Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Медведев, Вложение произведений $Q(k) \times B(\tau)$
в абсолютные A -множества, *Матем. заметки*, 2011,
том 90, выпуск 3, 408–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:55:47

Вложение произведений $Q(k) \times B(\tau)$ в абсолютные A -множества

С. В. Медведев

В статье доказаны теоремы о вложении произведений $Q(k) \times B(\tau)$, $Q(k) \times \mathcal{N}$ и $Q(k) \times C$ в абсолютные A -множества в качестве замкнутых подмножеств. Эти результаты являются обобщением на несепарабельный случай теорем Сайнт Раймона, ван Милла и ван Энгелена о вложении в качестве замкнутых подмножеств в сепарабельные абсолютные борелевские множества произведений $Q \times \mathcal{N}$ и $Q \times C$, где Q – пространство рациональных чисел, C – канторово совершенное множество, $\mathcal{N}$ – пространство иррациональных чисел.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Все пространства, рассматриваемые в статье, предполагаются метрическими.

В классической теории множеств важную роль играют пространство рациональных чисел Q , канторово совершенное множество C и пространство иррациональных чисел $\mathcal{N}$, так как они обладают рядом замечательных свойств и “однородно” устроены: каждое непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству. Так, известно, что каждое σ -дискретное сепарабельное пространство гомеоморфно замкнутому подмножеству Q (свойство универсальности). Представляет большой интерес и решение обратной задачи: найти условия, при которых пространство X содержит замкнутую копию “хорошего” пространства (Q , C , $\mathcal{N}$ и т.д.). Например: каждое несчетное сепарабельное абсолютное A -множество содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное C (теорема Александрова). Внутренние характеристики пространств Q , C , $\mathcal{N}$ и $Q \times C$ были получены Брауэром, Серпинским, Александровым и Урысоном около ста лет назад. Сравнительно недавно Островский и ван Милл описали произведение $Q \times \mathcal{N}$. В 1928 г. Гуревич нашел условия о вложении пространств Q и $\mathcal{N}$ в сепарабельные абсолютные борелевские множества в качестве замкнутых подмножеств. Затем Сайнт Раймон [1], ван Милл и ван Энгелен [2] доказали аналогичные теоремы о вложении произведений $Q \times \mathcal{N}$ и $Q \times C$ в сепарабельные абсолютные борелевские множества. Немного позже задача о вложении одного абсолютного борелевского множества в другое в сепарабельном случае была решена в полном объеме (доказательство этого факта опирается на детерминированность борелевских множеств). Для несепарабельных пространств задача о вложении одного абсолютного борелевского множества в другое в настоящее время не решена.

Имеется несколько вариантов обобщения понятия A -множества на случай несепарабельных пространств. Мы используем классическое определение аналитического множества. Множество Y называется A -множеством в пространстве X , если

$$Y = \bigcup \left\{ \bigcap \{F(t \upharpoonright n) : n \in \omega\} : t \in \omega^\omega \right\},$$

где каждое множество $F(t \upharpoonright n)$ замкнуто в X . Несепарабельным аналогом пространства иррациональных чисел $\mathcal{N}$ общепризнанно служит бэровское пространство $B(k)$ веса k ; свойства этого пространства подробно изучены Стоуном [3], [4]. В статье [5] описано пространство $Q(k)$, которое можно рассматривать как обобщение пространства рациональных чисел Q на несепарабельный случай; в частности, $Q(\omega) \approx Q$. Топологическая характеристика пространства $Q(k)$ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть X – метрическое σ -дискретное однородное по весу пространство веса k . Тогда X гомеоморфно пространству $Q(k)$.

В статье [5] также даны топологические характеристики произведений $Q(k) \times C$ и $Q(k) \times B(\tau)$.

Аналогом теоремы Гуревича в несепарабельном случае является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [6]. Пусть Y – A -множество в полном метрическом пространстве X и $Z = X - Y$. Тогда для любого кардинала k , $k \geq \omega$, следующие условия эквивалентны:

- 1) множество Y не представимо в виде $Y = F \cup L$, где F – множество типа F_σ в X , а L – $\sigma LW(< k)$ -пространство;
- 2) множество Z не представимо в виде $Z = G - L$, где G – множество типа G_δ в X , а L – $\sigma LW(< k)$ -пространство;
- 3) существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что M гомеоморфно пространству $B^*(k)$, $M \cap Y \approx B(k)$ и $M \cap Z \approx Q(k)$, причем множества $M \cap Y$ и $M \cap Z$ всюду плотны в M .

В настоящей статье доказываются аналогичные теоремы о вложении произведений $Q(k) \times B(\tau)$, $Q(k) \times \mathcal{N}$ и $Q(k) \times C$ в абсолютные A -множества в качестве замкнутых подмножеств. В сепарабельном случае существует два разных не дискретных нульмерных однородных полных пространства: компакт C и некомпактное пространство иррациональных чисел $\mathcal{N}$. Поэтому теоремы о вложении произведений $Q(k) \times C$ и $Q(k) \times \mathcal{N}$ (при $\tau = \omega$) рассматриваются отдельно. Основная теорема 3 и теорема 4 переносят результаты Сайнт Раймона [1], ван Милла и ван Энгелена [2] на несепарабельный случай. Теорема 5 обобщает теорему 5.3 [2]. При доказательстве теорем используются идеи из работ Гуревича, Сайнт Раймона [1] и ван Милла [2].

2. Определения и обозначения. Основные определения и обозначения – стандартные [7].

Запись $X \approx Y$ означает, что X и Y – гомеоморфные пространства. $w(X)$ – вес пространства X . Чертой сверху $\overline{F}$ обозначается замыкание $\text{cl}_X F$ множества F в пространстве X . Для системы множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ через $|\mathcal{U}|$ обозначается

мощность этого семейства, $\cup \mathcal{U} = \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ – тело семейства $\mathcal{U}$, $\text{mesh}(\mathcal{U})$ – мелкость семейства $\mathcal{U}$, семейство $[\mathcal{U}] = \{\bar{U}_\alpha : \alpha \in A\}$.

Под *ординалом* α понимается множество $\{\beta - \text{ординал} : \beta < \alpha\}$, а под *кардиналом* – наименьший ординал данной мощности; в частности, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ – наименьший бесконечный кардинал. Через k^+ обозначается кардинал, непосредственно следующий за кардиналом k . Для множества X через X^n обозначается множество упорядоченных последовательностей (кортежей) $s = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ длины n элементов из X ; в частности, $\langle x_{-1} \rangle = \Lambda$ – единственный кортеж нулевой длины. Если длина $\text{lh } s$ кортежа s равна n и $i < n$, то $s \upharpoonright i$ – начальный фрагмент $\langle x_0, \dots, x_{i-1} \rangle$ длины i кортежа s . Если $s \in X^n$ и $x_n \in X$, то $\hat{s}x_n = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$. Определим $X^{<\omega} = \bigcup \{X^n : n \in \omega\}$. Через $B^*(k)$ обозначаем бэровское пространство $B(k)$ веса k при $k > \omega$ или канторово множество C при $k = \omega$. Если кортеж $s = \langle i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \rangle \in \omega^n$, то положим $|s| = i_0 + i_1 + \dots + i_{n-1}$; по определению $|\Lambda| = 0$.

σ -Дискретное семейство $\mathcal{B}$ называется σ -дискретной базой [8] для семейства $\mathcal{U}$ в пространстве X , если каждое множество из $\mathcal{U}$ является объединением некоторых множеств из $\mathcal{B}$. Хансел доказал, что если у семейства $\mathcal{U}$ есть некоторая σ -дискретная база, то для $\mathcal{U}$ можно найти базу вида $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$, где каждое семейство $\mathcal{B}_n$ ε_n -метрически дискретно для некоторого $\varepsilon_n > 0$. отображение $f : X \rightarrow Y$ называется $\text{ко-}\sigma$ -дискретным [8], если образ любого дискретного семейства из X имеет σ -дискретную базу в Y .

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое топологическое свойство. Мы говорим, что пространство X *нигде не* $\mathcal{P}$, если никакое непустое открытое множество из X не обладает свойством $\mathcal{P}$. Пространство X называется *однородным по весу*, если вес любого непустого открытого множества из X равен весу X . Пространство X называется $LW(< k)$ -пространством [4], если у каждой точки из X найдется окрестность веса $< k$. Пространство X называется $\sigma LW(< k)$ -пространством [4], если оно представимо в виде $X = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$, где каждое X_n является $LW(< k)$ -пространством. В частности, $\sigma LW(< \omega)$ -пространства – это просто σ -дискретные пространства. Стоун [4] доказал, что бэровское пространство $B(k)$ *нигде не* является $\sigma LW(< k)$ -пространством.

Для фиксированного пространства X через $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$ и $\mathcal{L}_k$ обозначаются соответственно семейства всех F_σ -множеств, G_δ -множеств и $\sigma LW(< k)$ -множеств из пространства X . Так, запись $Y \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ означает, что Y – множество типа F_σ в пространстве X .

3. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Y и Z – A -множества в полном метрическом пространстве X и даны кардиналы k и τ , причем $Z = X - Y$ и $\omega \leq \tau \leq k$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) множество Y не представимо в виде $Y = (L_1 \cup F) - L_2$, где $L_1 \in \mathcal{L}_k$, $L_2 \in \mathcal{L}_\tau$ и F – множество типа F_σ в X ;
- 2) множество Z не представимо в виде $Z = L_2 \cup (G - L_1)$, где $L_1 \in \mathcal{L}_k$, $L_2 \in \mathcal{L}_\tau$ и G – множество типа G_δ в X ;
- 3) существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \approx B^*(k)$, $M \cap Y \approx B(k)$ и $M \cap Z \approx Q(k) \times B^*(\tau)$, причем множества $M \cap Y$ и $M \cap Z$ всюду плотны в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность условий 1) $\Leftrightarrow$ 2) проверяется стандартным образом.

Проверим 3) $\Rightarrow$ 2). Допустим, что условие 2) не выполняется, т.е. $Z = L_2 \cup (G - L_1)$, где $L_1 \in \mathcal{L}_k$, $L_2 \in \mathcal{L}_\tau$ и G – множество типа G_δ в X ; при этом без ограничения общности можно считать, что $G \cap L_2 = \emptyset$ и $L_1 \subset G$. Если бы множество $G \cap M$ было бы пустым, то мы получили бы, что множество $M \cap Z \in \mathcal{L}_\tau$, а это противоречит теореме Стоуна [4] о том, что $B^*(\tau) \notin \mathcal{L}_\tau$. Значит, $G \cap M \neq \emptyset$. Так как $B^*(\tau)$ нигде не $\mathcal{L}_\tau$ -пространство, множество $(M \cap Z) - L_2 = M \cap (G - L_1)$ всюду плотно в $M \cap Z$; следовательно, $M \cap (G - L_1)$ – однородное по весу пространство веса k . Тогда и $M \cap G$ – однородное по весу пространство веса k . Но $M \cap G$ – абсолютное G_δ -множество, поэтому $M \cap G$ нигде не $\mathcal{L}_k$ -пространство. Согласно [4] существует такое множество $L_3 \in \mathcal{L}_k$ типа F_σ в $G \cap M$, что $L_1 \cap M \subseteq L_3 \subseteq G \cap M$. Тогда $(G \cap M) - L_3$ – всюду плотное подмножество типа G_δ в $G \cap M$, поэтому $(G \cap M) - L_3$ – абсолютное G_δ -множество. С другой стороны, $(G \cap M) - L_3$ – всюду плотное подмножество в множестве первой категории $M \cap Z \approx Q(k) \times B^*(\tau)$, значит, и само $(G \cap M) - L_3$ является множеством первой категории. Получили противоречие с теоремой Бэра о категории [7; п. 3.9.3]. Итак, допущение о том, что $Z = L_2 \cup (G - L_1)$, оказалось неверным. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Докажем основную часть теоремы: 1) $\Rightarrow$ 3).

Рассмотрим множество

$$FL = \bigcup \{U \subseteq Y : U \text{ – открытое множество в } Y \text{ вида } U = (L_{1U} \cup F_U) - L_{2U}, \\ \text{где } L_{1U} \in \mathcal{L}_k, L_{2U} \in \mathcal{L}_\tau \text{ и } F_U \text{ – множество типа } F_\sigma \text{ в } X\}.$$

Учитывая, что

- 1) если множество является локально $\sigma LW(< k)$ -пространством, то оно и в целом будет $\sigma LW(< k)$ -пространством;
- 2) если множество локально имеет тип F_σ , то оно и в целом имеет тип F_σ ;

делаем вывод о том, что $FL = (L_1 \cup F) - L_2$, где $L_1 \in \mathcal{L}_k$, $L_2 \in \mathcal{L}_\tau$ и F – множество типа F_σ в X , причем FL – открытое множество в Y и $L_2 \subseteq F$. Тогда множество $D = Y - FL$ непусто, замкнуто в Y и нигде не типа $(\mathcal{F}_\sigma + \mathcal{L}_k) - \mathcal{L}_\tau$, т.е. никакое непустое открытое в D множество не представимо в виде $(H \cup W_1) - W_2$, где $W_1 \in \mathcal{L}_k$, $W_2 \in \mathcal{L}_\tau$ и $H \in \mathcal{F}_\sigma(X)$.

Изучим свойства множества $E = \overline{D} - Y = \overline{D} - D$, где $\overline{D}$ – замыкание множества D в X .

Ясно, что $Y \cap E = \emptyset$. Покажем, что E всюду плотно в $\overline{D}$. Допустим, что нашлось непустое открытое в $\overline{D}$ множество U , которое не пересекается с E . Тогда множество $U \cap D = U \cap \overline{D}$ имеет тип F_σ в X , что противоречит свойствам множества D . Итак, $\overline{E} = D$. Далее, покажем, что E нигде не типа $(\mathcal{G}_\delta - \mathcal{L}_k) + \mathcal{L}_\tau$. Допустим, что нашлось непустое открытое в E множество $U = L_2 \cup (G - L_1)$, где $L_1 \in \mathcal{L}_k$, $L_2 \in \mathcal{L}_\tau$ и G – множество типа G_δ в X , причем $L_1 \subseteq G$ и $G \cap L_2 = \emptyset$. Возьмем такое открытое в $\overline{D}$ множество V , что $U = V \cap E$. Тогда открытое в D множество $V \cap D = ((V - G) \cup L_2) - L_1$ имеет тип $(\mathcal{F}_\sigma + \mathcal{L}_k) - \mathcal{L}_\tau$, что противоречит свойствам множества D .

Искомое множество M будет принадлежать множеству $\overline{D}$, поэтому в дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем считать, что $X = \overline{D}$, $Y = D$, $Z = E$, причем Y нигде не типа $(\mathcal{F}_\sigma + \mathcal{L}_k) - \mathcal{L}_\tau$, а Z нигде не типа $(\mathcal{G}_\delta - \mathcal{L}_k) + \mathcal{L}_\tau$.

ЛЕММА 1. В условиях теоремы 3 существует нульмерное полное метрическое пространство T и такое непрерывное отображение $\varphi: T \rightarrow Y$, что $\varphi(\overline{T}) = X$ и для любого непустого открытого множества $V \subseteq T$ верно следующее:

- s1) $\varphi(V)$ нигде не $\sigma LW(< k)$ -пространство;
- s2) существует такое нигде не плотное замкнутое в X множество F_V , что $F_V \subset Z \cap \overline{\varphi(V)}$, F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$ и $F_V \approx B^*(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1 [8] существует непрерывное ко- σ -дискретное отображение $\varphi: B(p) \rightarrow Y$, причем $p = w(Y)$ и $\varphi(B(p)) = Y$. Назовем открытое множество $U \subseteq B(p)$ особым, если в пространстве X существуют такие множества $L_{1U} \in \mathcal{L}_k$, $L_{2U} \in \mathcal{L}_\tau$ и $F_U \in \mathcal{F}_\sigma(X)$, что $\varphi(U) \subseteq (L_{1U} \cup F_U) - L_{2U} \subseteq Y$; без ограничения общности можно считать, что $L_{1U} \cap F_U = \emptyset$, $L_{1U} \subseteq Y$ и $L_{2U} \subset F_U \cap Z$. Множество $T_1 = \bigcup \{U : U - \text{особое множество в } B(p)\}$ открыто в $B(p)$; покажем, что T_1 – особое множество в $B(p)$. Возьмем σ -дискретное покрытие γ множества T_1 из особых множеств. Тогда семейство $\{\varphi(U) : U \in \gamma\}$ имеет σ -дискретную базу $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$, где каждое семейство $\mathcal{B}_n$ ε_n -метрически дискретно в X для некоторого $\varepsilon_n > 0$. Для каждого $B \in \mathcal{B}$ зафиксируем такое $U_B \in \gamma$, что $B \in \varphi(U_B)$. Множество $F^* = \bigcup \{\overline{B} \cap F_{U_B} : B \in \mathcal{B}\}$ имеет тип F_σ в X , так как оно является счетным объединением множеств локального типа F_σ . Аналогично, множество $L_1^* = \bigcup \{\overline{B} \cap L_{1U_B} : B \in \mathcal{B}\}$ является $\sigma LW(< k)$ -пространством как счетное объединение локальных $\sigma LW(< k)$ -пространств, а множество $L_2^* = \bigcup \{\overline{B} \cap L_{2U_B} : B \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{L}_\tau$. По построению $\varphi(T_1) \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq Y^* \subseteq Y$, где $Y^* = (L_1^* \cup F^*) - L_2^*$; следовательно, T_1 – особое множество в $B(p)$. При этом $L_2^* \subset F^* \cap Z$. Так как Y нигде не типа $(\mathcal{F}_\sigma + \mathcal{L}_k) - \mathcal{L}_\tau$, множество $Y - Y^* = Y - (L_1^* \cup F^*)$ всюду плотно в Y . Без ограничения общности [8] можно считать, что L_1^* – множество типа F_σ в Y ; тогда $(Y - Y^*)$ – всюду плотное множество типа G_δ в Y . Прообраз $T = \varphi^{-1}(Y - Y^*)$ является множеством типа G_δ в $B(p)$; следовательно, T – нульмерное пространство, на котором можно задать полную метрику. Образ $\varphi(T) = Y - Y^*$ является всюду плотным множеством в Y , а значит, и в X . По построению $T \cap T_1 = \emptyset$.

Проверим свойство s1). Возьмем непустое открытое множество $V \subseteq T$. Допустим, что существует открытое в $\varphi(V)$ множество $W \in \mathcal{L}_k$. Возьмем открытое в $B(p)$ такое множество V_1 , что $V \cap V_1 = \varphi^{-1}(W)$. Тогда $\varphi(V_1) = \varphi(V) \cup \varphi(V_1 - T) \subset W \cup Y^*$; следовательно, V_1 – особое множество, поэтому $V_1 \subset T_1$. В результате получаем, что $V_1 \cap T = \emptyset$; тогда и $W = \emptyset$.

Проверим свойство s2). Пусть $V = V_1 \cap T$, где множество V_1 открыто в $B(p)$. Тогда $\varphi(V_1) = \varphi(V) \cup \varphi(V_1 - T) \subset \overline{\varphi(V)} \cup Y^*$. Так как множество $\overline{\varphi(V)}$ замкнуто в X , то пересечение $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ не пусто и не $\sigma LW(< \tau)$ -пространство (иначе множество V_1 окажется особым).

Возможны два случая. Первый случай: множество $\overline{\varphi(V)} \cap Z = F \cup L$, где $F \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ и $L \in \mathcal{L}_\tau$; второй случай: множество $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ не допускает такого представления. В первом случае $F = \bigcup \{F_n : n \in \omega\}$, где каждое множество F_n замкнуто в X . Так как $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ не $\sigma LW(< \tau)$ -пространство, найдется такой номер n_0 , что

$F_{n0} \notin \sigma LW(< \tau)$. В силу замкнутости в X множество F_{n0} является полным метрическим пространством, поэтому множество F_{n0} содержит замкнутое подмножество $F_V \approx B^*(\tau)$ (при $\tau = \omega$ это следует из теоремы А. Г. Елькина, а при $\tau > \omega$ — из теоремы Стоуна). Во втором случае по теореме 2 существует такое замкнутое в $\overline{\varphi(V)}$ (следовательно, и в X) множество $M_V \subseteq \overline{\varphi(V)}$, что M_V гомеоморфно пространству $B^*(\tau)$, $M_V \cap Z \approx B(\tau)$ и $M_V \cap \varphi(V) \approx Q(\tau)$, причем множества $M_V \cap Y$ и $M_V \cap Z$ всюду плотны в M_V . Возьмем всюду плотную копию Q пространства $Q(\tau)$ в пространстве $B = B^*(\tau)$; тогда множество $Q \times Q$ всюду плотно в произведении $B \times B$ при естественном вложении, причем $B \times B \approx B^*(\tau)$, а $Q \times Q \approx Q(\tau)$ (см. [5]). По теореме 2 [9] при $\tau > \omega$ или по утверждению 4.3.Н [7] при $\tau = \omega$ существует такой гомеоморфизм $g: B \times B \rightarrow M_V$, что $g(Q \times Q) = M_V \cap Y$. Возьмем произвольно точку $y \in B - Q$. Тогда $\{y\} \times B \approx B^*(\tau)$, поэтому множество $F_V = g(\{y\} \times B) \approx B^*(\tau)$ и замкнуто в X , причем $F_V \subset \overline{\varphi(V)} \cap Z$. В обоих случаях замкнутое в X множество $F_V \subset \overline{\varphi(V)} - \varphi(V)$; следовательно, F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$.

Лемма 1 доказана.

Продолжаем доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 3).

Возьмем пространство T согласно лемме 1. Зафиксируем полную метрику d на T и полную метрику ρ на X , причем $\text{diam}(T) \leq 1$, $\text{diam}(X) \leq 1$ и метрики d и ρ порождают исходные топологии на пространствах T и X соответственно.

Рассмотрим подробно случай $k > \omega$. Индукцией по n , $n \in \omega$, построим замкнутые нигде не плотные в X множества $Z(s; \alpha)$, системы $\mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha)$, $i \in \omega$, из открытых в X множеств, открытые в X множества $V(s; \alpha)$, открыто-замкнутые множества $T(s; \alpha) \subset T$, семейства $\mathcal{V}(s; \alpha) = \{V(s^{\wedge}i; \alpha^{\wedge}\alpha_n) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$ и $\mathcal{T}(s; \alpha) = \{\varphi(T(s^{\wedge}i; \alpha^{\wedge}\alpha_n)) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$, связанные следующими соотношениями при любых фиксированных $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$, $n \in \omega$ (чертой сверху обозначается замыкание множества):

- v1) $Z(s; \alpha) \approx B^*(\tau)$ и $Z(s; \alpha) \subset (Z \cap \overline{\varphi(T(s; \alpha))}) - \cup[\mathcal{V}(s; \alpha)]$;
- v2) множество $Z(s; \alpha)$ нигде не плотно в $Z(s; \alpha) \cup \varphi(T(s; \alpha))$;
- v3) для любого $i \in \omega$ семейство $\mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha)$ образует дискретное покрытие множества $Z(s; \alpha)$ мелкости $\leq 2^{-|s| - i}$, причем $\bigcap \{\cup \mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha) : i \in \omega\} = Z(s; \alpha)$;
- v4) $\text{cl}_X(\cup \mathcal{V}(s; \alpha)) = Z(s; \alpha) \cup \bigcup[\mathcal{V}(s; \alpha)]$;
- v5) $\text{cl}_X(\cup \mathcal{T}(s; \alpha)) = Z(s; \alpha) \cup \bigcup[\mathcal{T}(s; \alpha)]$;
- v6) $\text{diam } V(s; \alpha) \leq 2^{-|s| - n}$, $\text{diam } T(s; \alpha) \leq 2^{-n}$;
- v7) $\overline{V(s; \alpha)} \cap \overline{V(t; \beta)} = \emptyset$, если $(s; \alpha) \neq (t; \beta)$ для $t \in \omega^n$, $\beta \in k^n$;
- v8) семейство $\{V(s; \beta) : \beta \in k^n\}$ дискретно в X для фиксированного $s \in \omega^n$;
- v9) семейство $[\mathcal{U}(s^{\wedge}(i+1); \alpha)]$ вписано в семейство $\mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha)$ для любого $i \in \omega$, причем $\mathcal{U}(s^{\wedge}0; \alpha) = \{V(s; \alpha)\}$;
- v10) для любого $U \in \mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha)$ множество $\Delta U = U - \cup[\mathcal{U}(s^{\wedge}(i+1); \alpha)]$ не пусто и содержит ровно k множеств из семейства $\{\overline{V(s^{\wedge}i; \alpha^{\wedge}\alpha_n)} : \alpha_n \in k\}$;
- v11) для любого $i \in \omega$ и для любого $U \in \mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha)$ пересечение $\Delta U \cap \varphi(T(s; \alpha))$ не пусто;
- v12) $\overline{\varphi(T(s; \alpha))} \subset V(s; \alpha)$ и $T(s^{\wedge}i; \alpha^{\wedge}\alpha_n) \subset T(s; \alpha)$ для $i \in \omega$, $\alpha_n \in k$.

База индукции $n = 0$. Положим $V(\Lambda; \Lambda) = X$, $T(\Lambda; \Lambda) = T$; по лемме 1 существует замкнутое в X множество $Z(\Lambda; \Lambda) \subset Z \cap \overline{\varphi(V(\Lambda; \Lambda))}$, которое гомеоморфно $B^*(\tau)$ и

нигде не плотно в объединении $Z(\Lambda; \Lambda) \cup \varphi(T(\Lambda; \Lambda))$. Пусть семейство $\mathcal{W}(0; \Lambda)$ состоит из одного множества $V(\Lambda; \Lambda)$. В силу нульмерности множества $Z(\Lambda; \Lambda)$ для любого $i \in \omega$, $i \geq 1$, существует покрытие $\gamma(i; \Lambda) = \{W(i; \Lambda; \lambda) : \lambda \in A(i; \Lambda)\}$ множества $Z(\Lambda; \Lambda)$, состоящее из открыто-замкнутых в $Z(\Lambda; \Lambda)$ множеств диаметра $\leq 2^{-i-1}$, причем индексное множество $A(i; \Lambda) = \tau$ при $\tau > \omega$ или $A(i; \Lambda)$ – конечное множество при $\tau = \omega$. При этом каждое покрытие $\gamma(i+1; \Lambda)$ вписано в $\gamma(i; \Lambda)$. В силу коллективной нормальности метрических пространств для любого $i \in \omega$ существует такое дискретное в X семейство $\mathcal{W}(i; \Lambda) = \{U(i; \Lambda; \lambda) : \lambda \in A(i; \Lambda)\}$ из открытых в X множеств диаметра $\leq 2^{-i}$, что семейство $\gamma(i; \Lambda)$ вписано в $\mathcal{W}(i; \Lambda)$. Без ограничения общности можно считать, что $\bigcap \{\bigcup \mathcal{W}(i; \Lambda) : i \in \omega\} = Z(\Lambda, \Lambda)$, семейство $[\mathcal{W}(i+1; \Lambda)]$ вписано в $\mathcal{W}(i; \Lambda)$, $i \in \omega$, и для любого $U \in \mathcal{W}(i; \Lambda)$ множество $\Delta U = U - \bigcup [\mathcal{W}(i+1; \Lambda)]$ пересекается с $\varphi(T(\Lambda; \Lambda))$. Тогда по лемме 1 пересечение $\Delta U \cap \varphi(T(\Lambda; \Lambda))$ нигде не $\sigma LW(< k)$ -пространство; следовательно, существует дискретное в X открытое семейство $\{W(i; \beta; U) : \beta \in k\}$ мелкости $\leq 2^{-i-1}$ такое, что $\overline{W(i; \beta; U)} \subset \Delta U$ и $W(i; \beta; U) \cap \varphi(V(\Lambda; \Lambda)) \neq \emptyset$ для любого $\beta \in k$. Так как мощность семейства $\mathcal{W}(i; \Lambda)$ не превосходит τ и $\tau \leq k$, семейство $\{W(i; \beta; U) : U \in \mathcal{W}(i; \Lambda), \beta \in k\}$ при фиксированном i можно переиндексировать в семейство $\{V(i; \alpha) : \alpha \in k\}$. Из дискретности семейства $\mathcal{W}(i; \Lambda)$ вытекает, что семейство $\{V(i; \alpha) : \alpha \in k\}$ дискретно в X . Из непрерывности отображения φ следует, что для любых $i \in \omega$, $\alpha \in k$ существует такое открыто-замкнутое множество $T(i; \alpha) \subset T(\Lambda; \Lambda)$ диаметра $\leq 2^{-1}$, что $\overline{\varphi(T(i; \alpha))} \subset V(i; \alpha)$. При фиксированном i в силу дискретности семейства $\{V(i; \alpha) : \alpha \in k\}$ получаем, что семейство $\{T(i; \alpha) : \alpha \in k\}$ дискретно в T .

Пусть $\mathcal{V}(\Lambda; \Lambda) = \{V(i; \alpha) : i \in \omega, \alpha \in k\}$ и $\mathcal{T}(\Lambda; \Lambda) = \{\varphi(T(i; \alpha)) : i \in \omega, \alpha \in k\}$. Несложно проверить, что

$$\text{cl}_X(\bigcup \mathcal{V}(\Lambda; \Lambda)) = Z(\Lambda; \Lambda) \cup \bigcup [\mathcal{V}(\Lambda; \Lambda)], \quad \text{cl}_X(\bigcup \mathcal{T}(\Lambda; \Lambda)) = Z(\Lambda; \Lambda) \cup \bigcup [\mathcal{T}(\Lambda; \Lambda)],$$

причем $Z(\Lambda; \Lambda) \cap (\bigcup [\mathcal{V}(\Lambda; \Lambda)]) = \emptyset$.

Индуктивный переход. Зафиксируем $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$, $n \in \omega$. По лемме 1 существует замкнутое в X множество $Z(s; \alpha) \subset Z \cap \overline{\varphi(V(s; \alpha))}$, которое гомеоморфно $B^*(\tau)$ и удовлетворяет условию v2). Пусть семейство $\mathcal{W}(s^0; \alpha)$ состоит из одного множества $V(s; \alpha)$. Так как $\dim Z(s; \alpha) = 0$, для любого $i \geq 1$ существует открыто-замкнутое покрытие $\gamma(s^i; \alpha) = \{W(s^i; \alpha; \lambda) : \lambda \in A(s^i; \alpha)\}$ множества $Z(s; \alpha)$ мелкости $\leq 2^{-|s|-i-1}$, причем индексное множество $A(s^i; \alpha) = \tau$ при $\tau > \omega$ или $A(s^i; \alpha)$ – конечное множество при $\tau = \omega$ и покрытие $\gamma(s^{i+1}; \alpha)$ вписано в $\gamma(s^i; \alpha)$. Для любого $i \in \omega$ найдем такое дискретное в X открытое семейство $\mathcal{W}(s^i; \alpha) = \{U(s^i; \alpha; \lambda) : \lambda \in A(s^i; \alpha)\}$ мелкости $\leq 2^{-|s|-i}$, что $\{Z \cap U : U \in \mathcal{W}(s^i; \alpha)\} = \gamma(s^i; \alpha)$ и выполняются условия v3), v9)–v11). Тогда по лемме 1 для каждого $U \in \mathcal{W}(s^i; \alpha)$ пересечение $\Delta U \cap \varphi(T(s; \alpha))$ нигде не $\sigma LW(< k)$ -пространство; следовательно, существует дискретное в X открытое семейство $\{W(s^i; \beta; U) : \beta \in k\}$ мелкости $\leq 2^{-|s|-i-1}$ такое, что $\overline{W(s^i; \beta; U)} \subset \Delta U$ и $W(s^i; \beta; U) \cap \varphi(V(s; \alpha)) \neq \emptyset$ для любого $\beta \in k$. Семейство $\{W(s^i; \beta; U) : U \in \mathcal{W}(s^i; \alpha), \beta \in k\}$ при фиксированном i переиндексируем в семейство $\{V(s^i; \alpha_n) : \alpha_n \in k\}$. Из дискретности семейства $\mathcal{W}(s^i; \alpha)$ при фиксированном i вытекают условия v7) и v8). Используя непрерывность отображения $\varphi : T \rightarrow Y$, для любых $i \in \omega$, $\alpha_n \in k$ найдем открыто-замкнутые множества $T(s^i; \alpha_n) \subset T(s; \alpha)$ диаметра $\leq 2^{-n}$, для которых выполняется условие v12).

Пусть $\mathcal{V}(s; \alpha) = \{V(s^{\wedge}i; \alpha^{\wedge}\alpha_n) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$ и $\mathcal{T}(s; \alpha) = \{\varphi(T(s^{\wedge}i; \alpha^{\wedge}\alpha_n)) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$. Несложно проверить, что условия v4 и v5 выполняются. Индуктивный переход закончен.

Для каждого $n \in \omega$ рассмотрим конечное индексное множество

$$S_n = \{s \in \omega^{<\omega} : |s| + \text{lh } s = n\},$$

семейство

$$\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U}(s^{\wedge}i; \alpha) : s^{\wedge}i \in S_{n+1}, i \in \omega, \text{lh } s = \text{lh } \alpha, \alpha \in k^{<\omega}\}$$

и множество

$$Z_n = \bigcup \{Z(S; \alpha) : S \in S_n, \text{lh } s = \text{lh } \alpha, \alpha \in k^{<\omega}\}.$$

В частности, $S_0 = \{\Lambda\}$, $S_1 = \{0\}$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(0; \Lambda) = \{X\}$ и $Z_0 = Z(\Lambda; \Lambda)$. Определим множество $Z^* = \bigcup \{Z_n : n \in \omega\}$. Из условия v1) следует, что $Z^* \subset Z$.

ЛЕММА 2. 1) Семейство $\mathcal{U}_n$ дискретно в X для любого $n \in \omega$.

2) Множество Z^* гомеоморфно пространству $Q(k) \times B^*(\tau)$, причем Z^* – множество типа F_σ в пространстве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем два разных множества $U_1 = U(s^{\wedge}i; \alpha)$ и $U_2 = U(t^{\wedge}j; \beta)$ из семейства $\mathcal{U}_n$. Если $\text{lh } s = \text{lh } t$, то из условий v7), v9) и v10) вытекает, что $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Если $\text{lh } s < \text{lh } t$, то найдем число $m = \max\{l \in \omega : s^{\wedge}i \upharpoonright l = t^{\wedge}j \upharpoonright l\}$. Так как $\text{lh}(s^{\wedge}i) < \text{lh}(t^{\wedge}j)$ и $|s^{\wedge}i| \leq |t^{\wedge}j|$, случай $m = \text{lh}(s^{\wedge}i)$ невозможен. Значит, $m < \text{lh}(s^{\wedge}i)$. Из свойств v9) и v10) вытекает, что

$$U_1 \subset V(s^{\wedge}i \upharpoonright (m+1); \alpha \upharpoonright (m+1)), \quad U_2 \subset V(t^{\wedge}j \upharpoonright (m+1); \beta \upharpoonright (m+1));$$

следовательно, из свойства v7) получаем, что $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$, ведь $s^{\wedge}i \upharpoonright (m+1) \neq t^{\wedge}j \upharpoonright (m+1)$. Случай $\text{lh } s > \text{lh } t$ разбирается аналогично. Итак, замыкания множеств из семейства $\mathcal{U}_n$ попарно не пересекаются. Так как множество S_n конечно, из свойств v8)–v10) следует дискретность семейства $\mathcal{U}_n$ в X .

2) Из свойств v3), v9), v10) и v1) следует, что в любой окрестности любой точки $z \in Z(s; \alpha) \subset Z^*$ можно найти k замкнутых копий множества $B^*(\tau)$, поэтому Z^* – однородное по весу пространство веса k . По построению каждое Z_n локально гомеоморфно пространству $B^*(\tau)$. Из условий v1) и v12) следует, что каждое $Z(s; \alpha) \subset V(s; \alpha)$, поэтому из свойств v7) и v8) вытекает, что множество

$$Z_{n,l} = \bigcup \{Z(s; \alpha) : s \in S_n, \text{lh } s = \text{lh } \alpha = l, \alpha \in k^{<\omega}\}$$

замкнуто в X для любого $l \leq n$. Тогда и множество $Z_n = \bigcup \{Z_{n,l} : l \leq n\}$ замкнуто в X . Значит, Z^* – множество типа F_σ в пространстве X . Из свойств v2), v3) и v11) следует, что каждое множество Z_n нигде не плотно в Z^* , поэтому Z^* – пространство первой категории. Тогда на основании теорем 7 и 8 [5] делаем вывод о том, что $Z^* \approx Q(k) \times B^*(\tau)$. Лемма 2 доказана.

Для любого $n \in \omega$ рассмотрим множества

$$P_n = \bigcup \{\overline{\varphi(T(s; \alpha))} : s \in \omega^n, \alpha \in k^n\}, \quad \widehat{Z}_n = \bigcup \{Z(s; \alpha) : s \in \omega^l, \alpha \in k^l, l \leq n\}$$

и пусть $M_n = \widehat{Z}_n \cup P_{n+1}$. Из свойств v12), v9) и v10) следует, что $M_{n+1} \subset M_n$, а из свойств v1) и v12) вытекает, что $Z^* \subset M_n$ для любого $n \in \omega$. Определим множество $M = \bigcap \{M_n : n \in \omega\}$; тогда $Z^* \subset M$.

ЛЕММА 3. *Множество M замкнуто в пространстве X и гомеоморфно бэровскому пространству $B(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что множество Z^* всюду плотно в M . Возьмем точку $x \in M - Z^*$ и ее окрестность U_x радиуса 2^{-n} . Тогда $x \in \overline{\varphi(T(s; \alpha))} \subset P_{n+1}$ для некоторых $s \in \omega^{n+1}$, $\alpha \in k^{n+1}$. По свойству v1) найдется точка $z \in Z(s; \alpha) \cap \overline{\varphi(T(s; \alpha))}$, а из свойств v6) и v12) вытекает, что $z \in U_x$. Ввиду произвольности n приходим к выводу: множество Z^* всюду плотно в M . Так как Z^* – однородное по весу пространство веса k , то и пространство M такое же.

Проверим, что каждое множество M_n замкнуто в X . Проведем индукцию по n , $n \in \omega$. Множество M_0 замкнуто в X согласно свойству v5). Предположим, что M_{n-1} замкнуто в X . Так как $M_n \subset M_{n-1}$, то $\overline{M_n} \subset M_{n-1}$. Возьмем произвольную точку $x \in \overline{M_n}$. Если $x \in Z^*$, то $x \in M_{n-1}$. Пусть $x \notin Z^*$; тогда $x \in \overline{\varphi(T(s; \alpha))} \subset P_n$ для некоторых $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$. Из свойств v7) и v12) следует, что эти кортежи s и α определяются однозначно. Тогда, учитывая свойства v5) и v12), получаем цепочку:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\varphi(T(s; \alpha))} \cap \overline{P_{n+1}} &\subset \text{cl}_X(\cup \{\varphi(T(\hat{s}i; \hat{\alpha}\alpha_n)) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}) \\ &= Z(s; \alpha) \cup (\cup \{\overline{U} : U \in \mathcal{T}(s; \alpha)\}). \end{aligned}$$

Замыкания множеств из семейства $\mathcal{T}(s; \alpha)$ попарно не пересекаются, поэтому найдутся такие $j \in \omega$ и $\alpha_n \in k$, что $x \in \overline{\varphi(T(\hat{s}j; \hat{\alpha}\alpha_n))}$; следовательно, $x \in P_{n+1} \subset M_n$. Итак, каждое множество M_n замкнуто в X .

Но $M = \bigcap \{M_n : n \in \omega\}$; следовательно, множество M замкнуто в пространстве X . Так как X – полное метрическое пространство, то и M – полное метрическое пространство.

Докажем, что $\dim M = 0$. Сначала проверим, что $M_n \subset \cup \mathcal{U}_n$ для любого $n \in \omega$. Возьмем точку $z \in Z(s; \alpha) \subset M_n$. Если $|s| + \text{lh } s = n$, то $z \in \overline{\varphi(T(s; \alpha))} \subset V(s; \alpha)$; значит, $\hat{s}0 \in S_{n+1}$ и $z \in \cup \mathcal{U}_n$. Если $|s| + \text{lh } s = j < n$, то $z \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}(s(n-j); \alpha)$, значит, $z \in \cup \mathcal{U}_n$. Если $|s| + \text{lh } s = j > n$, то $z \in \cup \mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_n$, ведь семейство $\mathcal{U}_j$ вписано в $\mathcal{U}_n$ при $j > n$. Итак, для любого $n \in \omega$ семейство $\{U \cap M : U \in \mathcal{U}_n\}$ образует дискретное покрытие множества M мелкости $\leq 2^{-n}$. Тогда по теореме 7.3.1 [7] получаем, что $\dim M = 0$.

В целом, мы доказали, что M – нульмерное однородное по весу полное метрическое пространство веса k ; следовательно, по теореме Стоуна [3] $M \approx B(k)$.

Лемма 3 доказана.

Проверим, что $M - Z^* \subset Y$. Возьмем точку $y \in M - Z^*$; тогда $y \in P_n$ для любого $n \in \omega$. Из свойств v1), v12) и v7) следует, что существуют единственные кортежи $s(y, n) \in \omega^n$, $\alpha(y, n) \in k^n$, такие, что $y \in \overline{\varphi(T(s(y, n); \alpha(y, n)))}$. С учетом свойства вложенности v12) построим последовательности $\lambda \in \omega^\omega$ и $\delta \in k^\omega$ так, что $\lambda \upharpoonright n = s(y, n)$ и $\delta \upharpoonright n = \alpha(y, n)$ для любого $n \in \omega$. По теореме о вложенных шарах 4.3.8 [7] в полном метрическом пространстве T в силу v4) пересечение $\bigcap \{\varphi(T(\lambda \upharpoonright n, \delta \upharpoonright n)) : n \in \omega\}$ не пусто и состоит из одной точки t . Тогда $\varphi(t) = y \in Y$.

Таким образом, $M \cap Z = Z^* \approx Q(k) \times B^*(\tau)$ по лемме 2. Далее, согласно лемме 2 множество $M \cap Y$ имеет тип G_δ в M и всюду плотно в M ; тогда по следствию 2.4 [3] $M \cap Y \approx B(k)$.

Для случая $k > \omega$ доказательство окончено.

В случае $k = \omega$ доказательство упрощается; укажем на основные изменения. Вместо множеств $Z(s; \alpha)$, $V(s; \alpha)$ и $T(s; \alpha)$, систем $\mathcal{U}(s^i; \alpha)$, $\mathcal{V}(s; \alpha)$ и $\mathcal{T}(s; \alpha)$ строим множества $Z(s)$, $V(s)$ и $T(s)$, системы $\mathcal{U}(s^i)$, $\mathcal{V}(s) = \{V(s^i) : i \in \omega\}$ и $\mathcal{T}(s) = \{\varphi(T(s^i)) : i \in \omega\}$, удовлетворяющие условиям v1)–v12), если везде опустить второй индекс α . При этом каждое множество $Z(s) \approx C$ является компактом; следовательно, каждое покрытие $\mathcal{U}(s^i)$ множества $Z(s)$ будет конечным, а тогда и дискретное покрытие $\mathcal{U}_n$ множества M будет конечным для любого $n \in \omega$; при этом $\text{mesh } \mathcal{U}_n \leq 2^{-n}$. Отсюда вытекает, что множество M вполне ограничено в полном метрическом пространстве X ; следовательно, M – нульмерный компакт без изолированных точек. Тогда по теореме Брауэра $M \approx C$.

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Y и Z – А-множества в полном метрическом пространстве X , причем $Z = X - Y$. Тогда для любого кардинала k , $k \geq \omega$, следующие условия эквивалентны:

- 1) множество $Z = L_2 \cup (G - L_1)$, где $L_1 \in \mathcal{L}_k$, L_2 – σ -дискретное множество, $G \in \mathcal{G}_\delta(X)$;
- 2) множество Z не содержит замкнутого множества, гомеоморфного пространству $Q(k) \times C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как условия “ L_2 – σ -дискретное множество” и “ $L_2 \in \mathcal{L}_\omega$ ” равносильны, следствие вытекает из основной теоремы 3 при $\tau = \omega$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для метрического пространства Z следующие условия эквивалентны:

- 1) множество $Z = L \cup G$, где L – σ -дискретное множество, а G – абсолютное G_δ -множество;
- 2) множество Z не содержит замкнутого множества, гомеоморфного пространству $Q \times C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим Z в полное метрическое пространство X . Тогда следствие 2 вытекает из следствия 1 при $k = \omega$, так как множество вида $G - L_1$, где G – множество типа G_δ в X , а L_1 – σ -дискретное множество, имеет тип G_δ в X .

4. Вложение произведений $Q(k) \times \mathcal{N}$ в А-множества. Обозначим через $\mathcal{N}$ пространство иррациональных чисел, а через $\mathcal{AF}_\sigma$ – семейство всех абсолютных F_σ -множеств. Как известно, $B(\omega) \approx \mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Y и Z – А-множества в полном метрическом пространстве X , причем $Z = X - Y$. Тогда для любого кардинала k , $k \geq \omega$, следующие условия эквивалентны:

- 1) множество Y не представимо в виде $Y = (F \cup L) - A$, где F – множество типа F_σ в X , $L \in \mathcal{L}_k$, $A \in \mathcal{AF}_\sigma$;
- 2) множество Z не представимо в виде $Z = A \cup (G - L)$, где $A \in \mathcal{AF}_\sigma$, G – множество типа G_δ в X и $L \in \mathcal{L}_k$;

- 3) существует такое нульмерное замкнутое множество $M \subset X$, что $M \cap Z \approx Q(k) \times \mathcal{N}$, множества $M \cap Y$ и $M \cap Z$ всюду плотны в M и, дополнительно, $M \approx B(k)$ при $k > \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность условий 1) $\Leftrightarrow$ 2) проверяется стандартным образом.

Проверим $3 \Rightarrow 2$. Допустим, что условие 2) не выполняется, т.е. $Z = A \cup (G - L)$, где $A \in \mathcal{AF}_\sigma$, G – множество типа G_δ в X и $L \in \mathcal{L}_k$; при этом без ограничения общности можно считать, что $G \cap A = \emptyset$ и $L \subset G$. Если $G \cap M = \emptyset$, то $M \cap Z \in \mathcal{AF}_\sigma$, что не верно, ведь $\mathcal{N} \notin \mathcal{AF}_\sigma$. Значит, $G \cap M \neq \emptyset$. Так как $\mathcal{N}$ нигде не $\mathcal{AF}_\sigma$ -множество, то $(M \cap Z) - A = M \cap (G - L)$ всюду плотно в $M \cap Z$; следовательно, $M \cap (G - L)$ – однородное по весу пространство веса k . Тогда $M \cap G$ – однородное по весу пространство веса k , поэтому $M \cap G$ нигде не $\mathcal{L}_k$ -пространство. Согласно [4] существует такое множество $L_1 \in \mathcal{L}_k$ типа F_σ в $G \cap M$, что $L \cap M \subseteq L_1 \subseteq G \cap M$. Тогда $(G \cap M) - L_1 = G^*$ – всюду плотное подмножество типа G_δ в $G \cap M$, поэтому G^* – абсолютное G_δ -множество. С другой стороны, G^* – всюду плотное подмножество в множестве первой категории $M \cap Z \approx Q(k) \times \mathcal{N}$; значит, G^* – множество первой категории. Получили противоречие с теоремой Бэра о категории. Итак, допущение о том, что $Z = A \cup (G - L)$, оказалось неверным. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Вывод 1) $\Rightarrow$ 3) аналогичен доказательству соответствующей части теоремы 3 для случая $\tau = \omega$; поэтому мы отметим только отличия в доказательствах, пропуская аналогичные детали.

Без ограничения общности считаем, что Y и Z – всюду плотные подмножества в X , причем Y – нигде не типа $(\mathcal{F}_\sigma + \mathcal{L}_k) - \mathcal{AF}_\sigma$, а Z нигде не типа $\mathcal{AF}_\sigma + (\mathcal{G}_\delta - \mathcal{L}_k)$.

ЛЕММА 4. В условиях теоремы 4 существует нульмерное полное метрическое пространство T и такое непрерывное отображение $\varphi : T \rightarrow Y$, что $\overline{\varphi(T)} = X$ и для любого непустого открытого множества $V \subseteq T$ верно следующее:

- r1) $\varphi(V)$ нигде не $\sigma LW(< k)$ -пространство;
- r2) существует такое замкнутое в X множество F_V , что $F_V \subset \overline{\varphi(V)}$, F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$, при этом либо $F_V \subset Z$ и $F_V \approx \mathcal{N}$, либо $F_V \approx C$, $F_V \cap Y \approx Q$ и $F_V \cap Z \approx \mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = w(Y)$. Возьмем непрерывное ко- σ -дискретное отображение $\varphi : B(p) \rightarrow Y$. Найдем наибольшее особое множество $T_1 \subset B(p)$, т.е. наибольшее открытое множество $T_1 \subset B(p)$, для которого $\varphi(T_1) \subset Y^* \subset Y$, где $Y^* = (L^* \cup F^*) - A^*$ для некоторых множеств $L^* \in \mathcal{L}_k \cap \mathcal{F}_\sigma(Y)$, $F^* \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ и $A^* \in \mathcal{AF}_\sigma$, причем $A^* \subset Z \cap F^*$. Множество $Y - Y^*$ всюду плотно в X . Пространство $T = \varphi^{-1}(Y - Y^*)$ искомо; по построению $T \cap T_1 = \emptyset$.

Проверим свойство r2). Пусть $V = V_1 \cap T$, где множество V_1 открыто в $B(p)$. Тогда $\varphi(V_1) = \varphi(V) \cup \varphi(V_1 - T) \subset \overline{\varphi(V)} \cup Y^*$. Так как множество $\overline{\varphi(V)}$ замкнуто в X , пересечение $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ не пусто и не $\mathcal{AF}_\sigma$ -пространство (иначе множество V_1 окажется особым).

Возможны два случая: пересечение $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ – множество типа F_σ в X или не типа F_σ . В первом случае $\overline{\varphi(V)} \cap Z = \bigcup \{F_n : n \in \omega\}$, где каждое множество F_n замкнуто в X . Так как $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ не $\mathcal{AF}_\sigma$ -пространство, найдется такой номер n_0 , что $F_{n_0} \notin \mathcal{AF}_\sigma$. В силу замкнутости в X множество F_{n_0} является полным метрическим

пространством, поэтому множество F_{n0} содержит замкнутое подмножество $F_V \approx \mathcal{N}$ по теореме 2 (теорему применяем после вложения множества F_{n0} в некоторое полное метрическое пространство X^* таким образом, что F_{n0} не будет множеством типа F_σ в X^*). Во втором случае по теореме 2 существует такое замкнутое в $\overline{\varphi(V)}$ (следовательно, и в X) множество $F_V \subseteq \overline{\varphi(V)}$, что F_V гомеоморфно пространству C , $F_V \cap Z \approx \mathcal{N}$ и $F_V \cap Y \approx Q$, причем множества $F_V \cap Y$ и $F_V \cap Z$ всюду плотны в F_V . Переходя в случае необходимости к подпространству, можно считать, что F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$. Лемма 4 доказана.

Как при доказательстве теоремы 3 выберем на пространстве T из леммы 4 полную метрику d , в которой $\text{diam}(T) \leq 1$. Рассмотрим случай $k > \omega$. Индукцией по n , $n \in \omega$, построим замкнутые нигде не плотные в X множества $Z(s; \alpha)$, открытые в X системы $\mathcal{U}(s^i; \alpha)$, $i \in \omega$, открытые в X множества $V(s; \alpha)$, открыто-замкнутые множества $T(s; \alpha) \subset T$, семейства $\mathcal{V}(s; \alpha) = \{V(s^i; \alpha^i \alpha_n) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$ и $\mathcal{T}(s; \alpha) = \{\varphi(T(s^i; \alpha^i \alpha_n)) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$, связанные соотношениями v2)–v12) при любых фиксированных $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$, $n \in \omega$.

Свойство v1) заменяется на следующее свойство v1'):

v1') либо $Z(s; \alpha) \approx \mathcal{N}$ и

$$Z(s; \alpha) \subset (Z \cap \overline{\varphi(T(s; \alpha))}) - \bigcup [\mathcal{V}(s; \alpha)],$$

либо $Z(s; \alpha) \approx C$, $Z(s; \alpha) \cap Z \approx \mathcal{N}$, $Z(s; \alpha) \cap Y \approx Q$,

$$Z(s; \alpha) \subset \overline{\varphi(T(s; \alpha))}, \quad Z(s; \alpha) \cap \bigcup [\mathcal{V}(s; \alpha)] = \emptyset.$$

Семейства $\mathcal{U}_n$, $n \in \omega$, и множество Z^* определяются точно так же, как в доказательстве теоремы 3. Лемма 2 преобразуется в следующую лемму 5.

ЛЕММА 5. 1) Семейство $\mathcal{U}_n$ дискретно в X для любого $n \in \omega$.

2) Множество $Z^* \cap Z$ гомеоморфно пространству $Q(k) \times \mathcal{N}$, причем Z^* – множество типа F_σ в пространстве X .

Лемма 3 при $k > \omega$ остается верной и в нашем случае. Не меняется и включение $M - Z^* \subset Y$. Однако равенство $M \cap Z = Z^*$, вообще говоря, не выполняется (поэтому не удастся доказать, что $M \cap Y \approx B(k)$); оно заменяется на соотношение $M \cap Z = Z^* \cap Z$.

При $k = \omega$ можно только доказать, что M – нульмерное однородное по весу сепарабельное полное метрическое пространство; однако более точно описать множество M не удается.

На этом доказательство теоремы 4 заканчивается.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Y и Z – A -множества в полном метрическом пространстве X , причем $Z = X - Y$. Тогда для любого бесконечного кардинала k следующие условия эквивалентны:

- 1) множество $Z = A \cup (G - L)$, где $A \in \mathcal{AF}_\sigma$, G – множество типа G_δ в X и $L \in \mathcal{L}_k$;
- 2) Z не содержит замкнутого подмножества, гомеоморфного пространству $Q(k) \times \mathcal{N}$.

Следствие 3 вытекает из теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для метрического пространства Z следующие условия эквивалентны:

- 1) $Z = A \cup G$, где $A \in \mathcal{AF}_\sigma$, а G – абсолютное G_δ -множество;
- 2) Z не содержит замкнутого множества, гомеоморфного пространству $Q \times \mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим Z в полное метрическое пространство X . Тогда следствие 4 вытекает из следствия 3 при $k = \omega$, так как множество вида $G - L$, где G – множество типа G_δ в X , а L – σ -дискретное множество, имеет тип G_δ в X .

В статье [2] описано пространство $\mathcal{T}$, охарактеризованное ван Дауэном как единственное с точностью до гомеоморфизма, сепарабельное нульмерное пространство, которое можно представить в виде объединения пространств Q и $\mathcal{N}$ и которое нигде не σ -компактное и нигде не полное. В [2] нижеследующая теорема 5 была доказана для случая, когда пространство X – метрический компакт.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Y и Z – A -множества в полном метрическом пространстве X , причем $X \in \mathcal{AF}_\sigma$ и $Y = X - Z$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) множество Y не представимо в виде $Y = F \cap G$, где F – множество типа F_σ в X , а G – множество типа G_δ в X ;
- 2) множество Z не представимо в виде $Z = F \cup G$, где F – множество типа F_σ в X , а G – множество типа G_δ в X ;
- 3) существует такое замкнутое множество $M \subset X$, что $M \approx C$, $M \cap Y \approx \mathcal{T}$ и $M \cap Z \approx Q \times \mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 5 является частным случаем теоремы 4 при $k = \omega$ и дополнительном условии $X \in \mathcal{AF}_\sigma$. Условие $Z = A \cup (G_1 - L)$, где $A \in \mathcal{AF}_\sigma$, $G_1 \in \mathcal{G}_\delta(X)$ и $L \in \mathcal{L}_\omega$, преобразуется в условие $Z = F \cup G$, так как $G = G_1 - L$ является G_δ -множеством в X . Аналогично преобразуется условие на Y .

Так как $\mathcal{AF}_\sigma$ -множество не может содержать замкнутой копии пространства $\mathcal{N}$, то в лемме 4 исчезает неопределенность в условии r2): всегда реализуется случай $F_V \approx C$, $F_V \cap Y \approx Q$, $F_V \cap Z \approx \mathcal{N}$. В результате исчезает неопределенность в свойстве v1'); всегда будет осуществляться вторая возможность, т.е. каждое множество $Z(s) \approx C$. Вследствие этого каждое покрытие $\mathcal{U}_n$, $n \in \omega$, множества M окажется конечным (как в теореме 3), и мы получим, что M – компакт; тогда $M \approx C$. Согласно лемме 5 $M \cap Z = Z \cap Z^* \approx Q \times \mathcal{N}$. Так как Z^* – множество типа F_σ в пространстве X , то $M - Z^*$ – множество типа G_δ ; тогда $Y \cap (M - Z^*) \approx \mathcal{N}$. Из свойства v1') вытекает, что счетное множество $Y \cap Z^*$ гомеоморфно Q , причем каждое непустое открытое множество из $Y \cap M$ содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное Q . Из построения следует, что множество $M \cap Y = (Y \cap (M - Z^*)) \cup (Y \cap Z^*)$ гомеоморфно пространству $\mathcal{T}$ согласно 2.4 и 4.2 из статьи [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Saint-Raymond, “La structure borélienne d’Effros est-elle standard?”, *Fund. math.*, **100**:3 (1978), 201–210.

- [2] F. van Engelen, J. van Mill, “Borel sets in compact spaces: some Hurewicz type theorems”, *Fund. Math.*, **124**:3 (1984), 271–286.
- [3] A. H. Stone, “Non-separable Borel sets”, *Rozpr. Mat.*, **28** (1962).
- [4] A. H. Stone, “Non-separable Borel sets, II”, *General Topology and Appl.*, **2**:3 (1972), 249–270.
- [5] С. В. Медведев, “Несепарабельные h -однородные метрические пространства”, *Кардинальные инварианты и отображения топологических пространств*, Удмуртский гос. ун-т, Ижевск, 1984, 58–63.
- [6] С. В. Медведев, *Обобщение двух теорем Гуревича на несепарабельный случай*, Деп. в ВИНТИ № 6823-84.
- [7] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.
- [8] R. W. Hansell, “On characterizing non-separable analytic and extended Borel sets as types of continuous images”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **28**:4 (1974), 683–699.
- [9] С. В. Медведев, “Продолжение гомеоморфизмов в нульмерных метрических пространствах”, *Вопросы геометрии и топологии*, Петрозаводский гос. ун-т, Петрозаводск, 1986, 41–50.

С. В. Медведев

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

E-mail: medv@math.susu.ac.ru

Поступило

27.10.2008