \frac{1}{3^{2^{k+1}-1}} + \frac{2}{3^{2^{k+2}-2}} < \frac{1}{3^{2^{k+1}-2}} = \varepsilon_k^2. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (2) выполнено для всех значений j .

Проверим теперь, что для данной последовательности ε_i выполнено условие (1):

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \sum_{i=2}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) < \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} < 1.$$

Доказательство леммы окончено.

Назовем каждую тройку $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \subset S$ *обобщенным углом с вершиной в $\vec{w}$* . Смысл в том, что, как мы помним, векторы в тройке могут совпадать. Соответственно, будем считать обобщенный угол $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ острым, если $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) > 0$, прямым, если $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = 0$, и тупым, если $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) < 0$. Введем обозначение: $Z_i = (u_i - w_i)(v_i - w_i)$. Тогда $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = \sum_{i=1}^n Z_i$.

При данном распределении координат точек набор (u_i, v_i, w_i) может принимать шестьдесят четыре равновероятных значения; соответствующие им значения Z_i представлены в таблице.

Получаем, что существует двадцать восемь различных случаев, когда $Z_i > 0$, причем в шестнадцати случаях из них верно, что $Z_i \geq 1$, а в оставшихся двенадцати случаях, что $\varepsilon_i^2 \leq Z_i < 1$; в двадцати восьми случаях $Z_i = 0$, и в восьми случаях $-\varepsilon_i - \varepsilon_i^2 \leq Z_i < 0$.

Нас интересует знак скалярного произведения $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = \sum_{i=1}^n Z_i$. Если существует хотя бы одно такое i , что $Z_i \geq 1$, то

$$\sum_{i=1}^n Z_i \geq 1 - \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) > 0$$

(в силу условия (1) для последовательности ε_i) и угол является острым. Также угол острый, если все $Z_i < 1$, но выполнено следующее условие: существует такое j , что $Z_i = 0$, коль скоро $1 \leq i \leq j-1$ и $Z_j > 0$. В самом деле, тогда

$$\sum_{i=1}^n Z_i = Z_j + \sum_{i=j+1}^n Z_i \geq \varepsilon_j^2 - \sum_{i=j+1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) > 0$$

в силу условия (2) для последовательности ε_i .

Очевидно, что два разобранных случая не пересекаются. Получаем, что

$$\begin{aligned} & P((\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) > 0) \\ & \geq P(\exists i : Z_i \geq 1) + P(\forall i : Z_i < 1; \exists j : Z_j > 0, Z_i = 0, 1 \leq i \leq j-1) =: P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Таблица и комментарии к ней свидетельствуют о том, что

$$P(\forall i : Z_i < 1) = \left(\frac{64-16}{64} \right)^n = \left(\frac{3}{4} \right)^n,$$

а стало быть,

$$P_1 = P(\exists i : Z_i \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

В то же время (опять-таки ввиду таблицы и замечаний к ней) имеем

$$\begin{aligned} P_2 &= \sum_{j=1}^n \frac{12}{64} \left(\frac{28}{64} \right)^{j-1} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-j} = \frac{3}{16} \sum_{j=1}^n \left(\frac{7}{16} \right)^{j-1} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-j} \\ &= \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{5} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - \left(\frac{7}{16} \right)^n \right) = \frac{3}{5} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - \left(\frac{7}{16} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P((\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) > 0) \geq 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{3}{5} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - \left(\frac{7}{16} \right)^n \right),$$

т.е.

$$P((\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \leq 0) \leq \left(\frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{3}{5} \left(\frac{7}{16} \right)^n \right).$$

Введем случайную величину ξ , равную числу неострых обобщенных углов в S ; пронумеруем произвольным образом все углы, образованные тройками векторов из S , и введем случайные величины ξ_j , $j = 1, \dots, 3C_M^3$, являющиеся индикаторами того, что j -я тройка образует неострый угол. Тогда

$$\xi = \sum_{j=1}^{3C_M^3} \xi_j, \quad E\xi_j \leq \left(\frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{3}{5} \left(\frac{7}{16} \right)^n \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E\xi &\leq 3C_M^3 \left(\frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{3}{5} \left(\frac{7}{16} \right)^n \right) \leq \frac{27}{22} m \cdot \left(\frac{27}{11} m \right)^2 \left(\frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{3}{5} \left(\frac{7}{16} \right)^n \right) \\ &\leq \frac{27}{22} m \cdot \frac{165}{81} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^n \left(\frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{3}{5} \left(\frac{7}{16} \right)^n \right) = m + \frac{3}{2} \cdot \frac{11\sqrt{165}}{243} \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} \right)^n. \end{aligned}$$

Заметим, что при всех $n \geq 1$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{11\sqrt{165}}{243} \left(\frac{7}{6\sqrt{3}} \right)^n < 1.$$

Это значит, что существует множество S из $M = \lceil 27m/11 \rceil$ точек, в котором q неострых обобщенных углов, $q \leq m$.

Заметим теперь, что если в S хотя бы две точки $\vec{v}$ и $\vec{w}$ совпадают, то эти две совпадающие точки вместе с любой другой точкой из S порождают неострый обобщенный угол. В самом деле, если $\vec{v} = \vec{w}$, то $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = 0$ для всех $\vec{u}$. Ясно, стало быть, что в этом случае количество неострых обобщенных углов в S будет не меньше $M - 2$. Но при $m > 1$ выполнено $M - 2 > m$, что противоречит выбору S , а ситуация, когда $m = 1$, тривиальна. Таким образом, в нашем множестве S нет совпадающих точек, и все обобщенные углы являются углами в обычном смысле. Поэтому можно говорить о треугольниках, образованных точками из S .

Мы будем превращать множество S в новое множество S' , свободное от неостроугольных треугольников, стараясь максимально экономно удалять вершины неостроугольных треугольников.

Итак, возьмем все те треугольники, образованные точками из S , в которых есть неострые углы. Возможно, некоторые из этих треугольников имеют общие вершины. Назовем *независимыми* те треугольники, которые не пересекаются по вершинам ни с какими другими. Обозначим число независимых треугольников в S через k ; тогда число точек, являющихся вершинами независимых треугольников, будет равно $3k$. Очевидно, что $k \leq 1/3M$. Чтобы удалить из S все независимые неостроугольные треугольники, необходимо и достаточно удалить по одной вершине из каждого; следовательно, всего нужно удалить k точек.

Допустим, после удаления из S независимых треугольников в S еще остались неостроугольные треугольники (их число будет $q - k$). Тогда найдутся точки, каждая из которых является вершиной более чем одного неостроугольного треугольника. Отметим одну из них. Посмотрим, что получится после удаления из S этой точки. Пусть она является общей вершиной d неостроугольных треугольников (назовем их *базовыми*); тогда после ее удаления количество неостроугольных треугольников в S уменьшится на d , и могут возникнуть новые независимые треугольники. Назовем *свободными* треугольники, становящиеся независимыми после выкидывания отмеченной точки. Число свободных треугольников не может превышать $2d$, так как они по определению не имеют общих вершин, а общее число вершин базовых треугольников не превосходит $2d + 1$, считая отмеченную.

Обозначим число свободных треугольников через b . Если $b = 2d$ или $b = 2d - 1$, поступаем следующим образом: удаляем из S все вершины, по которым базовые треугольники пересекаются со свободными (не трогая отмеченную точку). Если же $b < 2d - 1$, удаляем все точки пересечения базовых треугольников со свободными и

отмеченную точку. В первом случае отношение количества удаленных точек к числу удаленных этим действием треугольников будет равно $2d/3d$ или $(2d-1)/(3d-1)$, т.е. не больше $2/3$; во втором случае получим отношение

$$\frac{b+1}{b+d} = 1 - \frac{d-1}{b+d} \leq 1 - \frac{d-1}{3d-2},$$

которое при $d \geq 2$ (в силу выбора отмеченной точки как принадлежащей не менее чем двум треугольникам) не превосходит $3/4$. Получаем, что в обоих случаях количество удаленных точек не превосходит $3/4$ от числа удаленных этим действием неостроугольных треугольников. Заметим, что существует способ взаимного расположения неостроугольных треугольников, при котором искомое отношение в точности равно $3/4$.

После этих действий не остается новых независимых треугольников; следовательно, если еще остались неостроугольные треугольники, мы можем повторить описанную процедуру. Так как общее количество неостроугольных треугольников конечно (в силу конечности множества S), то на некотором шаге мы таким образом удалим все неостроугольные треугольники, не являвшиеся независимыми в исходном множестве S , причем на каждом шаге число удаленных точек не будет превышать $3/4$ от числа удаленных треугольников. Следовательно, чтобы полностью избавиться от неостроугольных треугольников в S , достаточно будет удалить $k + 3(q-k)/4$ точек.

Оценим количество оставшихся точек:

$$M - \left(k + \frac{3}{4}(q-k)\right) = M - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4}k \geq M - \frac{3}{4}m - \frac{1}{12}M = \frac{11}{12}M - \frac{3}{4}m \geq \frac{3}{2}m.$$

Таким образом, мы доказали существование множества, состоящего из не менее чем

$$\frac{3}{2} \left\lfloor \frac{11\sqrt{165}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor$$

точек и обладающего нужным свойством: никакие две его точки не образуют прямой или тупой угол. Доказательство теоремы 1 окончено.

3. Второй подход. В этом пункте мы улучшим результат теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место неравенство*

$$a(n) \geq \frac{2}{3} \left\lfloor \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor \approx 0.9428 \dots \times (1.154 \dots)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$M = \left\lfloor \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor.$$

Если при данном n оказывается, что $M = 0$, то оценка из теоремы тривиальна. Иначе построим случайное (мульти)множество $S \subseteq \{0, 1\}^n$, состоящее из M (не обязательно различных) векторов. А именно, координаты каждого вектора $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ из S мы выберем в соответствии со схемой Бернулли, т.е. независимо друг от друга и с вероятностями

$$P(v_i = 0) = P(v_i = 1) = \frac{1}{2}, \quad 1 \leq i \leq n;$$

выбор самих векторов также осуществим независимо.

Назовем тройку векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in S$ обобщенным прямым углом с вершиной в $\vec{w}$, если $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = 0$, т.е. либо $u_i - w_i = 0$, либо $v_i - w_i = 0$ для каждого i , $1 \leq i \leq n$. Все прямые углы в нашем множестве, очевидно, являются обобщенными прямыми углами. Заметим, что отрицательных значений упомянутое скалярное произведение принимать не может; соответственно, тупых углов тройки из множества S не образуют. Рассмотрим соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}.$$

Для каждого i столбец (u_i, v_i, w_i) (запись в строчку использована для удобства) может принимать восемь равновероятных значений:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ является обобщенным прямым углом с вершиной в $\vec{w}$ тогда и только тогда, когда столбец (u_i, v_i, w_i) не имеет вид $(0, 0, 1)$ или $(1, 1, 0)$ ни для какого i , $1 \leq i \leq n$. Вероятность последнего события равна $(3/4)^n$.

Таким образом, математическое ожидание числа обобщенных прямых углов в S имеет вид

$$3C_M^3 \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{3M^3}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{M^2}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot M \leq M.$$

Следовательно, существует хотя бы одно множество S_0 из M точек, в котором не более M обобщенных прямых углов.

Допустим, какие-то две точки в S_0 совпали: $\vec{u} = \vec{w}$. Тогда верно, что $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = 0$ и $(\vec{w} - \vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) = 0$ для любой точки $\vec{v}$. Иными словами, тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ образует два обобщенных прямых угла с разными вершинами. Так как в качестве $\vec{v}$ мы можем взять любую оставшуюся точку из S_0 (т.е. всего $M - 2$ точки), количество обобщенных прямых углов в S_0 в таком случае не меньше $2(M - 2)$. С другой стороны, оно не превосходит M . Следовательно, при тех значениях n , для которых $M > 4$, совпадение двух точек в множестве S_0 невозможно. (Нетрудно убедиться в том, что это верно для всех $n > 8$. Для $3 \leq n \leq 8$ оценка $a(n) \geq 2M/3$ следует из того, что $a(n) \geq a(3) = 5$.) Значит, мы можем считать, что все обобщенные прямые углы в S_0 являются прямыми углами в обычном смысле слова, и можно говорить о прямоугольных треугольниках, образованных точками из S_0 .

Рассмотрим все точки множества S_0 . Каждая из них обладает ровно одним из следующих свойств:

- Q_1 : все углы с вершиной в данной точке острые;
- Q_2 : точка является вершиной хотя бы одного прямого угла, и все острые углы с вершиной в этой точке принадлежат остроугольным треугольникам;
- Q_3 : точка является вершиной хотя бы одного прямого угла и ровно одного острого угла прямоугольного треугольника;
- Q_4 : точка является вершиной хотя бы одного прямого угла и не менее чем двух острых углов прямоугольных треугольников.

Предположим, множество точек, обладающих свойством Q_4 , непусто. Удалим из S_0 любую точку $\vec{x}$ с данным свойством. При этом общее число прямых углов,

образованных точками из S_0 , уменьшится не менее чем на три. Каждая из точек множества $S_0 \setminus \{\vec{x}\}$, опять-таки, обладает одним из свойств $Q_1, \dots, Q_4$. Снова, если среди этих точек есть хотя бы одна со свойством Q_4 , удаляем ее. Пропадает не менее трех прямых углов. Действуем аналогично до тех пор, пока множество точек со свойством Q_4 не окажется пустым. Это вовсе не означает, конечно, что в указанный момент не будет больше прямоугольных треугольников. Однако, даже если мы исчерпаем их все, по ходу дела мы удалим из S_0 не более $M/3$ точек, ведь каждый раз мы устраняли хотя бы три прямоугольных треугольника, а общее число таких треугольников с самого начала не превосходило M .

В итоге остается множество S , каждый элемент которого обладает ровно одним из свойств Q_1, Q_2, Q_3 . При этом, $|S| \geq |S_0| - M/3 = 2M/3$. Пусть $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$, где S_i – множество точек из S со свойством Q_i .

Рассмотрим некоторую точку $\vec{w} \in S_3$. Пусть $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ – прямой угол того прямоугольного треугольника, для которого $\vec{w}$ является вершиной острого угла (такой треугольник существует по определению свойства Q_3). Так как угол с вершиной в $\vec{w}$ острый, найдется такой номер i , $1 \leq i \leq n$, что набор (u_i, w_i, v_i) имеет вид $(0, 1, 0)$ или $(1, 0, 1)$. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ (достаточно взять $\varepsilon = 1/4$) и сдвинем точку $\vec{w}$ на ε по i -й координате следующим образом: если $w_i = 0$, то $w'_i = -\varepsilon$; если $w_i = 1$, то $w'_i = 1 + \varepsilon$. Произведем такую операцию со всеми точками из S_3 .

Далее, рассмотрим точку $\vec{x} \in S_2$. Положим $\vec{x}' = (x'_1, x_2, \dots, x_n)$, где x'_1 определяется аналогично тому, как в предыдущем случае определялась координата w'_i : если $x_1 = 0$, то $x'_1 = -\varepsilon$; если $x_1 = 1$, то $x'_1 = 1 + \varepsilon$. Применим такое преобразование ко всем точкам из S_2 .

Для точек $\vec{y} \in S_1$ положим $\vec{y}' = \vec{y}$. Возьмем множество $S' = \{v' : v \in S\}$ – набор всех преобразованных точек (считая тождественное преобразование для S_1). Ясно, что $|S'| = |S| \geq 2M/3$. Докажем, что точки из S' не образуют ни одного прямого или тупого угла.

1) Покажем сначала, что если тройка точек $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \subset S$ образовывала острый угол с вершиной в $\vec{w}$, то $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ – острый угол, т.е. остроугольные треугольники сохраняются при переходе от S к S' .

Так как $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) > 0$, найдется такое i , $1 \leq i \leq n$, что столбец (u_i, v_i, w_i) имеет вид $(1, 1, 0)$ или $(0, 0, 1)$. Следовательно, при всех возможных значениях u'_i, v'_i, w'_i верно, что $(u'_i - w'_i)(v'_i - w'_i) \geq 1$ (см. таблицу). Далее, максимальное по модулю отрицательное значение величины $(u_j - w_j)(v_j - w_j)$, $j \neq i$, коль скоро координаты принимают значения из множества $\{-\varepsilon, 0, 1, 1 + \varepsilon\}$, равно $-\varepsilon(1 + \varepsilon)$ (см. таблицу). Оно может встретиться не более чем для трех различных j , так как каждую точку из S мы сдвигали не более, чем по одной координате. Следовательно,

$$(\vec{u}' - \vec{w}', \vec{v}' - \vec{w}') \geq 1 - 3\varepsilon(1 + \varepsilon) > 0$$

в силу выбора достаточно малого ε . Таким образом, угол $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ с вершиной в $\vec{w}'$ острый.

2) Покажем теперь, что прямые углы в S превращаются в острые углы в S' . Пусть тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ образует прямой угол с вершиной в $\vec{w}$. Докажем, что угол $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ является острым.

Прежде всего, очевидно, что $\vec{w} \notin S_1$, т.е. $\vec{w}' \neq \vec{w}$. Если, в то же время, $\vec{u} = \vec{u}'$ и $\vec{v} = \vec{v}'$, то мы замечаем, что для нашего преобразования существует ровно одно значение $i = i(w)$, такое, что $w_i \neq w'_i$, и простым перебором ситуаций показываем,

что

$$(\vec{u} - \vec{w}', \vec{v} - \vec{w}') = (\vec{u}' - \vec{w}', \vec{v}' - \vec{w}') > 0.$$

Допустим далее, что $\vec{u} \neq \vec{u}'$, но $\vec{v} = \vec{v}'$. Тогда точка $\vec{u}$ не обладает свойством Q_1 (ведь иначе мы бы не стали ее преобразовывать), а так как она является вершиной острого угла прямоугольного треугольника $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, она не может обладать свойством Q_2 . Значит, $\vec{u} \in S_3$. Преобразование точки со свойством Q_3 устроено так, что существует ровно одно $i(u)$, с которым $u_{i(u)} \neq u'_{i(u)}$, причем заведомо $w_{i(u)} = v_{i(u)}$. Если $i(u) = i(w)$ (т.е. изменение $\vec{u}$ на $\vec{u}'$ и $\vec{w}$ на $\vec{w}'$ произошло по координате с одним и тем же номером), то в обозначениях $i(u) = i(w) = i$ столбец (u'_i, v'_i, w'_i) имеет вид $(-\varepsilon, 1, 1 + \varepsilon)$ или $(1 + \varepsilon, 0, -\varepsilon)$. В таком случае

$$(\vec{u}' - \vec{w}', \vec{v}' - \vec{w}') = (u'_i - w'_i)(v'_i - w'_i) + \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} (u_j - w_j)(v_j - w_j) = \varepsilon(1 + 2\varepsilon) > 0.$$

(Вторая сумма равна нулю в силу того, что исходный треугольник $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ прямоугольный). Если же $i(u) \neq i(w)$, то

$$\begin{aligned} (\vec{u}' - \vec{w}', \vec{v}' - \vec{w}') &= (u_{i(w)} - w'_{i(w)})(v_{i(w)} - w'_{i(w)}) + (u'_{i(u)} - w_{i(u)})(v_{i(u)} - w_{i(u)}) \\ &+ \sum_{j \neq i(u), j \neq i(w)} (u_j - w_j)(v_j - w_j). \end{aligned}$$

Первое слагаемое этой суммы положительно по построению $\vec{w}'$, остальные слагаемые равны нулю ввиду прямоугольности треугольника $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ и того, что $w_{i(u)} = v_{i(u)}$.

Пусть, наконец, $\vec{u} \neq \vec{u}'$ и $\vec{v} \neq \vec{v}'$. Тогда существуют соответствующие значения $i(u)$ и $i(v)$, причем заведомо верно, что $i(u) \neq i(v)$, так как $w_{i(u)} = v_{i(u)}$ и $w_{i(v)} \neq v_{i(v)}$. Дальнейшие рассуждения в точности повторяют рассуждения из предыдущего случая.

Итак, мы доказали, что точки множества S' образуют только острые углы. При этом

$$|S'| \geq \frac{2}{3}M = \frac{2}{3} \left\lfloor \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor.$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Danzer, B. Grünbaum, “Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee”, *Math. Z.*, **79**, (1962), 95–99.
- [2] P. Erdős, Z. Füredi, “The greatest angle among n points in the d -dimensional Euclidean space”, *Ann. Discrete Math.*, **17**, (1983), 275–283.
- [3] D. Bevan, “Sets of points determining only acute angles and some related colouring problems”, *Electron. J. Combin.*, **13**:1, (2006), R12, 24 pp.
- [4] Л. В. Бучок, “Остроугольные треугольники Данцера–Грюнбаума”, *УМН*, **64**:3, (2009), 181–182.

Л. В. Бучок

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: larisa.buchok@gmail.com

Поступило

29.12.2008