Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Диденко, О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 226–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:13:51

О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением

В. Б. Диденко

Получены необходимые и достаточные условия обратимости и фредгольмовости операторов, порожденных семейством эволюционных операторов и крайевыми условиями, заданными с помощью линейного отношения.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $\text{End } X$ – банахова алгебра эндоморфизмов пространства X .

Символом Δ обозначим множество $[a, b] \times [a, b]$. Отображение $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$ называется (*сильно непрерывным*) *семейством эволюционных операторов* на $[a, b]$, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ – тождественный оператор для любого $t \in [a, b]$;
- (2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех t, s, τ из $[a, b]$;
- (3) отображение $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x : \Delta \rightarrow X$ непрерывно для любого $x \in X$.

Символом $L_p = L_p([a, b], X)$, $1 \leq p \leq \infty$, будем обозначать (банахово) пространство классов измеримых по Бохнеру функций, для которых конечна величина (принимая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty, \quad \|x\|_\infty = \text{ess sup}_{\tau \in [a, b]} \|x(\tau)\|.$$

Через $C = C([a, b], X)$ обозначим (банахово) пространство непрерывных на $[a, b]$ функций, принимающих значения в X .

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}([a, b], X)$ будем обозначать одно из перечисленных выше пространств.

Пусть Γ – произвольное линейное отношение на X , т.е. Γ – некоторое линейное подпространство из $X \times X$. В данной работе рассматривается оператор

$$\mathcal{L}_\Gamma : D(\mathcal{L}_\Gamma) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

который определяется следующим образом. Непрерывная функция $x : [a, b] \rightarrow X$, для которой $(x(a), x(b)) \in \Gamma$, включается в $D(\mathcal{L}_\Gamma)$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00276).

такая, что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, a)x(a) + \int_a^t \mathcal{U}(t, s)f(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (1.1)$$

При этом полагается $\mathcal{L}_\Gamma x = f$. Отметим корректность определения оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ (т.е. единственность функции f , построенной по x).

Одним из примеров операторов, задаваемых с помощью равенств (1.1), является дифференциальный оператор $\mathcal{L} = d/dt - A$ в случае, когда оператор A является генератором сильно непрерывной группы операторов $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$. В этом случае семейство эволюционных операторов имеет вид $\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$.

Часто граничные условия задаются с помощью упорядоченной пары линейных операторов (A, B) (см. [1]), где операторы A, B из $\text{End } X$, когда для линейного отношения Γ справедливо одно из следующих представлений:

$$\Gamma = \{(Ax, Bx), x \in X\}, \quad (1.2)$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \times X : Ax = By\}. \quad (1.3)$$

Если отношение Γ является несингулярным (определение будет дано ниже), то оно может быть представлено как в виде (1.2), так и в виде (1.3) (см. теорему 5). В случае, когда X – конечномерное пространство, любое линейное отношение $\Gamma \subset X \times X$ представимо в виде (1.2), либо в виде (1.3). Это утверждение следует из теорем 6 и 7.

Используемые в следующем определении понятия будут введены ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ – банахово пространство и для отношения $\mathcal{A}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $\mathcal{A} \in \text{LRC}(\mathcal{X})$;
- 2) $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$, т.е. отношение $\mathcal{A}$ инъективно;
- 3) отношение $\mathcal{A}$ корректно;
- 4) $\alpha(\mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A} < \infty$;
- 5) $\text{Ker } \mathcal{A}$ – замкнутое дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$;
- 6) $\overline{\text{Im } \mathcal{A}} = \text{Im } \mathcal{A}$;
- 7) $\text{Im } \mathcal{A}$ – замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство;
- 8) $\text{Im } \mathcal{A}$ – замкнутое подпространство конечной коразмерности $\text{Codim Im } \mathcal{A} = \beta(\mathcal{A})$;
- 9) $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{A}$ – сюръективное отношение;
- 10) отношение $\mathcal{A}$ непрерывно обратимо.

Если для $\mathcal{A}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 10$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ находится в состоянии обратимости S .

В частности, если отношение $\mathcal{A} \in \text{LR}(\mathcal{X})$ находится в состоянии обратимости $F = \{4, 8\}$, то отношение $\mathcal{A}$ будет фредгольмовым. Индексом фредгольмова отношения $\mathcal{A}$ назовем число $\text{ind}(\mathcal{A}) = \alpha(\mathcal{A}) - \beta(\mathcal{A})$.

В работе получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ выполнено одно из приведенных в определении 1 десяти свойств, то соответствующим свойством обладает отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Любое из десяти свойств определения 1, выполненное для отношения

$\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$, исключая, быть может, первое и пятое свойства, выполнено и для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Если один из них фредгольмов, то

$$\alpha(\mathcal{L}_\Gamma) = \alpha(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)), \quad \beta(\mathcal{L}_\Gamma) = \beta(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)),$$

а значит, и их индексы совпадают.

2. Некоторые сведения из теории линейных отношений. Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subseteq X \times X$ называется *линейным отношением* на пространстве X . Множество всех замкнутых линейных отношений на X будем обозначать $\text{LRC}(X)$. Множество всех линейных отношений на X будем обозначать $\text{LR}(X)$. Линейные операторы будут часто отождествляться с их графиком, т.е. рассматриваться в качестве линейных отношений. Используемые далее понятия из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) можно найти в монографии [2] и в статье [3].

Областью определения $D(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ называется подпространство вида $D(\mathcal{A}) = \{x \in X : (x, y) \in \mathcal{A} \text{ для некоторого } y \in X\}$.

Образом $\text{Im } \mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ называется подпространство вида $\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{A} \text{ для некоторого } x \in X\}$.

Ядром линейного отношения $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ называется множество $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$.

Для отношения $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ и элемента $x \in X$ определим множество вида $\mathcal{A}x = \{y : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. В частности, множество $\mathcal{A}0$ имеет вид $\mathcal{A}0 = \{y : (0, y) \in \mathcal{A}\}$.

Суммой двух линейных отношений $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ из $\text{LR}(X)$ называется линейное отношение вида

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2), y \in \mathcal{A}_1x + \mathcal{A}_2x\}.$$

Здесь под $\mathcal{A}_1x + \mathcal{A}_2x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}_1x, \mathcal{A}_2x$. Из этого определения следует, что $D(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$.

Отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LRC}(X)$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ (отношение $\mathcal{A}$ инъективно) и $\text{Im } \mathcal{A} = X$ (отношение $\mathcal{A}$ сюръективно).

Линейное отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ называется *фредгольмовым*, если его ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерно, образ $\text{Im } \mathcal{A}$ замкнут и его коразмерность $\beta(\mathcal{A}) = \dim(X/\text{Im } \mathcal{A})$ конечна. Число $\text{ind } \mathcal{A} = \alpha(\mathcal{A}) - \beta(\mathcal{A})$, где $\alpha(\mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$, называется *индексом* фредгольмова отношения $\mathcal{A}$.

Нормой линейного отношения $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ назовем число

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\mathcal{A}x\|, \quad \text{где } \|\mathcal{A}x\| = \inf_{y \in \mathcal{A}x} \|y\|.$$

В случае конечности этой величины отношение $\mathcal{A}$ называется *ограниченным*.

Для отношения $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ величина

$$\gamma(\mathcal{A}) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \{\|\mathcal{A}x\| \geq \lambda d(x, \text{Ker } \mathcal{A}) \text{ для всех } x \in D(\mathcal{A})\},$$

где $d(x, \text{Ker } \mathcal{A}) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } \mathcal{A}} \|x - x_0\|$, называется *инфимумом модуля* отношения $\mathcal{A}$.

В [2] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Для любого отношения $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ справедлива формула

$$\gamma(\mathcal{A}) = \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}. \quad (2.1)$$

Отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LR}(X)$ называется *корректным* (равномерно инъективным), если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ и $\gamma(\mathcal{A}) > 0$.

Резольвентным множеством отношения $\mathcal{A} \in \text{LRC}(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } X$. Спектром отношения $\mathcal{A} \in \text{LRC}(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{K} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Пусть операторы F, G из $\text{End } X$. К резольвентному множеству $\rho(G, F)$ упорядоченной пары операторов (G, F) отнесем все числа λ из $\mathbb{K}$, для которых оператор $G - \lambda F$ непрерывно обратим. Множество $\sigma(G, F) = \mathbb{K} \setminus \rho(G, F)$ назовем спектром этой пары.

Для упорядоченной пары операторов (G, F) введем отношения $\mathcal{A}_l = F^{-1}G$ и $\mathcal{A}_r = GF^{-1}$, которые назовем соответственно левым и правым отношениями для упорядоченной пары (G, F) .

В [4] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Если для упорядоченной пары операторов (G, F) множество $\rho(G, F)$ непусто, то справедливы следующие равенства:

$$\sigma(G, F) = \sigma(\mathcal{A}_l) = \sigma(\mathcal{A}_r). \quad (2.2)$$

Отметим, что для упорядоченной пары операторов (G, F) выполняются следующие равенства:

$$(\mathcal{A}_l - \lambda I)^{-1} = (G - \lambda F)^{-1}F, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad (2.3)$$

$$(\mathcal{A}_r - \lambda I)^{-1} = F(G - \lambda F)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{K}. \quad (2.4)$$

Отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LRC}(X)$ называется *несингулярным*, если его резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ непусто. В противном случае отношение $\mathcal{A}$ называется *сингулярным*.

ТЕОРЕМА 5. Если отношение $\mathcal{A}$ из $\text{LRC}(X)$ является несингулярным, то оно представимо как в виде (1.2), так и в виде (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$. Тогда для него справедливы следующие представления:

$$\mathcal{A} = \{(Ax, Bx), x \in X\} = BA^{-1},$$

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in X \times X : Cx = Dy\} = D^{-1}C,$$

где

$$A = (\mathcal{A} - \lambda_0 I)^{-1}, \quad B = I + \lambda_0(\mathcal{A} - \lambda_0 I)^{-1},$$

$$C = I + \lambda_0(\mathcal{A} - \lambda_0 I)^{-1}, \quad D = (\mathcal{A} - \lambda_0 I)^{-1}.$$

Представления проверяются непосредственной подстановкой. Теорема доказана.

Пусть теперь X – конечномерное пространство. В [5] были доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы произвольное отношение $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ было представимо в виде (1.2) для некоторых операторов $A, B \in \text{End } X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\dim D(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{A}0 \leq \dim X.$$

ТЕОРЕМА 7. Для того, чтобы произвольное отношение $\mathcal{A} \in \text{LR}(X)$ было представимо в виде (1.3) для некоторых операторов $A, B \in \text{End } X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\dim D(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{A}0 \geq \dim X.$$

3. Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ и отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Утверждения этого пункта связаны с доказательством утверждений о том, что большинство свойств из определения 1 выполняются для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ и отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$ одновременно.

Введем в рассмотрение следующие два оператора: $\mathcal{B}: X \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{C}: \mathcal{F} \rightarrow X$ с помощью равенств

$$(\mathcal{B}x)(s) = \frac{1}{b-a} \mathcal{U}(s, b)x, \quad s \in [a, b], \quad x \in X, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{C}f = \int_a^b \mathcal{U}(b, s)f(s) ds, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 1. Операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению эволюционного семейства $\mathcal{U}$ для любого элемента x из X функция $(t, s) \mapsto U(t, s)x: \Delta \rightarrow X$ является непрерывной, а значит, она ограничена на Δ . В силу принципа равномерной ограниченности (см. [6; теорема II.2.11]) следует, что существует такое число M , для которого $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M$ для любой пары (t, s) из Δ . Отсюда следует ограниченность операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$.

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ вытекает следующая

ЛЕММА 2. Произведение операторов $\mathcal{C}\mathcal{B}$ является тождественным оператором в X .

ЛЕММА 3. Для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ справедливы равенства

$$\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma = \{x \in \mathcal{F} : x(t) = \mathcal{U}(t, a)x_0, x_0 \in \text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)), t \in [a, b]\}, \quad (3.3)$$

$$\text{Im } \mathcal{L}_\Gamma = \{f \in \mathcal{F} : \mathcal{C}f \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))\}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем справедливость равенства (3.3). Возьмем произвольную функцию x из $\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$. Тогда по определению оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ справедливо равенство $x(t) = \mathcal{U}(t, a)x_0$, $t \in [a, b]$. Так как $(x(a), x(b)) \in \Gamma$, то получим, что $(x_0, \mathcal{U}(b, a)x_0) \in \Gamma$, а значит, $x_0 \in \text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$.

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ следует, что функция x , заданная равенством $x(t) = \mathcal{U}(t, a)x_0$, $t \in [a, b]$, где x_0 из $\text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$, принадлежит $\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$. Таким образом, мы доказали равенство (3.3).

Докажем справедливость равенства (3.4). Пусть функция f из $\text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Тогда найдется непрерывная функция x , для которой выполняется равенство (1.1) и, кроме того, $(x(a), x(b))$ принадлежит Γ . Отсюда следует, что $(x(a), \mathcal{U}(b, a)x(a) + \mathcal{C}f) \in \Gamma$, а значит, $\mathcal{C}f \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$.

Пусть теперь $\mathcal{C}f \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. Рассмотрим функцию x , определяемую равенством

$$x(t) = \mathcal{U}(t, a)x_0 + \int_a^t \mathcal{U}(t, s)f(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

где x_0 из $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}(\mathcal{C}f)$. Для построенной таким образом функции x справедливо равенство (1.1), и кроме того, пара $(x(a), x(b))$ принадлежит Γ , а значит, $\mathcal{L}_\Gamma x = f$. Следовательно $f \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Таким образом, мы доказали равенство (3.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Образ $\text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$ оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть замкнут образ оператора $\mathcal{L}_\Gamma$. Покажем замкнутость образа отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Пусть (x_n) – сходящаяся к x_0 последовательность из $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. Рассмотрим последовательность функций (f_n) из $\mathcal{F}$, определенных по правилу $f_n = \mathcal{B}x_n$, $n \geq 1$.

Поскольку элемент $\mathcal{C}f_n = x_n$ из $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ для любого натурального n , то $f_n \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Так как в силу ограниченности оператора $\mathcal{B}$ последовательность (f_n) сходится к функции $f_0 = \mathcal{B}x_0$, то в силу леммы 3, замкнутости образа оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ и равенства $\mathcal{C}f_0 = x_0$ получаем, что x_0 принадлежит $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$.

Пусть замкнут образ отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Покажем замкнутость образа оператора $\mathcal{L}_\Gamma$. Рассмотрим последовательность функций (f_n) из $\text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$, сходящуюся к функции f_0 . Последовательность (x_n) , где $x_n = \mathcal{C}f_n$, $n = 1, 2, \dots$, в силу леммы 3, принадлежит подпространству $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. Заметим, что (x_n) сходится к элементу $x_0 = \mathcal{C}f_0$. В силу замкнутости подпространства $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ элемент $x_0 \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$, а значит, $f_0 \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$ по лемме 3. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Если $\text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$ – замкнутое дополняемое подпространство в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0$ – некоторое замкнутое подпространство из $\mathcal{F}$, для которого*

$$\mathcal{F} = \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma \oplus \mathcal{F}_0, \quad (3.5)$$

то пространство X представимо в виде

$$X = \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{F}_0), \quad (3.6)$$

причем $\mathcal{C}(\mathcal{F}_0)$ – замкнутое подпространство в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что любой вектор x из X представим в виде $x = x_0 + x_1$, где x_0 из $\mathcal{C}(\mathcal{F}_0)$, x_1 из $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. Из разложения (3.5) следует, что функция $\mathcal{B}x$ представима в виде $\mathcal{B}x = f_0 + f_1$, где f_0 из $\mathcal{F}_0$, а f_1 из $\text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Тогда по лемме 2 получаем, что $x = \mathcal{C}\mathcal{B}x = \mathcal{C}f_0 + \mathcal{C}f_1$. Так как $\mathcal{C}f_0 \in \mathcal{C}\mathcal{F}_0$, $\mathcal{C}f_1 \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ (по лемме 3), то в качестве x_0 , x_1 можно взять $x_0 = \mathcal{C}f_0$, $x_1 = \mathcal{C}f_1$.

Покажем единственность разложения. Пусть вектор x также представим в виде $x = x'_0 + x'_1$, где x'_0 из $\mathcal{C}(\mathcal{F}_0)$, x'_1 из $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. Тогда существует такая функция f'_0 из $\mathcal{F}_0$, что $x'_0 = \mathcal{C}f'_0$. Поскольку $\mathcal{C}f_0 - \mathcal{C}f'_0 = x_0 - x'_0 = x_1 - x'_1$ и $(x_1 - x'_1) \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$, то по лемме 3 получаем, что $(f_0 - f'_0) \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Из разложения (3.5) следует, что $f_0 = f'_0$.

Замкнутость пространства $\mathcal{C}\mathcal{F}_0$ следует из критерия Като (см. [7; теорема 7.4.20]). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9. Если $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ – замкнутое дополняемое подпространство в X и X_0 – некоторое замкнутое подпространство из X , для которого

$$X = \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)) \oplus X_0, \quad (3.7)$$

то $\mathcal{F}$ представимо в виде

$$\mathcal{F} = \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma \oplus \mathcal{B}(X_0), \quad (3.8)$$

где $\mathcal{B}(X_0)$ является замкнутым подпространством из $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что любая функция f из $\mathcal{F}$ представима в виде $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in \mathcal{B}(X_0)$, $f_1 \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Из разложения (3.7) следует, что $\mathcal{C}f = x_0 + x_1$, где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. В качестве функции f_0 возьмем функцию $f_0 = \mathcal{B}x_0$. Так как для функции $f_1 = f - f_0$ справедливо

$$\mathcal{C}f_1 = \mathcal{C}f - \mathcal{C}f_0 = x_1 \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)),$$

то по лемме 3 получаем, что $f_1 \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$.

Покажем, что полученное представление единственно. Пусть $f = f'_0 + f'_1$, где $f'_0 = \mathcal{B}x'_0$, $x'_0 \in X_0$, $f'_1 \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$. Так как

$$x_0 - x'_0 = \mathcal{C}(f_0 - f'_0) = \mathcal{C}(f_1 - f'_1) \in \text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)),$$

то из разложения (3.7) следует, что $x_0 = x'_0$, а значит, $f_0 = f'_0$.

Замкнутость подпространства $\mathcal{B}(X_0)$ следует из критерия Като (см. [7; теорема 7.4.20]). Теорема доказана.

Введем в рассмотрение линейный оператор $B: X \rightarrow \mathcal{F}$, определяемый равенствами

$$(Bx_0)(t) = \mathcal{U}(t, a)x_0, \quad t \in [a, b], \quad x_0 \in \text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)). \quad (3.9)$$

Из доказательства леммы 1 следует, что оператор B ограничен.

ЛЕММА 5. Ядра оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ и отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$ изоморфны, а их изоморфизм осуществляет оператор B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения непосредственно следует из леммы 3.

ТЕОРЕМА 10. Если $\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$ – замкнутое дополняемое подпространство в пространстве $\mathcal{F}$ и

$$\mathcal{F} = \text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma \oplus \mathcal{F}_1, \quad (3.10)$$

где $\mathcal{F}_1$ – замкнутое подпространство, то $\text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ – замкнутое дополняемое подпространство из X и

$$X = \text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)) \oplus B^{-1}(\mathcal{F}_1). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $B^{-1}(\mathcal{F}_1)$ – замкнутое подпространство как прообраз замкнутого подпространства $\mathcal{F}_1$ при непрерывном отображении B .

Пусть $x_0 \in \text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)) \cap B^{-1}(\mathcal{F}_1)$. Поскольку $Bx_0 \in \text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$ и $Bx_0 = 0$, а значит, в силу инъективности оператора B имеем $x_0 = 0$.

Ввиду того, что B осуществляет изоморфизм подпространств $\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$ (см. лемму 5), то теперь из (3.10) следует разложение (3.11). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11. Если замкнутым является оператор $\mathcal{L}_\Gamma$, то также замкнутым будет отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность (z_n, y_n) из $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$, сходящуюся к элементу (z_0, y_0) . Введем последовательность функций (f_n) , определенных по правилу $f_n = \mathcal{B}y_n$, $1 \leq n < \infty$. По определению оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ получим, что существует такая последовательность функций (x_n) , для которых $x_n \in (\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f_n)$ и выполняется равенство $(x_n(a), x_n(b)) = (z_n, y_n + \mathcal{U}(b, a)z_n)$ для любого натурального n . Отметим, что последовательность (x_n, f_n) сходится к элементу (x_0, f_0) , где $f_0 = \mathcal{B}y_0$, $x_0 \in (\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f_0)$, причем $(x_0(a), x_0(b)) = (z_0, y_0 + \mathcal{U}(b, a)z_0)$. В силу замкнутости оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ получим, что $x_0 \in D(\mathcal{L}_\Gamma)$, а значит, $(z_0, y_0 + \mathcal{U}(b, a)z_0) = (x_0(a), x_0(b)) \in \Gamma$. Следовательно, $(z_0, y_0) \in (\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$. Теорема доказана.

Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ не всегда замкнут для замкнутого отношения Γ .

ПРИМЕР 1. Пусть оператор $A = A^* < 0$ — отрицательно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H , имеющий компактную резольвенту. Рассмотрим ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ в H , составленный из собственных векторов оператора A , т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \geq 1$, предполагая, что $\lambda_k \leq -k^3$, $k \geq 1$. Тогда A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } H$, для которой

$$U(t)e_k = e^{\lambda_k t} e_k, \quad k \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть

$$x_0 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} e_k$$

и $E = \{x \in H : (x, x_0) = 0\}$ — подпространство векторов из H , перпендикулярных вектору x_0 . В качестве семейства эволюционных операторов возьмем семейство

$$\mathcal{U}(t, s) = U(t - s), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

Последовательность векторов из H вида

$$x_n = \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{k} e_k - \left(n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) e_n$$

принадлежит подпространству E . Все функции вида

$$\varphi_n(t) = U(t)x_n, \quad n \geq 1, \quad t \geq 0,$$

содержатся в $\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$ (см. лемму 3), так как $\text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)) = E$, где $\Gamma = E \times X$, при любом выборе пространства $\mathcal{F}([0, 1], H)$, в котором действует оператор $\mathcal{L}_\Gamma$, построенный по эволюционному семейству $\mathcal{U}$ и отношению Γ . Пусть $\mathcal{F}([0, 1], H) = L_2([0, 1], H)$. Тогда для функции $\varphi_0(t) = U(t)x_0$, $t \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_0\|^2 &= \int_0^1 \|U(t)x_n - U(t)x_0\|^2 dt \\ &= \left(\frac{1}{n} + n \sum_{k \geq 1, k \neq n} \frac{1}{k^2} \right)^2 \int_0^1 e^{2\lambda_n t} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_0(0) = x_0 \notin E$, то $\varphi_0 \notin \text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$. Итак $\text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma$ — незамкнутое подпространство в $L_2([0, 1], H)$ и поэтому $\mathcal{L}_\Gamma$ — незамкнутый оператор.

ТЕОРЕМА 12. Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимо отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$, и обратный оператор представим в виде

$$(\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds \quad \text{для всех } t \in [a, b]$$

для любой функции $f \in \mathcal{F}$, где

$$G(t, s) = \begin{cases} \mathcal{U}(t, a)(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{U}(b, s) + \mathcal{U}(t, s), & s \leq t, \\ \mathcal{U}(t, a)(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{U}(b, s), & s > t. \end{cases} \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ непрерывно обратим. Тогда из леммы 5 и теоремы 8 следует, что отношение $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$ является линейным оператором, определенным на всем пространстве X . Из теоремы 11 следует замкнутость оператора $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$, а значит, и его ограниченность.

Пусть непрерывно обратимо отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Обратимость оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ следует из леммы 5 и теоремы 9.

Покажем теперь, что оператор $K: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, определенный по правилу

$$(Kf)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds \quad \text{для всех } t \in [a, b],$$

является обратным к оператору $\mathcal{L}_\Gamma$. Возьмем произвольную функцию f из $\mathcal{F}$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\mathcal{L}_\Gamma x = f$, где $x = Kf$.

По определению оператора K получаем, что

$$x(t) = (Kf)(t) = \mathcal{U}(t, a)x(a) + \int_a^t \mathcal{U}(t, s)f(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

где

$$x(a) = (\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1} \int_a^b \mathcal{U}(b, s)f(s) ds = (\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{C}f.$$

Таким образом, пара функций (x, f) удовлетворяет равенствам (1.1). Осталось показать, что $(x(a), x(b)) \in \Gamma$. Из равенств (1.1) следует, что $x(b) = U(b, a)x(a) + \mathcal{C}f$. Так как $x(a) = (\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{C}f$, то

$$x(b) - \mathcal{U}(b, a)x(a) = \mathcal{C}f \in (\Gamma - \mathcal{U}(b, a))x(a).$$

Следовательно, $x(b) \in \Gamma x(a)$, т.е. $(x(a), x(b)) \in \Gamma$. Таким образом, мы показали, что $\mathcal{L}_\Gamma x = f$. Ограниченность оператора $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$ следует из того факта, что существует такое число M , для которого выполняется неравенство $\|\mathcal{U}(t, a)\| \leq M$ для любой пары (t, s) из Δ (см. доказательство леммы 1) и ограниченности оператора $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что формула для обратного оператора $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$ корректно определена даже в случае, когда $\mathcal{U}$ является семейством эволюционных операторов “вперед”, т.е. $\mathcal{U}$ определен только на множестве $\Delta_1 = \{(t, s) \in \Delta, s \leq t\}$. В этом случае непрерывная обратимость отношения $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$ является достаточным условием для непрерывной обратимости оператора $\mathcal{L}_\Gamma$.

ПРИМЕР 2. Покажем, что существуют такое семейство эволюционных операторов “вперед” $\mathcal{U}$ и такое отношение Γ , что оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ будет непрерывно обратим, а отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$ не будет непрерывно обратимым. В качестве пространства X рассмотрим пространство непрерывных ограниченных функций $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, а в качестве пространства $\mathcal{F}$ возьмем пространство $C([0, 1], X)$. Рассмотрим оператор $A: D(A) \subset X \rightarrow X$, $Ax = \ddot{x}$, $x \in D(A)$, с областью определения $D(A)$, состоящей из всех функций $x \in X$, таких, что $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ принадлежат X . В [6] было показано, что оператор A является генератором полугруппы $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, определенной по формуле

$$(T(t)x)(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2/4t} x(\tau + s) d\tau, \quad t > 0.$$

Семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_1 \rightarrow X$, где $\Delta_1 = \{(t, s) : t, s \in [0, 1], s \leq t\}$, определим по правилу $\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$ для любой пары (t, s) из Δ_1 . Рассмотрим оператор $P: D(P) \subset X \rightarrow X$, $Px = \dot{x}$, $x \in D(P)$ с областью определения $D(P)$, состоящей из всех функций $x \in X$ таких, что $\dot{x}$ принадлежит X . Отношение Γ возьмем равным оператору $T(1) + I_{D(P)}$, где $I_{D(P)}$ – тождественный оператор на $D(P)$. Тогда $\Gamma - \mathcal{U}(b, a) = I_{D(P)}$. В [6; лемма VIII.1.21] было доказано, что $\mathcal{C}f \in D(P)$. Так как лемма 3 справедлива и в случае, когда $\mathcal{U}$ – семейство эволюционных операторов “вперед”, то, так как $\Gamma - \mathcal{U}(b, a) = I_{D(P)}$, оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ обратим. Оператор, обратный к оператору $\mathcal{L}_\Gamma$, имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f)(t) &= \mathcal{U}(t, 0)(\Gamma - \mathcal{U}(1, 0))^{-1}\mathcal{C}f + \int_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s) ds \\ &= T(t)\mathcal{C}f + \int_0^t T(t - s)f(s) ds \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1 справедливо и для случая, когда $\mathcal{U}$ – семейство эволюционных операторов “вперед”. Поэтому оператор $\mathcal{C}$ ограничен и существует константа M такая, что $\|T(t - s)\| \leq M$ для любой пары (t, s) из Δ_1 . Отсюда следует ограниченность оператора $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ непрерывно обратим, тогда как $\Gamma - \mathcal{U}(1, 0) = I_{D(P)}$ не является непрерывно обратимым отношением.

Из леммы 5 и теорем 8, 9 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 13. *Оператор $\mathcal{L}_\Gamma$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\Gamma - \mathcal{U}(b, a)$. Если один из них фредгольмов, то*

$$\dim \text{Ker } \mathcal{L}_\Gamma = \dim \text{Ker}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)), \quad \text{Codim Im } \mathcal{L}_\Gamma = \text{Codim Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)),$$

а значит, и их индексы совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из равенств (1.1), определяющих оператор $\mathcal{L}_\Gamma$, следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ оператор $\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I$ задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_\lambda: \Delta \rightarrow \text{End } X$ вида

$$\mathcal{U}_\lambda(t, s) = e^{\lambda(t-s)} \mathcal{U}(t, s), \quad (t, s) \in \Delta. \quad (3.13)$$

Обозначим символом $\sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$ множество вида

$$\sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\Gamma - \lambda \mathcal{U}(b, a))^{-1} \notin \text{End } X\}. \quad (3.14)$$

Из замечания 2 и теоремы 12 вытекают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 14. *Спектр оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ имеет вид*

$$\sigma(\mathcal{L}_\Gamma) = \{\lambda \in \mathbb{K} : e^{\lambda(b-a)} \in \sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))\}. \quad (3.15)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть X – комплексное банахово пространство. Тогда если спектр оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ не пуст, то для него справедливо следующее равенство:*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sigma(\mathcal{L}_\Gamma) + \frac{i2\pi k}{b-a} \right) = \sigma(\mathcal{L}_\Gamma). \quad (3.16)$$

ТЕОРЕМА 15. *Резольвента оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ $R(\cdot, \mathcal{L}_\Gamma) : \rho(\mathcal{L}_\Gamma) \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$ имеет вид*

$$(R(\lambda, \mathcal{L}_\Gamma)f)(s) = \int_a^b G(\lambda, t, s)f(s) ds$$

для любой функции f из $\mathcal{F}$, где

$$G(\lambda, t, s) = \begin{cases} e^{\lambda(t-s)}[\mathcal{U}(t, a)(e^{\lambda(a-b)}\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{U}(b, s) + \mathcal{U}(t, s)], & s \leq t, \\ e^{\lambda(t-s)}\mathcal{U}(t, a)(e^{\lambda(a-b)}\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{U}(b, s), & s > t. \end{cases} \quad (3.17)$$

Введем следующие обозначения. Символом $\sigma_d(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$ обозначим дискретный спектр пары $(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, т.е. множество тех $\lambda \in \sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, для которых отношение $\Gamma - \lambda\mathcal{U}(b, a)$ не инъективно. Символом $\sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$ обозначим непрерывный спектр пары $(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, т.е. множество тех $\lambda \in \sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, для которых отношение $\Gamma - \lambda\mathcal{U}(b, a)$ инъективно и замыкание пространства $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ совпадает с X . Символом $\sigma_r(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$ обозначим остаточный спектр пары $(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, т.е. множество тех $\lambda \in \sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, для которых отношение $\Gamma - \lambda\mathcal{U}(b, a)$ инъективно и замыкание пространства $\text{Im}(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))$ не совпадает с X . Очевидно, что множества $\sigma_d(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, $\sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, $\sigma_r(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$ попарно не пересекаются и

$$\sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) = \sigma_d(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) \cup \sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) \cup \sigma_r(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)).$$

ТЕОРЕМА 16. *Для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ справедливы следующие равенства:*

$$\sigma_d(\mathcal{L}_\Gamma) = \{\lambda : e^{\lambda(b-a)} \in \sigma_d(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))\}, \quad (3.18)$$

$$\sigma_c(\mathcal{L}_\Gamma) = \{\lambda : e^{\lambda(b-a)} \in \sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))\}, \quad (3.19)$$

$$\sigma_r(\mathcal{L}_\Gamma) = \{\lambda : e^{\lambda(b-a)} \in \sigma_r(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))\}. \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (3.18). Из леммы 3 и замечания 2 следует, что

$$\text{Ker}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I) = \{x \in \mathcal{F} : x = e^{\lambda(t-a)}x_0, x_0 \in \text{Ker}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a))\}.$$

Отсюда непосредственно следует равенство (3.18).

Докажем равенство (3.19). Пусть $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{L}_\Gamma)$. Покажем, что $e^{\lambda(b-a)}$ принадлежит множеству $\sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$. По лемме 3 получаем, что $\text{Ker}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a)) = \{0\}$. Покажем, что замыкание пространства $\text{Im}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a))$ совпадает с X . Возьмем произвольный элемент x из X . Так как пространство $\text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$ плотно в $\mathcal{F}$,

то существует последовательность функций (f_n) из $\text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$, сходящаяся к функции $\mathcal{B}x$. Поскольку оператор $\mathcal{B}$ ограничен (по лемме 1), последовательность (x_n) , где $x_n = \mathcal{C}f_n$, $n \geq 1$, сходится к элементу $\mathcal{C}f = \mathcal{C}\mathcal{B}x = x$. По лемме 3 получаем, что $x_n \in \text{Im}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a))$ для любого натурального числа n . Следовательно, замыкание пространства $\text{Im}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a))$ совпадает с X .

Пусть теперь $e^{\lambda(b-a)} \in \sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$. Покажем, что $\lambda \in \sigma_c(\mathcal{L}_\Gamma)$. Из леммы 3 следует, что оператор $\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I$ является инъективным. Покажем, что замыкание пространства $\text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$ есть $\mathcal{F}$. Возьмем произвольную функции f из $\mathcal{F}$. Пусть $x = \mathcal{C}f$. Тогда функция f представима в виде $f = g + \mathcal{B}x$, где $g \in \text{Ker } \mathcal{C}$. Из леммы 3 следует, что $g \in \text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$. Так как пространство $\text{Im}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a))$ плотно в X , то существует последовательность (x_n) из $\text{Im}(\Gamma - e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b, a))$, сходящаяся к элементу x . Поскольку $\mathcal{B}x_n \in \text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$ для любого натурального n (см. лемму 3, то $f_n = (g + \mathcal{B}x_n) \in \text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$. Последовательность функций (f_n) сходится к функции f . Следовательно, пространство $\text{Im}(\mathcal{L}_\Gamma - \lambda I)$ плотно в $\mathcal{F}$. Равенство (3.19) доказано.

Равенство (3.20) следует из теоремы 14 и того факта, что множества $\sigma_d(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, $\sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$, $\sigma_r(\Gamma, \mathcal{U}(b, a))$ попарно не пересекаются и

$$\sigma(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) = \sigma_d(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) \cup \sigma_c(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)) \cup \sigma_r(\Gamma, \mathcal{U}(b, a)).$$

ЛЕММА 6. Для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ имеет место следующее свойство:

$$\gamma(\mathcal{L}_\Gamma) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\Gamma - \mathcal{U}(b, a)) > 0. \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теоремы 3, для доказательства утверждения достаточно показать, что отношение $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$ ограничено тогда и только тогда, когда ограниченным является отношение $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$.

Пусть ограниченным является отношение $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$. Покажем, что ограниченным является отношение $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$. Из определения оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ следует, что для любой функции x из $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f$, где $f \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$, справедливо равенство

$$x(t) = \mathcal{U}(t, a)x_0 + \int_a^t \mathcal{U}(t, s)f(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (3.22)$$

где x_0 – некоторый элемент из $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{C}f$. Из последнего равенства в силу ограниченности отношения $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$, ограниченности оператора $\mathcal{C}$ и оценки $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M$ (см. доказательство леммы 1) следует ограниченность отношения $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$.

Пусть отношение $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$ не ограничено. Покажем, что неограниченным является отношение $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$. Отметим, что так как $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M$ для любой пары (t, s) из Δ , то в силу обратимости оператора $\mathcal{U}(t, s)$ при любых $(t, s) \in \Delta$, получим оценку $\|\mathcal{U}(t, s)\| \geq 1/M$. Из этой оценки и равенства (3.22) следует, что для любой функции x из $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}f$, где $f \in \text{Im } \mathcal{L}_\Gamma$, $\|f\| < 1$, выполняется неравенство

$$\|x\| \geq \frac{1}{M}\|x(a)\| - M_1,$$

где $M_1 = M(b-a)^{1/p}(b-a+1)$ для $\mathcal{F} = L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, и $M_1 = M(b-a)$, для $\mathcal{F} \in \{L_\infty[a, b], C[a, b]\}$. Так как $x(a) \in (\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}\mathcal{C}f$, то из последнего неравенства в силу неограниченности отношения $(\Gamma - \mathcal{U}(b, a))^{-1}$ следует неограниченность отношения $\mathcal{L}_\Gamma^{-1}$. Теорема доказана.

Из полученных в этом пункте лемм и теорем следует

ТЕОРЕМА 17. *Если для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$ выполнено одно из приведенных в определении 1 десяти свойств, то соответствующим свойством обладает отношение $\Gamma - \mathcal{W}(b, a)$. Любое из десяти свойств определения 1, выполненное для отношения $\Gamma - \mathcal{W}(b, a)$, исключая, быть может, первое и пятое свойства, выполнено и для оператора $\mathcal{L}_\Gamma$.*

4. Случай упорядоченной пары линейных операторов. Пусть (A, B) – упорядоченная пара линейных операторов, где A, B из $\text{End } X$. Рассмотрим краевые условия, заданные следующими линейными отношениями:

$$\Gamma_1 = \{(Ax, Bx), x \in X\} = BA^{-1}, \quad (4.1)$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in X \times X : Ax = By\} = B^{-1}A. \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 18. *Если для упорядоченной пары $(B, \mathcal{W}(b, a)A)$ резольвентное множество непусто, то для оператора $\mathcal{L}_{\Gamma_1}$ выполняется равенство*

$$\sigma(\mathcal{L}_{\Gamma_1}) = \{\lambda \in \mathbb{K} : e^{\lambda(b-a)} \in \sigma(B, \mathcal{W}(b, a)A)\}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 14 следует, что нам достаточно показать, что отношение $\Gamma_1 - \lambda \mathcal{W}(b, a)$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является оператор $B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A$. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$(BA^{-1} - \lambda \mathcal{W}(b, a))^{-1} = ((B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A)A^{-1})^{-1} = A(B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A)^{-1}.$$

В силу непрерывной обратимости $\mathcal{W}(b, a)$ отношение $A(B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A)^{-1}$ принадлежит $\text{End } X$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{W}(b, a)A(B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A)^{-1} \in \text{End } X.$$

Из теоремы 4 и равенства (2.4) следует, что принадлежность отношения

$$\mathcal{W}(b, a)A(B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A)^{-1}$$

к $\text{End } X$ равносильна непрерывной обратимости оператора $(B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A)$. Таким образом, мы показали, что отношение $\Gamma_1 - \lambda \mathcal{W}(b, a)$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является оператор $B - \lambda \mathcal{W}(b, a)A$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 19. *Если для упорядоченной пары $(A, B\mathcal{W}(b, a))$ резольвентное множество непусто, то для оператора $\mathcal{L}_{\Gamma_2}$ выполняется равенство*

$$\sigma(\mathcal{L}_{\Gamma_2}) = \{\lambda \in \mathbb{K} : e^{\lambda(b-a)} \in \sigma(A, B\mathcal{W}(b, a))\}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 14 следует, что нам достаточно показать, что отношение $\Gamma_2 - \lambda \mathcal{W}(b, a)$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является оператор $A - \lambda B\mathcal{W}(b, a)$. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$(B^{-1}A - \lambda \mathcal{W}(b, a))^{-1} = (B^{-1}(A - \lambda B\mathcal{W}(b, a)))^{-1} = (A - \lambda B\mathcal{W}(b, a))^{-1}B.$$

В силу непрерывной обратимости $\mathcal{W}(b, a)$ отношение $(A - \lambda B\mathcal{W}(b, a))^{-1}B$ принадлежит $\text{End } X$ тогда и только тогда, когда

$$(A - \lambda B\mathcal{W}(b, a))^{-1}B\mathcal{W}(b, a) \in \text{End } X.$$

Из теоремы 4 и равенства (2.3) следует, что принадлежность отношения

$$(A - \lambda B\mathcal{W}(b, a))^{-1}B\mathcal{W}(b, a)$$

к $\text{End } X$ равносильна непрерывной обратимости оператора $(A - \lambda B\mathcal{W}(b, a))$. Таким образом, мы показали, что отношение $\Gamma_2 - \lambda\mathcal{W}(b, a)$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является оператор $A - \lambda B\mathcal{W}(b, a)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 20. Резольвента $R(\cdot, \mathcal{L}_{\Gamma_1}): \rho(\mathcal{L}_{\Gamma_1}) \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$ оператора $\mathcal{L}_{\Gamma_1}$ имеет вид

$$(R(\lambda, \mathcal{L}_{\Gamma_1})f)(s) = \int_a^b G(\lambda, t, s)f(s) ds$$

для любой функции f из $\mathcal{F}$. Функция $G(t, s)$ задается формулой

$$G(\lambda, t, s) = \begin{cases} e^{\lambda(t-s)}[\mathcal{W}(t, a)D_\lambda\mathcal{W}(b, s) + \mathcal{W}(t, s)], & s \leq t, \\ e^{\lambda(t-s)}\mathcal{W}(t, a)D_\lambda\mathcal{W}(b, s), & s > t, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $D_\lambda = A(e^{\lambda(a-b)}B - \mathcal{W}(b, a)A)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы 15 и равенства

$$(\lambda\Gamma_1 - \mathcal{W}(b, a))^{-1} = A(\lambda B - \mathcal{W}(b, a)A)^{-1},$$

которое выполняется для всех $\lambda \neq 0$.

ТЕОРЕМА 21. Резольвента $R(\cdot, \mathcal{L}_{\Gamma_2}): \rho(\mathcal{L}_{\Gamma_2}) \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$ оператора $\mathcal{L}_{\Gamma_2}$ имеет вид

$$(R(\lambda, \mathcal{L}_{\Gamma_2})f)(s) = \int_a^b G(\lambda, t, s)f(s) ds$$

для любой функции f из $\mathcal{F}$. Функция $G(t, s)$ задается формулой

$$G(\lambda, t, s) = \begin{cases} e^{\lambda(t-s)}[\mathcal{W}(t, a)D_\lambda\mathcal{W}(b, s) + \mathcal{W}(t, s)], & s \leq t, \\ e^{\lambda(t-s)}\mathcal{W}(t, a)D_\lambda\mathcal{W}(b, s), & s > t, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $D_\lambda = (e^{\lambda(a-b)}A - B\mathcal{W}(b, a))^{-1}B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы 15 и равенства

$$(\lambda\Gamma_2 - \mathcal{W}(b, a))^{-1} = (\lambda A - B\mathcal{W}(b, a))^{-1}B,$$

которое выполняется для всех $\lambda \neq 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968.
- [2] R. Cross, *Multivalued Linear Operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [3] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68.
- [4] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42.
- [5] В. Б. Диденко, “К спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов на конечномерных пространствах”, *Вестник Воронежск. гос. ун-та. Сер. физ.-матем.*, 2007, № 2, 104–107.
- [6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. т. 1: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [7] С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, Современная математика – студентам и аспирантам, Изд-во Ин-та матем., Новосибирск, 1995.

В. Б. Диденко

Воронежский государственный университет

E-mail: _dor_@mail.ru

Поступило

13.01.2009