Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Талалян, О единственности и интегрируемости кратных тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 761–775

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:51:13

О единственности и интегрируемости кратных тригонометрических рядов

А. А. Талалян

При минимальных условиях на коэффициенты доказываются теоремы единственности кратных тригонометрических рядов, в которых вместо поточечной сходимости рассматривается сходимость интегральных средних сферических, кубических и ряда других частичных сумм. Получены также достаточные условия интегрируемости кратных тригонометрических рядов, т.е. условий, при выполнении которых эти ряды являются рядами Фурье.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Рассматриваются ряды

$$\sum_n c_n e^{2\pi i n \cdot x}, \quad (1.1)$$

где $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ – вектор с целочисленными координатами, d_m – m -мерное пространство, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in d_m$, $n \cdot x = \sum_{j=1}^m x_j n_j$, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, $c_n = \overline{c_{-n}}$, $c_0 = c_{(0, \dots, 0)}$, $\mathbb{T}_m = [0, 1)^m$ – m -мерный единичный куб.

Рассматриваются также множества $\{Q(R), R > 0\}$ областей $Q(R) \subset d_m$, обладающих свойствами

$$\begin{aligned} 0 \in Q(R), \quad Q(R_1) \subset Q(R_2) \quad \text{при} \quad R_1 < R_2, \\ \bigcup_R Q(R) = d_m, \quad -n \in Q(R), \quad \text{если} \quad n \in Q(R). \end{aligned} \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд (1.1) называется *суммируемым методом* $\{Q(R), R > 0\}$ на множестве $E \subset \mathbb{T}_m$, если для всех $x \in E$ существует конечный предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S(Q(R), x), \quad (1.3)$$

где

$$S(Q(R), x) = \sum_{n \in Q(R)} c_n e^{2\pi i n \cdot x}. \quad (1.4)$$

В одномерном случае, когда $m = 1$, суммы $S(Q(R), x)$ являются обычными частными суммами ряда (1.1). Когда $m \geq 2$ и область $Q(R)$ – m -мерный шар радиуса R с центром 0, указанный метод суммирования называется *сферическим суммированием*.

Проблема единственности всюду сферически суммируемых тригонометрических рядов была решена Бургейном в 1996 г. [1]

ТЕОРЕМА (Бургейн). *Если*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S(Q(R), x) = 0 \quad (1.5)$$

для всех x , где $Q(R)$ – шар радиуса R с центром $0 = (0, \dots, 0)$, а $S(Q(R), x)$ определено равенством (1.4), то $c_n = 0$ для всех n .

В 2000 г. теорема Бургейна была обобщена в работе [2], где было доказано, что если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S(Q(R), x) = f(x) \quad \text{для всех } x, \quad (1.6)$$

где $f(x)$ – конечная интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ периодическая функция, а $S(Q(R), x)$ – сферические частичные суммы ряда (1.1), то этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

Оказалось, что в отличие от одномерного случая, когда из сходимости ряда (1.1) во всех точках (или в точках множества положительной меры) следует стремление к нулю коэффициентов ряда, в случае $m \geq 2$ коэффициенты всюду сферически суммируемых рядов должны удовлетворять более сильному требованию. В 1976 г. Коннесом [3] была доказана теорема, которая является важным этапом в получении теоремы Бургейна.

ТЕОРЕМА (Коннес). *Если m -кратный тригонометрический ряд (1.1) сферически суммируется на каком нибудь шаре B , $B \subset \mathbb{T}_m$, или на множестве $E \subset \mathbb{T}_m$ полной меры и второй категории, то*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\|n\|=R} |c_n|^2 = 0.$$

Отметим, что для суммирования по кубам, когда $Q(R) = [-R, R]^m$, $R > 0$, вопрос о единственности суммируемых этим методом кратных тригонометрических рядов не решен даже в случае $m = 2$ (см. [4]). В работе [4] исследованы некоторые вопросы единственности кратных тригонометрических рядов, когда $\{Q(R), R > 0\}$ прямоугольники и ряды суммируются многомерным методом суммирования Римана. Там же приведен обзор полученных в этом направлении результатов. При более сильном требовании, когда от ряда (1.1) требуется сходимость по Принсгейму, полное решение вопроса единственности содержится в работах [5], [6].

Во всех указанных работах исследование проблемы сводится к исследованию функции Римана, т.е. функции, являющейся суммой ряда, полученного двукратным интегрированием ряда (1.1).

В работах [7]–[10] получены теоремы единственности, сформулированные в терминах свойств производных чисел относительно случайных сетей суммы ряда, полученного однократным интегрированием ряда (1.1).

Сформулированные ниже теоремы получаются использованием этих теорем, а также известных свойств производных чисел аддитивных функций сегментов относительно бинарных сетей.

Рассматриваются ряды (1.1), коэффициенты которых удовлетворяют одному из следующих двух условий:

А) $|c_n| < M$ для всех n и

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n_j \rightarrow \infty} c_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j, \dots, n_m} = 0$$

для всех j , $1 \leq j \leq m$ и фиксированных n_ν , $\nu \neq j$;

В) $|c_n| < M$ для всех n и

$$\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad \|n\| = \min\{|n_j|, 1 \leq j \leq m\}.$$

Отметим, что коэффициенты рядов Фурье удовлетворяют обоим условиям А) и В).

Рассматривается бинарная сеть m -мерных кубов $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$, определяемых следующим образом: $k(\nu)$ – m -мерный вектор с координатами 2^ν , $\nu \geq 0$, т.е.

$$k(\nu) = (2^\nu, \dots, 2^\nu), \quad p(\nu) = (p_1(\nu), \dots, p_m(\nu)), \quad (1.7)$$

$$1 \leq p_j(\nu) \leq 2^\nu, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} = \Delta_{k(\nu)}^{p_1(\nu)} \times \dots \times \Delta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} \times \dots \times \Delta_{k(\nu)}^{p_m(\nu)}, \quad (1.8)$$

$$\Delta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} = \left[\frac{p_j(\nu) - 1}{2^\nu}, \frac{p_j(\nu)}{2^\nu} \right) \quad \text{для всех } \nu, j \leq m. \quad (1.9)$$

Через $|\Delta|$ обозначаем меру сегмента Δ . Имеем

$$|\Delta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)}| = \frac{1}{2^\nu}, \quad |\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}| = \frac{1}{2^{m\nu}}.$$

Обозначим

$$\sigma_\nu(Q(R), x, t) = \frac{\int_{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}} S(Q(R), x + t) dx}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|}, \quad x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}, \quad (1.10)$$

где $\{Q(R), R > 0\}$ – метод суммирования с условием (1.2).

Интервалы $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$ попарно не пересекаются, $\bigcup \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} = \mathbb{T}_m$, функция $\sigma_\nu(Q(R), x, t)$ для каждого фиксированного t определена для всех $x \in \mathbb{T}_m$. Она принимает зависящее от t постоянное значение на каждом интервале $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$, равное правой части (1.10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что m -кратный тригонометрический ряд (1.1) имеет интегрируемую конечную нижнюю мажоранту, если для некоторого метода суммирования $\{Q(R), R > 0\}$

$$S(Q(R_j), x) \geq \varphi(x) \quad \text{для всех } x, j \quad (1.11)$$

для некоторой последовательности $R_j \uparrow +\infty$, где $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ – конечная периодическая по всем переменным с периодом 1 функция, интегрируемая на $\mathbb{T}_m$.

Верны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – любой метод суммирования (1.2). Тогда существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1) удовлетворяет условию А) и для некоторой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$ для всех ν , и для некоторой интегрируемой на $\mathbb{T}_m$ периодической функции $f(x)$ выполняются условия

1°) для некоторого множества $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, $t \in T$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) = f(x + t) \quad (1.12)$$

для почти всех $x \in \mathbb{T}_m$;

2°.

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |\sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| < +\infty \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}_m \setminus E_t, \quad (1.13)$$

где E_t – конечное или счетное множество гиперплоскостей, каждая из которых перпендикулярна к некоторой координатной оси, то ряд (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.

Аналогичное утверждение верно и для рядов, удовлетворяющих условию В), с той разницей, что множество E_t счетного числа гиперплоскостей надо заменить счетным множеством точек. В этом случае верно более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – любой метод суммирования (1.2). Существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1) удовлетворяет условию В) и для некоторой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$ для всех ν , и интегрируемой на $\mathbb{T}_m$ периодической конечной функции $f(x)$ условие

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) \leq f(x + t) \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) \quad (1.14)$$

выполняется для всех $x \in \mathbb{T}_m$, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек E_t , и для каждого t , принадлежащего некоторому множеству $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, то этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – любой метод суммирования (1.2). Существует последовательность $\{R_\nu\}$, $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1), удовлетворяющий условию А), имеет интегрируемую нижнюю мажоранту и для некоторой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$ для почти всех t , $t \in T$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |\sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| < +\infty, \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}_m \setminus E_t, \quad (1.15)$$

где E_t – не более чем счетное множество перпендикулярных к координатным осям гиперплоскостей, то ряд (1.1) является рядом Фурье интегрируемой функции.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – любой метод суммирования (1.2). Существует последовательность $\{R_\nu\}$, $R_\nu \uparrow +\infty$, такая, что если ряд (1.1), удовлетворяющий условию В), имеет интегрируемую нижнюю мажоранту и для некоторой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$ для почти всех t , $t \in T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |\sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| < +\infty \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}_m \setminus E_t, \quad (1.16)$$

где E_t – конечное или счетное множество точек, то ряд (1.1) является рядом Фурье интегрируемой функции.

В теоремах 1 и 2 выбор последовательности $\{R_\nu\}$ зависит от кратности m рядов (1.1).

В случаях, когда область $Q(R)$ – шар с радиусом R и центром 0, или куб с центром 0 и стороной, равной R , в пространствах любой размерности m в аналогичных теоремах выбор последовательности $\{R_\nu\}$ не зависит от размерности m .

Сформулируем эти теоремы для сферического суммирования.

ТЕОРЕМА 5. *Существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1) некоторой кратности m удовлетворяет условию А) и для некоторой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$, для почти всех t , $t \in T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, выполняются условия*

1°) для почти всех x

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) = f(x + t), \quad (1.17)$$

где $Q(R'_\nu) = \{x = (x_1, \dots, x_m) : \|x\| \leq R'_\nu\}$, а $f(x)$ – суммируемая периодическая функция;

2°) для всех $x \in \mathbb{T}_m \setminus E_t$

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |\sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| < +\infty, \quad (1.18)$$

где E_t – конечное или счетное множество ортогональных к координатным осям гиперплоскостей,

то этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

ТЕОРЕМА 6. *Существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1) некоторой кратности m удовлетворяет условию В) и для некоторой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$, для почти всех t , $t \in T$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, выполняется условие*

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) \leq f(x + t) \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) \quad (1.19)$$

для всех $x \in \mathbb{T}_m$, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек, где $f(x)$ – конечная интегрируемая функция и

$$Q(R'_\nu) = \{x : \|x\| \leq R'_\nu\},$$

то этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

2. Доказательство теорем. Рассматривается сумма $F(x)$ ряда, полученного интегрированием по всем переменным ряда (1.1)

$$F(x) = c + c_0 \prod_{j=1}^m x_j + \sum_B \left(\prod_{j \in B} x_j \right) \cdot \sum_{n(B)} \frac{c_n(B) e^{2\pi i n \cdot x}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} + \sum'_n \frac{c_n e^{2\pi i n \cdot x}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j}, \quad (2.1)$$

где $B \subset \{1, 2, \dots, m\}$ – непустые множества, $n(B)$ – векторы $(n_1, \dots, n_m)$, у которых $n_j = 0$ при $j \in B$ и $n_j \neq 0$ при $j \notin B$, $c_0 = c_{(0, \dots, 0)}$, c – постоянная, $\sum'$ означает, что в этой сумме все координаты вектора n отличны от нуля.

Из ограниченности коэффициентов ряда (1.1), в частности, из выполнения условия А) или условия В), следует сходимость в метрике $L_2(\mathbb{T}_m)$ ряда (2.1). Поэтому $F(x)$ определена почти всюду.

В работах [7]–[10] рассматривались последовательности разбиения куба $\mathbb{T}_m$ на m -мерные интервалы $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$, определяемые следующим образом: $k(\nu) = (k_1(\nu), \dots, k_m(\nu))$, $k_j(\nu)$ – натуральные числа, $k_j(\nu) \uparrow +\infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$ для всех j , $1 \leq j \leq m$, $1 \leq p_j(\nu) \leq 2^{k_j(\nu)}$,

$$\Delta_{k_j(\nu)}^{p_j(\nu)} = \left[\frac{p_j(\nu) - 1}{2^{k_j(\nu)}}, \frac{p_j(\nu)}{2^{k_j(\nu)}} \right), \quad (2.2)$$

$$\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} = \Delta_{k_1(\nu)}^{p_1(\nu)} \times \dots \times \Delta_{k_j(\nu)}^{p_j(\nu)} \times \dots \times \Delta_{k_m(\nu)}^{p_m(\nu)}.$$

Меры Лебега этих интервалов обозначаются через

$$|\Delta_{k_j(\nu)}^{p_j(\nu)}| = \frac{1}{2^{k_j(\nu)}}, \quad |\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}| = \prod_{j=1}^m |\Delta_{k_j(\nu)}^{p_j(\nu)}| = \frac{1}{2^{k_1(\nu)+\dots+k_m(\nu)}}.$$

Легко видеть, что для некоторого множества T_0 полной меры, $T_0 \subset \mathbb{T}_m$, $|T_0| = |\mathbb{T}_m|$, функция $F_t(x) = F(x+t)$ при $t \in T_0$ определена для всех двоично-рациональных $x \in \mathbb{T}_m$. Поэтому смешанные разности $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} F_t(x)$ по переменной x

$$\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} F_t(x) = \Delta_{k_1(\nu)}^{p_1(\nu)} \cdots \Delta_{k_m(\nu)}^{p_m(\nu)} F_t(x),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{k_m(\nu)}^{p_m(\nu)} F_t(x) &= F\left(x_1 + t_1, \dots, x_{m-1} + t_{m-1}, \frac{p_m(\nu)}{2^{k_m(\nu)}} + t\right) \\ &\quad - F\left(x_1 + t_1, \dots, x_{m-1} + t_{m-1}, \frac{p_m(\nu) - 1}{2^{k_m(\nu)}} + t\right), \end{aligned}$$

определены для всех $t \in T_0$.

Обозначим

$$\Phi_{k(\nu)}(x, t) = \frac{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} F_t(x)}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|}, \quad x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}. \quad (2.3)$$

Общая точка вложенных интервалов $\Delta_{k(1)}^{p(1)} \supset \cdots \supset \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} \supset \cdots$ обозначается через $x(\Delta_{k(\nu)})$. Заметим, что если $x \in \mathbb{T}_m$ — двоично-иррациональная точка, то она является общей точкой только одной последовательности вложенных интервалов, а в остальных случаях им будут соответствовать разные последовательности вложенных интервалов, число которых ограничено. Будем пользоваться следующими теоремами (см. [8; с. 125, теорема 2.4] и [10; с. 109, теорема 3]).

ТЕОРЕМА I. Пусть тригонометрический ряд (1.1) удовлетворяет условию А) и $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ — интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ периодическая с периодом 1 по каждой переменной функция. Если для почти всех t , $t \in T_0$, $T_0 \subset \mathbb{T}_m$, $|T_0| = |\mathbb{T}_m|$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_{k(\nu)}(x, t) = f(x+t)$$

по мере на $\mathbb{T}_m$ относительно переменной x и

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_{k(\nu)}(x, t)| < +\infty \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}_m \setminus E_t,$$

где E_t — зависящее от t множество, состоящее из не более чем счетного множества перпендикулярных к координатным осям гиперплоскостей, то этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.¹

Аналогичная теорема для рядов, удовлетворяющих условию В), была доказана в работе [7; с. 624, теорема 1]. Более сильная теорема работы [9] формулируется следующим образом.

¹В [8] в формулировке теоремы 2.4 на с. 125 имеется опечатка. В условии (2.108) вместо $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_{k(\nu)}(x, t)| < +\infty$ должно быть $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_{k(\nu)}(x, t)| < +\infty$.

ТЕОРЕМА II. Пусть коэффициенты тригонометрического ряда (1.1) удовлетворяют условию В), и пусть для некоторой всюду конечной суммируемой на $\mathbb{T}_m$ и продолженной периодически на все m -мерное пространство функции $f(x)$ при почти всех t , при которых определена функция $\Phi_\nu(x, t)$ неравенство

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) \leq f_t(x(\{\Delta_{k(\nu)}\})) \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t), \quad f_t(x) = f(x+t),$$

выполнено для всех последовательностей вложенных интервалов $\{\Delta_{k(\nu)}\}$, кроме, быть может, последовательностей, стягивающихся к точкам некоторого счетного множества E_t . Тогда этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

В доказательствах теорем 1–6 применяется частный случай теорем I и II, когда $\{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}\}$ – бинарная сеть, определенная условиями (1.7)–(1.9).

Из (2.1), (2.3) и (1.10), как легко видеть, следует, что для бинарной сети (1.7) выполняются равенства

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x, t) = c_0 + \sum_B 2^{\nu(m-|B|)} \sum_{n(B)} c_{n(B)} \prod_{j \notin B} \frac{\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} e^{2\pi i n_j \cdot t_j}}{2\pi i n_j} \\ + 2^{m\nu} \sum'_n c_{n(B)} \prod_{j=1}^m \frac{\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} e^{2\pi i n_j \cdot t_j}}{2\pi i n_j} \quad \text{для всех } x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(Q(R), x, t) = c_0 + \sum_B 2^{\nu(m-|B|)} \sum_{n(B) \in Q(R)} c_{n(B)} \prod_{j \notin B} \frac{\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} e^{2\pi i n_j \cdot t_j}}{2\pi i n_j} \\ + 2^{m\nu} \sum'_{n \in Q(R)} c_n \prod_{j=1}^m \frac{\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} e^{2\pi i n_j \cdot t_j}}{2\pi i n_j} \quad \text{для всех } x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

для почти всех t , $t \in T_0$, $T_0 \subset \mathbb{T}_m$, $|T_0| = |\mathbb{T}_m|$, где $|B|$ – количество элементов множества B и

$$\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} = e^{2\pi i n_j \cdot p_j(\nu)/2^\nu} - e^{2\pi i n_j \cdot p_j(\nu)-1/2^\nu}, \quad |\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)}| \leq 2, \quad (2.6)$$

а T_0 – множество тех t , для которых определены смешанные разности $\Delta F_t(x) = \Delta F(x+t)$ по переменной x относительно m -мерных интервалов с двоично-рациональными вершинами.

Из (2.4) и (2.5) следует

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R), x, t) = \sum_B 2^{\nu(m-|B|)} \sum_{n(B) \notin Q(R)} c_{n(B)} \prod_{j \notin B} \frac{\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} e^{2\pi i n_j \cdot t_j}}{2\pi i n_j} \\ + 2^{m\nu} \sum'_{n \notin Q(R)} c_n \prod_{j=1}^m \frac{\beta_{k(\nu)}^{p_j(\nu)} e^{2\pi i n_j \cdot t_j}}{2\pi i n_j}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ЛЕММА 1. Для любого фиксированного m и для любого метода суммирования $\{Q(R), R > 0\}$ существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ при $\nu \rightarrow \infty$ такая, что для любого m -кратного ряда (1.1) с ограниченными коэффициентами c_n , $|c_n| \leq M$

для всех n и для любой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$, выполняется равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| = 0 \quad (2.8)$$

равномерно на $\mathbb{T}_m$ относительно переменной x для всех фиксированных t , принадлежащих некоторому множеству T полной меры, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$.

Здесь множество T зависит от выбора ряда (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|c_n| < M$ для всех n и T_0 – то множество полной меры, для которого при $t \in T_0$ функции $\Phi_\nu(x, t)$ определены. Из (2.6) и (2.7) следует

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}_m} |\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R), x, t)|^2 dt \\ & \leq M^2 \left[2^{2m\nu} \left(\sum_B \sum_{n(B) \notin Q(R)} \prod_{j \notin B} \frac{1}{n_j^2} + \sum'_{n \notin Q(R)} \prod_{j=1}^m \frac{1}{n_j^2} \right) \right] \quad \text{для всех } x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функция $\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R), x, t)$ постоянна при $x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$ и для фиксированного $t \in T_0$. Выражение в круглых скобках правой части неравенства (2.9), как легко видеть, стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Это легко проверяется для кубического суммирования, из чего немедленно вытекает справедливость утверждения для всех методов $\{Q(R), R > 0\}$. Пусть

$$\varepsilon_\nu > 0 \quad \text{для всех } \nu, \quad \sum \varepsilon_\nu < +\infty. \quad (2.10)$$

Из неравенства (2.9) следует, что существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если $R > R_\nu$, то

$$|\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R), x, t)| < \varepsilon_\nu, \quad x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}, \quad t \in E(R, \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}), \quad (2.11)$$

для всех $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$, где

$$E(R, \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}) \subset \mathbb{T}_m, \quad |E(R, \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)})| > |\mathbb{T}_m| - \frac{\varepsilon_\nu}{2^{m\nu}}. \quad (2.12)$$

Число попарно не пересекающихся интервалов $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$ равно $2^{m\nu}$ и $\bigcup \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} = \mathbb{T}_m$. Поэтому, обозначив

$$E_\nu(R) = \bigcap E(R, \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}), \quad (2.13)$$

в силу (2.12) будем иметь

$$|E_\nu(R)| > |\mathbb{T}_m| - \varepsilon_\nu \quad \text{для всех } R > R_\nu. \quad (2.14)$$

Из (2.11) и (2.12) следует

$$|\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R), x, t)| < \varepsilon_\nu, \quad x \in \mathbb{T}_m, \quad t \in E_\nu(R), \quad R > R_\nu. \quad (2.15)$$

Итак, для фиксированного M существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что условия (2.14) и (2.15) выполняются для всех рядов (1.1) с коэффициентами $|c_n| < M$ для всех n и $R > R_\nu$. Если $R'_\nu \geq R_\nu$ для всех ν , из (2.14) и (2.15) следует

$$|\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| < \varepsilon_\nu, \quad x \in \mathbb{T}_m, \quad t \in E_\nu(R'_\nu), \quad (2.16)$$

$$E_\nu(R'_\nu) \subset \mathbb{T}_m, \quad |E_\nu(R'_\nu)| > |\mathbb{T}_m| - \varepsilon_\nu. \quad (2.17)$$

Полагая

$$T = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=N}^{\infty} E_\nu(R'_\nu), \quad (2.18)$$

согласно (2.10) и (2.17) имеем $|T| = |\mathbb{T}_m|$.

Из (2.18) и (2.16) следует, что если $t \in T$, то для некоторого N

$$|\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| < \varepsilon_\nu, \quad x \in \mathbb{T}_m, \quad \nu \geq N. \quad (2.19)$$

Итак, существует $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если $R'_\nu \geq R_\nu$, то для любого ряда (1.1) с коэффициентами $|c_n| \leq M$ выполняется равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)| = 0 \quad (2.20)$$

равномерно на $\mathbb{T}_m$ относительно переменного $x \in \mathbb{T}_m$ для всех t , принадлежащих некоторому множеству T , $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$.

Пусть $M_k > 0$, $M_k \uparrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Существует последовательность $R_{1\nu} \uparrow +\infty$ при $\nu \rightarrow \infty$ такая, что если $R'_{1\nu} \geq R_{1\nu}$ и коэффициенты c_n ряда (1.1) удовлетворяют условию $|c_n| \leq M_1$, то

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_{1\nu}), x, t)| = 0 \quad (2.21)$$

равномерно на $\mathbb{T}_m$ относительно переменной $x \in \mathbb{T}_m$ для всех $t \in T$, где $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$.

Рассматривая метод суммирования $\{Q(R_{1\nu}), \nu = 1, 2, \dots\}$, можно выбрать последовательность $\{R_{2\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \{R_{1\nu}\}$ такую, что если $R'_{2\nu} \geq R_{2\nu}$, то для любого ряда (1.1) с коэффициентами $|c_n| \leq M_2$ выполняется равенство (2.21), где вместо $\{R'_{1\nu}\}$ берется $\{R'_{2\nu}\}$. Итак, можно определить последовательности $\{R_{k\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $R_{k\nu} \uparrow +\infty$ при $\nu \rightarrow \infty$,

$$\{R_{1\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \supset \{R_{2\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \supset \dots \supset \{R_{k\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \supset \dots \quad (2.22)$$

и, если $R'_{k\nu} \geq R_{k\nu}$, то для любого ряда (1.1) с коэффициентами $|c_n| \leq M_k$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_{k\nu}), x, t)| = 0 \quad (2.23)$$

равномерно на $\mathbb{T}_m$ относительно $x \in \mathbb{T}_m$ для всех $t \in T$, где $T \subset \mathbb{T}_m$ – некоторое множество полной меры.

Из (2.22) и (2.23) следует, что последовательность $R_\nu = R_{\nu\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, удовлетворяет требованиям леммы. Лемма 1 доказана.

В случае, когда $\{Q(R), R > 0\}$ – сферический или кубический метод суммирования, верна следующая

ЛЕММА 2. *Существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если $R'_\nu \geq R_\nu$ для всех ν , то для любого m , если ряд (1.1) имеет ограниченные коэффициенты, то*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t)) = 0 \quad (2.24)$$

равномерно на $\mathbb{T}_m$ относительно $x \in \mathbb{T}_m$ для всех $t \in T$, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, где $Q(R'_\nu)$ – шар радиуса R'_ν (или куб со стороной R'_ν) в m -мерном пространстве с центром в начале координат.

Эта лемма доказывается применением диагонального метода и леммы 1. Существуют последовательности $\{R_{k\nu}\}_{\nu=1}^\infty$, $R_{k\nu} \uparrow +\infty$ при $\nu \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\{R_{k\nu}\}_{\nu=1}^\infty \subset \{R_{k-1,\nu}\}_{\nu=1}^\infty \quad \text{для всех } k \geq 2, \quad (2.25)$$

такие, что если $R'_{k\nu} \geq R_{k\nu}$ и ряд (1.1) с ограниченными коэффициентами имеет кратность k , то

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\Phi_\nu(x, t) - \sigma_\nu(Q(R'_{k\nu}), x, t)| = 0 \quad (2.26)$$

равномерно на $\mathbb{T}_k$ относительно переменной $x \in \mathbb{T}_k$ для всех t , принадлежащих некоторому множеству T , $T \subset \mathbb{T}_k$, $|T| = |\mathbb{T}_k|$, где $Q(R'_{k\nu})$ – шар радиуса $R'_{k\nu}$ (или куб со стороной $R'_{k\nu}$) в k -мерном пространстве.

Из (2.25) и (2.26) следует, что последовательность $R_\nu = R_{\nu\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, удовлетворяет требованиям леммы 2.

ЛЕММА 3. *Если ряд (1.1) с ограниченными коэффициентами имеет интегрируемую конечную нижнюю мажоранту, то существует множество $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, такое, что для каждого $t \in T$*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) = f(x + t) \quad (2.27)$$

почти всюду на $\mathbb{T}_m$ относительно переменной $x \in \mathbb{T}_m$, где $f(x)$ – интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ периодическая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (1.11). Тогда для каждого m -мерного куба $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$ из бинарной сети (1.7)–(1.9) имеем для последовательности $R_j \uparrow +\infty$

$$\sigma_\nu(Q(R_j), x, t) = \frac{\int_{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}} S(Q(R_j), x + t) dx}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|} \geq \frac{\int_{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}} \varphi(x + t) dx}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|}, \quad x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}, \quad (2.28)$$

для всех t .

Из неравенства (2.9) легко следует (см. доказательство леммы 1), что для фиксированного интервала $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$ существует последовательность $\{R'_j\} \subset \{R_j\}$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_j), x, t) = \Phi_\nu(x, t), \quad \text{для всех } x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}, \quad (2.29)$$

и для всех $t \in T$, где $T \subset \mathbb{T}_m$ – некоторое множество полной меры. Так как множество интервалов $\{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}\}$ счетное, из (2.29) и (2.28) следует

$$\Phi_\nu(x, t) \geq \frac{\int_{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}} \varphi(x+t) dx}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|}, \quad x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} \quad (2.30)$$

для всех $\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$, и для всех t , принадлежащих некоторому множеству T , $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$.

Для каждого $t \in T$, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, смешанная разность $\Delta F_t(x) = \Delta F(x+t)$ по переменной x относительно m -мерного сегмента Δ из бинарной сети $\{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}\}$ является аддитивной функцией. На этой сети аддитивна также функция $\int_\Delta \varphi(x+t) dx$. Обозначим

$$\psi_\nu(x, t) = \frac{\int_{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}} \varphi(x+t) dx}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|}, \quad x \in \Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}. \quad (2.31)$$

Из (2.30) следует, что для всех $t \in T$

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)} F_t(x)}{|\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}|} \geq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x, t), \quad x \in \mathbb{T}_m. \quad (2.32)$$

Так как $\varphi(x)$ – интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ периодическая функция, почти для всех $x \in \mathbb{T}_m$ существует предел

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x, t) = \varphi(x+t) \quad (2.33)$$

для каждого $t \in T$.

Следовательно, согласно (2.32) при $t \in T$

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x, t) > -\infty \quad (2.34)$$

для почти всех $x \in \mathbb{T}_m$.

С другой стороны, для всех $t \in T$

$$0 \leq \Phi_\nu(x, t) - \psi_\nu(x, t) \quad \text{для всех } \nu, \quad x \in \mathbb{T}_m, \quad (2.35)$$

$$0 \leq \int_{\mathbb{T}_m} (\Phi_\nu(x, t) - \psi_\nu(x, t)) dx = \mathbb{T}_m F(x+t) - \int_{\mathbb{T}_m} \varphi(x+t) dx, \quad (2.36)$$

где смешанная разность $\mathbb{T}_m F(x+t)$ относительно куба $\mathbb{T}_m$ конечна для всех $t \in T$.

Из (2.34) и (2.36) следует

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) < +\infty \quad \text{п.в. при } x \in \mathbb{T}_m \quad (2.37)$$

для каждого $t \in T$, ибо в обратном случае имели бы для некоторого $t \in T$

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) = +\infty \quad \text{для всех } x \in E, \quad |E| > 0, \quad (2.38)$$

что противоречит условиям (2.33), (2.35) и (2.36).

По известной теореме Безиковича (см. [11; с. 277]) из (2.32), (2.34) и (2.37) следует, что аддитивная функция сегмента $\Delta F_t(x) = \Delta F(x+t)$ для каждого $t \in T$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, имеет конечную производную для почти всех $x \in \mathbb{T}_m$ относительно бинарной сети $\{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}\}$, т.е. существует конечный почти для всех $x \in \mathbb{T}_m$ предел

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) = f(x + t) \quad (2.39)$$

для каждого $t \in T$, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$. Следовательно,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\Phi_\nu(x, t) - \psi_\nu(x, t)) = f(x + t) - \varphi(x + t). \quad (2.40)$$

Из (2.36) и (2.40) по теореме Фату следует интегрируемость функции $f(x + t) - \varphi(x + t)$. Следовательно, $f(x + t)$ для каждого $t \in T$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, интегрируема на $\mathbb{T}_m$ по переменной $x \in \mathbb{T}_m$. Лемма 3 доказана.

Из лемм 1–3 следуют

ЛЕММА 4. Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – метод суммирования (1.2). Существует $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1) кратности m и с ограниченными коэффициентами имеет интегрируемую нижнюю мажоранту, то для любой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) = f(x + t)$$

для всех $t \in T$, где $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, а $f(x)$ – интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ периодическая функция.

ЛЕММА 5. Существует последовательность $R_\nu \uparrow +\infty$ такая, что если ряд (1.1) некоторой кратности m имеет ограниченные коэффициенты и интегрируемую нижнюю мажоранту, то для любой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) = f(x + t)$$

для почти всех $x \in \mathbb{T}_m$ и для каждого $t \in T$, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, где $Q(R'_\nu)$ – шар радиуса R'_ν или m -мерный куб со стороной R'_ν , а $f(x)$ – интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ периодическая функция.

Теоремы 1–6 немедленно следуют из лемм 1–4 и из частного случая теорем I и II, когда в их формулировках предполагается, что $\{\Delta_{k(\nu)}^{p(\nu)}\}$ – бинарная сеть, определенная условиями (1.7)–(1.9).

Действительно, если взять последовательность $\{R_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, удовлетворяющую условию леммы 1, то из условий (1.12) и (1.13) теоремы 1 и из условия (2.8) этой леммы следует, что функция $\Phi_\nu(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы I. Тогда согласно этой теореме ряд (1.1) будет рядом Фурье функции $f(x)$.

Аналогично, если $\{R_\nu\}$ удовлетворяет условию (2.8) леммы 1, то для почти всех t при $R'_\nu \geq R_\nu$ и для всех $x \in \mathbb{T}_m$

$$\begin{aligned} \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) &= \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t), \\ \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) &= \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t). \end{aligned}$$

Тогда ряд (1.1), удовлетворяющий условиям теоремы 2, будет удовлетворять также условиям теоремы II и, следовательно, этот ряд будет рядом Фурье функции $f(x)$.

Если взять в формулировке теоремы 5 последовательность $\{R_\nu\}$, удовлетворяющую условиям леммы 2, то из условия (2.24) этой леммы будет следовать, что функция $\Phi_\nu(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы II. Отсюда следует, что этот ряд будет рядом Фурье функции $f(x)$.

Точно так же проверяется справедливость теоремы 6. Для доказательства теорем 3 и 4 применяются леммы 1 и 3.

Если $\{R_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – последовательность, удовлетворяющая условиям леммы 1, и для нее выполнено (1.15), то из условия (2.8) этой леммы и из леммы 3 следует, что для некоторой интегрируемой функции $f(x)$ выполняются условия теоремы I. Тогда ряд (1.1) будет рядом Фурье функции $f(x)$.

Проверим справедливость теоремы 4. Возьмем в формулировке теоремы 4 в качестве $\{R_\nu\}$ последовательность, удовлетворяющую условию леммы 1. Тогда согласно лемме 3, если $R'_\nu \geq R_\nu$ для всех ν , то

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) = f(x + t) \quad (2.41)$$

для почти всех $x \in \mathbb{T}_m$ и для каждого $t \in T$, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, где $f(x)$ – интегрируемая на $\mathbb{T}_m$ конечная функция.

С другой стороны, из условия (2.8) леммы 1 следует

$$\begin{aligned} \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) &= \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t), \\ \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t) &= \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Из (2.41), (2.42) и из условия (1.16) теоремы 4 следует, что последовательность $\{\Phi_\nu(x, t)\}_{\nu=1}^\infty$ и функция $f(x + t)$ удовлетворяют условиям теоремы II. Следовательно, ряд (1.1) будет рядом Фурье функции $f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 3 и 4 можно рассматривать как признаки интегрируемости кратного тригонометрического ряда, т.е. они дают достаточные условия, при выполнении которых кратный тригонометрический ряд является рядом Фурье.

Предположим, что интегрируемая нижняя мажоранта $\varphi(x)$ обладает свойством

- для каждой точки $x_0 \notin E$, где E – не более чем счетное множество гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям, или не более чем счетное множество точек, существует окрестность $\delta(x_0) \ni x_0$ такая, что

$$\varphi(x) \geq M(x_0) \quad \text{для всех } x \in \delta(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{T}_m \setminus E, \quad (2.43)$$

где $M(x_0)$ – постоянная, зависящая от x_0 .

Если $\{R_\nu\}$, $R_\nu \uparrow +\infty$, – последовательность, удовлетворяющая лемме 1, то для любой последовательности $\{R'_\nu\}$, $R'_\nu \geq R_\nu$,

$$\begin{aligned} \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) &= \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t), \\ \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu(Q(R'_\nu), x, t) &= \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_\nu(x, t). \end{aligned} \quad (2.44)$$

для всех $x \in \mathbb{T}_m$ и для каждого фиксированного t , $t \in T$, $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$.

Согласно (2.31), (2.32) и (2.43) имеем

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \Phi_{\nu}(x, t) > -\infty \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}_m \setminus E \quad (2.45)$$

и согласно (2.44)

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{\nu}(Q(R'_{\nu}), x, t) > -\infty \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}_m \setminus E. \quad (2.46)$$

Поэтому верны следующие два признака интегрируемости кратных рядов.

а) Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – любой метод суммирования. Тогда существует последовательность $\{R_{\nu}\}$ такая, что если ряд (1.1) удовлетворяет условию А) и имеет мажоранту $\varphi(x)$, обладающую свойством (2.43), где E – счетное множество гиперплоскостей, и если для некоторой последовательности $\{R'_{\nu}\}$, $R'_{\nu} \geq R_{\nu}$

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{\nu}(Q(R'_{\nu}), x, t) < +\infty \quad (2.47)$$

для всех $x \in \mathbb{T}_m$, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества гиперплоскостей и для всех t , принадлежащих некоторому множеству $T \subset \mathbb{T}_m$, $|T| = |\mathbb{T}_m|$, то этот ряд является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $\mathbb{T}_m$ периодической функции $f(x)$.

б) Пусть $\{Q(R), R > 0\}$ – любой метод суммирования. Существует последовательность $\{R_{\nu}\}$, $R_{\nu} \uparrow +\infty$, такая, что если ряд (1.1) удовлетворяет условию В) и имеет мажоранту $\varphi(x)$, обладающую свойством (2.43), где E – не более чем счетное множество точек, и если для некоторой последовательности $\{R'_{\nu}\}$, $R'_{\nu} \geq R_{\nu}$,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{\nu}(Q(R'_{\nu}), x, t) < +\infty \quad (2.48)$$

для всех $x \in \mathbb{T}_m$, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек, то этот ряд является рядом Фурье.

Следующие более наглядные признаки интегрируемости немедленно следуют из вышеуказанных признаков.

с) Пусть коэффициенты ряда (1.1), имеющего интегрируемую мажоранту, обладают свойством А), и пусть для каждой точки $x_0 \in \mathbb{T}_m \setminus E$, где E – счетное множество ортогональных к координатным осям гиперплоскостей, существуют окрестность $\delta(x_0) \ni x_0$ и метод суммирования $\{Q(R), R > 0\}$ такие, что

$$\sup_R \max_{x \in \delta(x_0)} |S(Q(R), x)| < +\infty. \quad (2.49)$$

Тогда этот ряд является рядом Фурье.

д) Пусть коэффициенты ряда (1.1), имеющего интегрируемую мажоранту, обладают свойством В), и пусть для каждой точки $x_0 \in \mathbb{T}_m \setminus E$, где E – счетное множество точек, существуют окрестность $\delta(x_0) \ni x_0$ и метод суммирования $\{Q(R), R > 0\}$, удовлетворяющие условию (2.49). Тогда этот ряд является рядом Фурье.

Если мажоранта $\varphi(x)$ обладает свойством (2.43), в признаках с) и д) условие (2.49) можно заменить более слабым условием

$$\sup_R \max_{x \in \delta(x_0)} S(Q(R), x) < +\infty. \quad (2.50)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Bourgain, “Spherical summation and uniqueness of multiple trigonometric series”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1996, № 3, 93–107.
- [2] J. M. Ash, G. Wang, “Some spherical uniqueness theorems for multiple trigonometric series”, *Ann. of Math.* (2), **151**:1 (2000), 1–33.
- [3] B. Connes, “Sur les coefficients des séries trigonométriques convergentes sphériquement”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **283**:4 (1976), 159–161.
- [4] J. M. Ash, C. Freiling, D. Rinne, “Uniqueness of rectangularly convergent trigonometric series”, *Ann. of Math.* (2), **137**:1 (1993), 145–166.
- [5] Ш. Т. Тетунашвили, “О единственности кратных тригонометрических рядов”, *Матем. заметки*, **58**:4 (1995), 596–603.
- [6] Ш. Т. Тетунашвили, “О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1158–1176.
- [7] А. А. Талалян, “О некоторых свойствах единственности кратных тригонометрических рядов и гармонических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:3 (1988), 621–650.
- [8] А. А. Талалян, “О единственности кратных тригонометрических рядов”, *Матем. сб.*, **132**:1 (1987), 104–130.
- [9] А. А. Талалян, “О единственности двойных тригонометрических рядов”, *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **20**:6 (1985), 426–462.
- [10] В. А. Скворцов, А. А. Талалян, “Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 104–113.
- [11] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.

А. А. Талалян

Институт математики НАН Армении

E-mail: ggg@arminco.com

Поступило

14.01.2009

Исправленный вариант

18.04.2009