Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Яськов, Об одном обобщении теоремы Меньшова–
Радемахера, *Матем. заметки*, 2009, том 86, вы-
пуск 6, 925–937

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:37:30

Об одном обобщении теоремы Менъшова–Радемахера

П. А. Яськов

Для последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ с конечным моментом второго порядка и последовательности положительных констант $\{b_n\}_{n \geq 1}$ установлены новые достаточные условия, обеспечивающие сходимость $\sum_{n \geq 1} X_n/b_n$ п.н., а также справедливость усиленного закона больших чисел, т.е. соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_k/b_n = 0$ п.н. В ряде случаев показана оптимальность полученных результатов. Налагаемые условия в теоремах даны в виде ограничений на $\rho_n = \sup_k (EX_k X_{k+n})^+$,

$$r_n = \sup_k \frac{(EX_k X_{k+n})^+}{(EX_k^2)^{1/2} (EX_{k+n}^2)^{1/2}},$$

EX_n^2 и b_n , где $x^+ = x \vee 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть $X = \{X_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность случайных величин с конечным моментом второго порядка. Для $x > 0$ положим $\log x = \log_2(x \vee 2)$. Если $EX_k X_n = 0$ при $k \neq n$ и постоянные b_n , $n \in \mathbb{N}$, таковы, что

$$\sum_{n \geq 1} \frac{EX_n^2}{b_n^2} \log^2 n < \infty, \quad (1.1)$$

то, как утверждает теорема Менъшова–Радемахера, ряд

$$\sum_{n \geq 1} \frac{X_n}{b_n} \quad \text{сходится п.н.}; \quad (1.2)$$

если к тому же $b_n \uparrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{b_n} = 0 \quad \text{п.н.} \quad (1.3)$$

Равенство (1.3) представляет собой классическую форму усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) для ортогональных случайных величин. В литературе имеются

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00373).

различные обобщения УЗБЧ, не предполагающие условие ортогональности. Важную роль в них играет функция Φ такая, что $\sup_n |EX_n X_{n+k}| \leq \Phi(k)$, а также два типа коэффициентов

$$\rho_k = \rho_k(X) = \sup_n (EX_n X_{n+k})^+, \quad r_k = r_k(X) = \sup_n \frac{(EX_n X_{n+k})^+}{(EX_n^2)^{1/2} (EX_{n+k}^2)^{1/2}}, \quad k \geq 0,$$

где $x^+ = x \vee 0$. Очевидно, что

$$\rho_k \leq \Phi(k), \quad \sup_k r_k = 1, \quad \sup_k \rho_k = \rho_0.$$

Если все значения функции Φ конечны, то последовательность X называют *квазистационарной* относительно Φ . Сходимость рядов типа (1.2) с квазистационарными X_n , а также достаточные условия УЗБЧ, служили предметом многих исследований. Так в работе [1], обобщающей известный результат Гала и Коксмы, а также Лионса, УЗБЧ доказан для $b_n = n$ при

$$\Phi(0) + \sum_{k \geq 1} \frac{\Phi(k)}{k} < \infty. \quad (1.4)$$

Более широкий класс нормировок b_n и функций Φ рассмотрен Морицем в [2]. В случае, когда $\Phi(k) \downarrow 0$ и $b_n = n$, неулучшаемость условия (1.4) показана Гапошкиным в [3], где к тому же получены критерии УЗБЧ для стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей. В другой работе Гапошкина [4] приведено несколько интересных результатов о п.н. сходимости квазистационарных рядов и продемонстрирована невозможность их усиления в стационарном случае при определенных скоростях убывания ковариационной функции. Некоторые обобщения результатов [2] и [4] даны Серфлингом в [5]. Отметим, что во всех перечисленных работах предполагается, что

$$\rho_0 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\log^2 n}{b_n^2} < \infty. \quad (1.5)$$

Конечность ρ_0 позволяет определить, например, понятие w -ряда (см. [6]), частным случаем которого является ряд вида (1.2) с квазистационарными X_n . Порядок роста частичных сумм w -рядов исследован в [6]. Ослабить условие (1.5) до (1.1) видимо впервые было предложено в [7], где для случая $n = O(b_n)$ соотношение (1.2) получено при (1.1) и некоторых ограничениях на Φ . Улучшение результатов [7] дано в [8]. Также представляет интерес статья [9], согласно которой при $b_n = n$ для справедливости УЗБЧ достаточно сходимости рядов (1.1) и $\sum_{k \geq 1} \rho_k \log k / k$ (вытекает из следствия 2.2 в [9]). Коэффициенты r_k рассматривались, например, Морицем в [10], где равенство (1.3) установлено для $b_n = n$ при (1.1) и

$$\sum_{k \geq 1} r_k \sum_{n > k} \frac{EX_n^2}{b_n^2} \log^2 n < \infty. \quad (1.6)$$

Заметим, что если вместо (1.1) потребовать (1.5), то условия, фигурирующие в [7], [8] и [10], не оптимальны. Это обстоятельство явилось главной мотивировкой

дальнейшей работы. Наша цель, таким образом, состояла в том, чтобы перенести ряд неулучшаемых результатов из теории квазистационарных последовательностей на тот случай, когда предположение (1.5) ослаблено до (1.1), и получить обобщения теоремы Меньшова–Радемахера для заданных классов нормировок b_n .

Итак, в данной статье устанавливаются новые достаточные условия выполнения УЗБЧ и сходимости рядов п.н. Эти условия улучшают [7], [8], [10] и часть результатов [1], [2], [4]. В ряде случаев показана оптимальность предложенных условий. Ограничения в наших теоремах описаны в терминах ρ_k , r_k , EX_n^2 и b_n . В качестве нормирующих коэффициентов $\{b_n\}_{n \geq 1}$ рассматриваются как произвольные последовательности положительных чисел, так и удовлетворяющие двойному неравенству

$$c \leq \frac{b_{2n}}{b_n} \leq C \quad \text{для всех достаточно больших } n, \quad (1.7)$$

где c и C – положительные константы, причем $c \leq C$. Отметим, что (1.7) заведомо выполнено, если $b_n/n^{\log_2 c}$ и $n^{\log_2 C}/b_n$ не убывают по n . При выводе основных теорем используются идеи доказательства теоремы Меньшова–Радемахера, аналогично тому, как это делалось в [4]. В рассматриваемом случае такой метод оказывается более простым и эффективным по сравнению с различными общими подходами, предложенными в работах [11], [12].

2. Основные результаты. Назовем возрастающую функцию φ на $[1, \infty)$ *допустимой*, если $\varphi(1) > 0$ и $C_\varphi = \sum_{k \geq 1} 1/\varphi(k) < \infty$. Для допустимой φ положим

$$a_{nk} = \log \frac{n}{k} \cdot \left(\varphi \left(\log \frac{n}{k} \right) \wedge \log n \right), \quad n > k \geq 1. \quad (2.1)$$

Пусть неубывающая последовательность положительных констант $\{b_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет (1.7) при некоторых $c \leq C$. Введем следующие условия:

(а) $\sum_{k \geq 1} (k\rho_k/b_k^2) < \infty$, когда $c > 2^{1/2}$, или для некоторого $\beta > 3/2$

$$b_n \geq n^{1/2} \log^\beta n \quad \text{и} \quad \sum_{k \geq 1} \rho_k \log^{3-2\beta} k < \infty, \quad \text{когда} \quad c = 2^{1/2};$$

(б) найдется допустимая функция φ такая, что

$$\sum_{k \geq 1} r_k \sum_{n > 2k} a_{nk} \frac{EX_n^2}{b_n^2} < \infty, \quad \text{когда} \quad c > 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть b_n удовлетворяют (1.7) и имеет место (1.1). Если, кроме того, выполняется условие (а) или (б), то справедлив УЗБЧ в форме (1.3).

Заметим, что если хотя бы один из коэффициентов r_k отличен от нуля, то условие (б) влечет (1.1). Это следует из того, что для любой допустимой φ

$$k = o(\varphi(k)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Последнее, в частности, означает, что $a_{nk} \geq C_0 \log^2(n/k)$ для некоторого $C_0 > 0$ при всех $n > k \geq 1$.

Теорема 1 улучшает [1], [8] и [10], а также [2] в том случае, когда имеет место (1.7) и $c > 2^{1/2}$. В [1] для $b_n = n$ УЗБЧ доказан при (1.4), в [8] – при (1.1)

и $\sum_{k \geq 1} \rho_k \log^2 k / k < \infty$. В [2] для (1.3), кроме условия (а), требуется (1.5) и еще налагаются некоторые ограничения на $\Phi(k)$. В теореме 3 из [10] соотношение (1.3) получено при $b_n = n$, (1.1) и (1.6). Поэтому выполнение условий теоремы 3 из [10] влечет справедливость условий теоремы 1.

Важным частным случаем теоремы 1 является приведенная ниже теорема 2. Она показывает, что для любых нормировок b_n , удовлетворяющих (1.7) при $c > 1$, наш результат строго сильнее, чем теорема 3 работы [10]. Прежде чем формулировать теорему 2, напомним, что для двух последовательностей неотрицательных чисел $\{x_n\}_{n \geq 1}$ и $\{y_n\}_{n \geq 1}$ пишут $x_n \asymp y_n$, когда существуют положительные постоянные $C_1 \leq C_2$, для которых $C_1 x_n \leq y_n \leq C_2 x_n$ при всех достаточно больших n .

ТЕОРЕМА 2. Пусть b_n удовлетворяют (1.7) при некотором $c > 1$ и $EX_n^2 \asymp n^\alpha$, где $\alpha < \log_2(c^2/2)$. Тогда условие

$$\sum_{k \geq 1} \frac{r_k k^{1+\alpha}}{b_k^2} < \infty \quad (2.3)$$

эквивалентно (b); в частности, оно влечет УЗБЧ в форме (1.3). С другой стороны, при данных ограничениях на b_n и EX_n^2 условие (1.6) равносильно

$$\sum_{k \geq 1} \frac{r_k k^{1+\alpha}}{b_k^2} \log^2 k < \infty. \quad (2.4)$$

В доказательстве теоремы 1 ключевую роль играет следующее максимальное неравенство, сформулированное в терминах

$$w_\rho(k) = \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l, \quad w_r(k) = \sum_{l=1}^{k-1} r_l.$$

ЛЕММА 1. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{2^k}$ – набор случайных величин с конечным моментом второго порядка, а $\{a_n\}_{n=1}^{2^k}$ – совокупность положительных чисел; здесь $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любой допустимой φ

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq n \leq 2^k} S_n^2 \leq (C_\varphi + 1) k^2 \sum_{n=1}^{2^k} a_n^2 EX_n^2 + (C_\varphi + 1) \sum_{i=1}^{k-1} (\varphi(i) \wedge k) \Phi_k(i), \quad (2.5)$$

где $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, $C_\varphi = \sum_{i \geq 1} 1/\varphi(i)$ и

$$\Phi_k(i) = \left(2w_\rho(2^{k-i}) \sum_{n=1}^{2^k} a_n^2 \right) \wedge \left(2w_r(2^{k-i}) \sum_{n=1}^{2^k} a_n^2 EX_n^2 \right). \quad (2.6)$$

Метод доказательства теоремы 1 можно использовать не только для установления УЗБЧ, но также для исследования п.н. сходимости рядов из случайных величин. Приведенная ниже теорема дает достаточные условия такой сходимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $b_n \geq n^\alpha / \log^\beta n$ при $n \geq 1$ для некоторых $(\alpha, \beta) \in D$, где

$$D = \{(\alpha, \beta) : \alpha \neq 1, \alpha > 1/2\} \cup \{(1, \beta) : \beta > -1\},$$

а также сходятся ряды (1.1) и $\sum_{k \geq 1} k^{1-2\alpha} \lambda_k \rho_k \log^{2\beta} k$, где

$$\lambda_k = \begin{cases} (\log \log k)^2 & \text{при } 1/2 < \alpha < 1, \\ \log k (\log \log \log k)^2 & \text{при } \alpha = 1, \\ \log k (\log \log k)^\gamma & \text{при } \alpha > 1 \text{ и некотором } \gamma > 1. \end{cases}$$

Тогда имеет место (1.2), если к тому же $b_n \uparrow \infty$, то и (1.3).

Теорема 3 улучшает [7], [8] и часть результатов [4]. В двух первых работах рассматривается случай, когда выполнено (1.1) и $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. При этом в [7] для справедливости (1.2) требуется $\sum_{k \geq 1} \rho_k / k^q < \infty$ при $0 \leq q < 1$, в [8] – сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \rho_k \log^{4+\delta} k / k$, где $\delta > 0$. В [4] соотношение (1.2) установлено для $b_n = n$ в тех же предположениях, что и в теореме 3, за исключением (1.1), вместо которого используется (1.5). Отметим также, что при $1/2 < \alpha < 1$ теорема 3 близка к теореме 6 из [4], где рассматриваются стационарные X_n и вместо ρ_k берется ковариационная функция последовательности X .

3. Доказательства. Вначале установим лемму 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Введем обозначения

$$S_U = \sum_{n \in U} a_n X_n \quad \text{при } U \subset [1, 2^k], \quad I(i, j) = ((j-1)2^{k-i}, j2^{k-i}].$$

Очевидно, что $I(i, j_1) \cap I(i, j_2) = \emptyset$, если $j_1 \neq j_2$, и $\bigcup_{j=1}^{2^i} I(i, j) = (0, 2^k]$. Как и в доказательстве неравенства Меньшова–Радемахера (см. лемму 1, в [13; с. 333]), для каждого исхода ω можно записать

$$\max_{1 \leq n \leq 2^k} |S_n(\omega)| \leq \sum_{i=1}^k |S_{I(i, j_i)}(\omega)|,$$

где $j_i = j_i(\omega) \leq 2^i$. По неравенству Коши–Буняковского при всех $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ имеем

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq n \leq 2^k} S_n^2 \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^{2^i} \mathbb{E} S_{I(i, j)}^2 \cdot \sum_{i=1}^k \varepsilon_i. \quad (3.1)$$

Выберем $1/\varepsilon_i = \varphi(i) \wedge k$. Тогда

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon_i} \leq k^2, \quad \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \leq C_\varphi + 1, \quad (3.2)$$

где $C_\varphi = \sum_{i \geq 1} 1/\varphi(i)$. Далее, заметим, что разность

$$\sum_{j=1}^{2^i} \mathbb{E} S_{I(i, j)}^2 - \sum_{n=1}^{2^k} a_n^2 \mathbb{E} X_n^2$$

ограничивается сверху величиной

$$\left(\sum_{l=1}^{2^{k-i}-1} \rho_l \sum_{n=1}^{2^k-l} 2a_n a_{n+l} \right) \wedge \left(\sum_{l=1}^{2^{k-i}-1} r_l \sum_{n=1}^{2^k-l} 2a_n a_{n+l} (\mathbb{E} X_n^2 \mathbb{E} X_{n+l}^2)^{1/2} \right), \quad (3.3)$$

которая не превосходит $\Phi_k(i)$ из (2.6). Учитывая (3.1)–(3.3), приходим к (2.5).

Перейдем к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Без ограничения общности будем считать, что (1.7) выполнено при всех n . Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad M_k = \max_{2^k < n \leq 2^{k+1}} |S_n - S_{2^k}|.$$

Для установления $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/b_n = 0$ п.н. достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\mathbb{E} M_k^2}{b_{2^k}^2} < \infty. \quad (3.4)$$

Действительно, из (3.4) по лемме Бореля–Кантелли легко получить соотношение

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k}{b_{2^k}} = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (3.5)$$

которое, в частности, означает, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |S_{2^k}|/b_{2^k} = 0$ с вероятностью единица. Последний переход следует из оценки

$$\frac{|S_{2^{k+1}}|}{b_{2^{k+1}}} \leq \frac{|S_{2^k}|}{cb_{2^k}} + \frac{M_k}{cb_{2^k}},$$

а также того факта, что если $x_{k+1} \leq x_k/c + \varepsilon$ при всех достаточно больших k , то $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k \leq c\varepsilon/(c-1)$ (по условию $c > 1$). Имея (1.7), (3.5) и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |S_{2^k}|/b_{2^k} = 0$ п.н., нетрудно вывести утверждение теоремы.

Итак, докажем (3.4). Для оценки k -го члена ряда, стоящего в левой части (3.4), применим лемму 1 к набору $\{X_n\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$, положив $a_n = 1$. В силу (1.7), учитывая монотонность b_n , видим, что

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k^2}{b_{2^k}^2} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \mathbb{E} X_n^2 \leq C^2 \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E} X_n^2}{b_n^2} \log^2 n < \infty. \quad (3.6)$$

Допустим вначале, что имеет место (b). Вследствие (2.5) и (3.6) неравенство (3.4) выполнено, когда для

$$E_k = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{\mathbb{E} X_n^2}{b_n^2}$$

имеет место оценка

$$\sum_{k \geq 2} E_k \sum_{i=1}^{k-1} (\varphi(i) \wedge k) w_r(2^{k-i}) < \infty, \quad (3.7)$$

где $w_r(2^m) = \sum_{l=1}^{2^m-1} r_l$. Обозначим

$$R_j = \sum_{l=2^{j-1}}^{2^j-1} r_l.$$

Имеем $w_r(2^{k-i}) = \sum_{j=1}^{k-i} R_j$ и

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\varphi(i) \wedge k) \sum_{j=1}^{k-i} R_j = \sum_{j=1}^{k-1} R_j \sum_{i=1}^{k-j} (\varphi(i) \wedge k) \leq \sum_{j=1}^{k-1} R_j (k-j) (\varphi(k-j) \wedge k).$$

Отсюда получаем, что для справедливости (3.7) достаточно, чтобы

$$\sum_{k \geq 2} E_k \sum_{j=1}^{k-1} R_j (k-j) (\varphi(k-j) \wedge k) = \sum_{j \geq 1} R_j \sum_{k \geq j+1} E_k (k-j) (\varphi(k-j) \wedge k) < \infty. \quad (3.8)$$

Поскольку $a_{2^k 2^j} = (k-j)(\varphi(k-j) \wedge k)$ и a_{nk} возрастают по n (для допустимой φ), соотношение (3.8), а значит, и (3.7) вытекают из условия (b).

Предположим теперь, что выполнено (a). Рассуждая точно так же, находим, что (3.4) следует из неравенства, аналогичного (3.8), где вместо E_k стоит величина $2^k/b_{2^k}^2$, а R_j определяются формулой, в которой коэффициенты r_l заменены на ρ_l . Возьмем $\varphi(i) = i^2$. Нам потребуется оценка вида

$$\frac{b_n}{b_{2^k}} \leq \frac{b_{2^{\lfloor \log n \rfloor + 1}}}{b_{2^k}} \leq c^{\log n - k + 1} \quad \text{при } k > \log n, \quad (3.9)$$

вытекающая из (1.7) с учетом неубывания b_n . Принимая во внимание (3.9), имеем

$$\frac{2^i}{b_{2^i}^2} \sum_{k-i \geq 1} (k-i)((k-i)^2 \wedge k) \frac{b_{2^i}^2}{2^i} \frac{2^k}{b_{2^k}^2} \leq C_0 \frac{2^i}{b_{2^i}^2},$$

где $C_0 = \sum_{l \geq 1} c^2 l^3 (2/c^2)^l$. Последнее влечет утверждение теоремы, когда $c > 2^{1/2}$. Случай $c = 2^{1/2}$ рассматривается по той же схеме с применением оценки

$$\sum_{k \geq i+1} (k-i)k \frac{2^k}{b_{2^k}^2} \leq \sum_{k \geq i+1} k^{2-2\beta} \leq \frac{i^{3-2\beta}}{2\beta-3}.$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку по условию $c^2 > 2^{\alpha+1}$, то из соотношений (1.7) и (3.9), учитывая монотонность b_n , находим, что

$$\sum_{n > k} \frac{n^\alpha}{b_n^2} \log^2 n \asymp \sum_{i > \log k} \frac{2^{(\alpha+1)i}}{b_{2^i}^2} i^2 \asymp \frac{k^{\alpha+1}}{b_k^2} \sum_{i > \log k} \left(\frac{2^{\alpha+1}}{c^2} \right)^{i - \log k} i^2 \asymp \frac{k^{\alpha+1}}{b_k^2} \log^2 k. \quad (3.10)$$

Последнее обеспечивает равносильность (2.4) и (1.6) (когда $\mathbb{E} X_n^2 \asymp n^\alpha$).

Установим эквивалентность (2.3) и (b) при заданных ограничениях на b_n и $\mathbb{E} X_n^2$. Проверим, что (b) влечет (2.3). В силу (2.2) заключаем, что если выполнено (b), то

$$\sum_{k \geq 1} r_k \sum_{n > 2k} \frac{\mathbb{E} X_n^2}{b_n^2} \left(\log \frac{n}{k} \right)^2 < \infty.$$

Проводя такие же рассуждения, как и в (3.10), видим, что для любого $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n>2k} \frac{n^\alpha}{b_n^2} \left(\log \frac{n}{k} \right)^\gamma &\asymp \sum_{i>\log 2k} \frac{2^{(\alpha+1)i}}{b_{2^i}^2} (i - \log k)^\gamma \\ &\asymp \frac{(2k)^{\alpha+1}}{b_{2k}^2} \sum_{i>\log 2k} \left(\frac{2^{\alpha+1}}{c^2} \right)^{i-\log 2k} (i - \log k)^\gamma \asymp \frac{k^{\alpha+1}}{b_k^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В частности, (3.11) верно при $\gamma = 2$. Следовательно, (b) влечет (2.3). Обратно: если выполнено (2.3), то имеет место и условие (b), где в качестве функции $\varphi(x)$ можно взять x^2 . В самом деле, при $\varphi(x) = x^2$ имеем $(\log(n/k))^2 \leq a_{nk} \leq (\log(n/k))^3$, когда $n > 2k$. Последнее (в силу справедливости (3.11) для $\gamma = 2$ и 3) означает, что

$$\sum_{n>2k} \frac{n^\alpha}{b_n^2} a_{nk} \asymp \frac{k^{\alpha+1}}{b_k^2}.$$

Ввиду (3.10) при $c^2 > 2^{\alpha+1}$ ряд $\sum_{n \geq 1} n^\alpha \log^2 n / b_n^2$ сходится, поэтому для $\mathbf{E} X_n^2 \asymp n^\alpha$ всегда имеет место (1.1). Отсюда согласно теореме 1 соотношение (2.3) влечет УЗБЧ в форме (1.3) (так как выше мы уже показали, что из (2.3) вытекает (b)). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 проведем в два шага. Первый – это проверка того, что

$$\sum_{k \geq 1} |S_{n_k, n_{k+1}}| < \infty \quad \text{п.н.} \quad (3.12)$$

для некоторых индексов $n_k \uparrow \infty$, второй – вывод равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n_k < n \leq n_{k+1}} |S_{n_k, n}| = 0 \quad \text{п.н.}; \quad (3.13)$$

здесь и далее

$$S_{m_1, m_2} = \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{X_n}{b_n}.$$

Отметим, что этот же метод применяется в доказательстве теоремы Меньшова–Радемахера (см. [13; с. 334]). В силу теоремы Б. Леви условие (3.12) вытекает из соотношения

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{E} |S_{n_k, n_{k+1}}| < \infty.$$

По неравенству Коши–Буняковского для любой допустимой ψ (см. п. 2) имеем

$$\left(\sum_{k \geq 1} \mathbf{E} |S_{n_k, n_{k+1}}| \right)^2 \leq \sum_{k \geq 1} \psi(k) \mathbf{E} S_{n_k, n_{k+1}}^2 \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\psi(k)}.$$

Значит, (3.12) заведомо выполнено, если сходится ряд

$$\sum_{k \geq 1} \psi(k) \mathbf{E} S_{n_k, n_{k+1}}^2 < \infty, \quad (3.14)$$

для установления чего нам нужна элементарная оценка вида

$$ES_{n_k, n_{k+1}}^2 \leq \sum_{k=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{EX_n^2}{b_n^2} + \sum_{l=1}^{n_{k+1}-1} \rho_l \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{2}{b_n b_{n+l}}. \quad (3.15)$$

Поскольку $b_n \geq n^\alpha / \log^\beta n$, то при $\alpha > 1/2$

$$\sup_l \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{b_n b_{n+l}} \leq \sup_l \sum_{n>n_k} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} \cdot \frac{\log^\beta(n+l)}{(n+l)^\alpha} = O(n_k^{1-2\alpha} \log^{2\beta n_k}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Кроме того, когда $n_k < l \leq n_{k+1}$ и k велико, выполняется неравенство

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{b_n b_{n+l}} \leq \frac{\log^\beta l}{l^\alpha} \sum_{n=1}^l \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} + \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\log^{2\beta} n}{n^{2\alpha}} = f(l), \quad (3.17)$$

где, очевидно, при $l \rightarrow \infty$

$$f(l) = \begin{cases} O(l^{1-2\alpha} \log^{2\beta} l), & \text{если } 1/2 < \alpha < 1; \\ O(l^{-1} \log^{2\beta+1} l), & \text{если } \alpha = 1, \beta > -1. \end{cases}$$

Разберем последовательно три случая, описывающие изменение параметра α .

Случай $\alpha > 1$. Возьмем $n_k = 2^k$, $\psi(k) = k \log^\gamma k$, где $\gamma > 1$. Тогда в силу оценок (3.15) и (3.16) для некоторых $C_1 = C_1(\gamma)$, $C_2 = C_2(\alpha, \beta) > 0$

$$\sum_{k \geq 1} \psi(k) ES_{n_k, n_{k+1}}^2 \leq C_1 \sum_{n \geq 1} \frac{EX_n^2}{b_n^2} \log^2 n + C_2 \sum_{l \geq 1} g(l) \rho_l, \quad (3.18)$$

где

$$g(l) = \sum_{k: n_{k+1} > l} n_k^{1-2\alpha} (\log n_k)^{2\beta} \psi(k) = O(l^{1-2\alpha} (\log l)^{2\beta+1} (\log \log l)^\gamma), \quad l \rightarrow \infty.$$

По условию ряды, стоящие в правой части (3.18), сходятся, откуда приходим к (3.14), а значит, и (3.12). Равенство (3.13) нетрудно вывести из леммы 1, поступая так же, как при доказательстве (3.5) в теореме 1.

Случай $1/2 < \alpha < 1$. Положим $n_k = 2^{2^k}$, $\psi(k) = k^2$. Из (3.15)–(3.17) заключаем, что (3.18) справедливо при $C_1 = 1$ и

$$g(l) = \sum_{k: n_{k+1} > l} (n_k \vee l)^{1-2\alpha} (\log l)^{2\beta} \psi(k) = O(l^{1-2\alpha} (\log l)^{2\beta} (\log \log l)^2).$$

Поэтому, как и в предыдущем случае, имеют место (3.14) и (3.12). Условие (3.13) вытекает из соотношений

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{2^k < n \leq 2^{k+1}} |S_{2^k, n}| = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (3.19)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq 2^k} |S_{n_k, 2^l n_k}| = 0 \quad \text{п.н.} \quad (3.20)$$

Равенство (3.19) проверяется так же, как при $\alpha > 1$. Для получения (3.20) модифицируем доказательство леммы 1. Положим $a_l = 1$, $X_l = S_{2^{l-1}n_k, 2^l n_k}$ в лемме 1 и $\varepsilon_i = 1/k$ в (3.1). Тогда $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = 1$. Легко также видеть, что сумма $\sum_{j=1}^{2^i} \mathbb{E} S_{I(i,j)}^2$, фигурирующая в (3.1), не больше правой части (3.15), что обеспечивает ту же оценку сверху для Δ_k , что и для $k^2 \mathbb{E} S_{n_k, n_{k+1}}^2$, где $\Delta_k = \mathbb{E} \max_{1 \leq l \leq 2^k} S_{n_k, 2^l n_k}^2$. Сказанное влечет сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \Delta_k$, откуда следует (3.20).

Случай $\alpha = 1$. Воспользуемся идеями доказательства теоремы 3 из [4]. Пусть $n_k = 2^{m_k}$, $m_k = 2^{2^k}$, $\psi(k) = k^2$. Из (3.15)–(3.17) получаем (3.18), где $C_1 = 1$ и

$$g(l) = \sum_{k: n_{k+1} > l} (n_k \vee l)^{-1} (\log(n_k \vee l))^{2\beta+1} \psi(k) = O(l^{-1} (\log l)^{2\beta+1} (\log \log \log l)^2).$$

Сходимость рядов (3.14) и (3.12) выводится из (3.18) аналогично случаю $\alpha > 1$. Условие (3.13) эквивалентно одновременному выполнению соотношений (3.19),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq 2^k} |S_{n_k, n_k^{2^l}}| = 0 \quad \text{п.н.}, \quad (3.21)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq 2^k} |S_{m_k, 2^l m_k}| = 0 \quad \text{п.н.} \quad (3.22)$$

Равенства (3.19) и (3.21) при $\alpha = 1$ доказываются так же, как (3.19) и (3.20) при $1/2 < \alpha < 1$. Для установления (3.22) вновь рассмотрим неравенство (3.1) в доказательстве леммы 1. Возьмем $a_l = 1$, $X_l = S_{2^{l-1}m_k, 2^l m_k}$. Нам понадобится более точная оценка суммы $\sum_{j=1}^{2^i} \mathbb{E} S_{I(i,j)}^2$ из (3.1). А именно, заметим, что в силу (3.16), где вместо n_k берется m_k , разность

$$\sum_{j=1}^{2^i} \mathbb{E} S_{I(i,j)}^2 - \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \frac{\mathbb{E} X_n^2}{b_n^2}$$

не превосходит

$$C_3 \sum_{l=1}^{m_k} \rho_l \cdot \frac{\log^{2\beta} m_k}{m_k} + \sum_{j=1}^{2^i} \sum_{l \in J_k(i,j)} B_{kl}(i,j) \rho_l, \quad (3.23)$$

где $C_3 = C_3(\beta) > 0$ и при $M_k(i,j) = m_k 2^{(j-1)2^{k-i}}$

$$J_k(i,j) = (M_k(i,j), M_k(i,j+1)], \quad B_{kl}(i,j) = \sum_{n > M_k(i,j)} \frac{2}{b_n b_{n+l}}.$$

Поскольку $b_n \geq n / \log^\beta n$, $\beta > -1$ и $\log l > 2^k$ при $l > m_k$, для $l \in J_k(i,j)$ имеем

$$\begin{aligned} B_{kl}(i,j) &\leq C_4 l^{-1} \log^\beta l \sum_{n=M_k(i,j)+1}^l \frac{\log^\beta n}{n} + C_4 \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\log^{2\beta} n}{n^2} \\ &\leq C_5 l^{-1} \log^{2\beta} l (\log M_k(i,j+1) - \log M_k(i,j) + 1) \leq C_5 \frac{\log^{2\beta+1} l}{2^{i-1} l}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где C_4, C_5 – положительные множители, зависящие только от β . Из (3.23) и (3.24), полагая $\varepsilon_i = 1/i^2$ в (3.1), нетрудно получить сходимость ряда $\sum_{k \geq 1} \Lambda_k$ и, следовательно, (3.22); здесь $\Lambda_k = \mathbb{E} \max_{1 \leq l \leq 2^k} S_{m_k, 2^l m_k}^2$.

Справедливость соотношения (1.3) вытекает из леммы Кронекера. Теорема 3 доказана.

4. Оптимальность предложенных условий. Обратимся вначале к случаю, когда (1.1) в теоремах 1 или 3 не имеет места, а все остальные ограничения остаются в силе. Согласно известному результату Тандори условие (1.1) в определенном подклассе ортогональных последовательностей является необходимыми для сходимости ряда (1.2). Точнее говоря, для любых $\sigma_n, b_n > 0, n \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_n^2 \log^2 n}{b_n^2} = \infty \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_n}{b_n} \downarrow 0,$$

существуют X_n с $\mathbb{E}X_n = 0, \mathbb{E}X_n^2 = \sigma_n^2$ и $\rho_n = r_n = 0$, для которых ряд (1.2) расходится п.н. Если для построения X_n использовать конструкцию из [14], то в случае выполнения (1.7) при $c > 2^{1/2}$ кроме расходимости (1.2) удастся также доказать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n X_k|}{b_n} = \infty \quad \text{п.н.} \quad (4.1)$$

Допустим теперь, что все предположения теоремы 1, за исключением (а) и (b), выполнены. Покажем, что если для b_n имеет место (1.7) при $c > 2^{1/2}$, то в классе последовательностей X , для которых справедливо (1.1), $\inf_n \mathbb{E}X_n^2 \geq \rho_1$ и $\rho_n \downarrow 0$, условие (а) необходимо для УЗБЧ. С этой целью модифицируем пример из [3].

Итак, пусть x_n и $\sigma_n, n \in \mathbb{N}$, – положительные числа такие, что

$$\inf_n \sigma_n^2 \geq x_1, \quad x_n \downarrow 0, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n x_n}{b_n^2} = \infty, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \log^2 n < \infty. \quad (4.2)$$

Построим случайные величины X_n с $\mathbb{E}X_n = 0, \mathbb{E}X_n^2 = \sigma_n^2, \rho_n = x_n$, удовлетворяющие (4.1). Нам понадобится несколько вспомогательных конструкций и утверждений. В силу (1.7) и (4.2) ряд $\sum_{k \geq 0} 2^{2k} x_{2^{k+1}} / b_{2^k}^2$ расходится. Для $k \in \mathbb{N}_0$ фиксируем положительные постоянные $M_k \uparrow \infty$, для которых

$$\sum_{k \geq 0} 2^{2k} \frac{x_{2^{k+1}}}{(M_k b_{2^k})^2} = \infty.$$

Пусть $\xi_k, k \in \mathbb{N}_0$, – независимые случайные величины, принимающие значения $2^{-k} M_k b_{2^k}$, 0 и $-2^{-k} M_k b_{2^k}$ соответственно с вероятностями $p_k/2, 1 - p_k$ и $p_k/2$, где $p_k = 1 \wedge 2^{2k} x_{2^{k+1}} / (M_k b_{2^k})^2$. Очевидно, $\mathbb{E}\xi_k = 0$ и $\mathbb{E}\xi_k^2 \leq x_{2^{k+1}}$. Положим $Y_n = \xi_{[\log_2 n]}$. Тогда $\rho_n(Y) \leq x_n$. Обозначая

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \quad \text{и} \quad \Delta T_{2^k} = T_{2^{k+1}} - T_{2^k} = 2^k \xi_k,$$

имеем

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(|\Delta T_{2^k}| \geq M_k b_{2^k}) = \sum_{k \geq 1} p_k = \infty.$$

А значит, по лемме Бореля–Кантелли верхний предел по k величин $|\Delta T_{2^k}|/b_{2^k}$ равен бесконечности п.н., здесь и далее пределы берутся по базе $k \rightarrow \infty$ (или $n \rightarrow \infty$). Выведем отсюда, что $\overline{\lim}_n |T_n|/b_n = \infty$ п.н. По закону «0 или 1» Колмогорова

последний предел равен некоторой константе $L \in [0, \infty]$ с вероятностью единица. Убедимся, что $L = \infty$. Это следует из неравенства

$$\overline{\lim}_k \frac{|\Delta T_{2^k}|}{b_{2^k}} \leq C \overline{\lim}_k \frac{|T_{2^{k+1}}|}{b_{2^{k+1}}} + \overline{\lim}_k \frac{|T_{2^k}|}{b_{2^k}} \leq (C+1)L,$$

где C фигурирует в (1.7). Определим теперь X_n по формуле

$$X_n = \begin{cases} \left(\frac{x_{[\log_2 n]}}{\mathbb{E}Y_n^2} \right)^{1/2} Y_n + (\sigma_n^2 - x_{[\log_2 n]})^{1/2} \eta_n, & n \in A, \\ Y_n + (\sigma_n^2 - \mathbb{E}Y_n^2)^{1/2} \eta_n, & n \in \mathbb{N} \setminus A; \end{cases}$$

здесь

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ имеет вид } 2^k \text{ или } 2^k + k \text{ при } k \in \mathbb{N}\},$$

$\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность независимых (между собой и от $\{Y_n\}_{n \geq 1}$) случайных величин с $\mathbb{E}\eta_n = 0$ и $\mathbb{E}\eta_n^2 = 1$. Учитывая соотношение $\overline{\lim}_n |T_n|/b_n = \infty$ п.н., нетрудно показать, что так определенные X_n удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям. Тем самым, искомый пример построен.

Примеры, демонстрирующие необходимость условий теоремы 3 при $b_n = n^\alpha \log^\beta n$ для классов стационарных последовательностей с заданной скоростью убывания ковариационной функции в случае $(\alpha, \beta) \in (1/2, 1) \times \mathbb{R}$, а также $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, можно найти в [4] (см. теоремы 9 и 10).

Автор очень признателен своему научному руководителю А. В. Булинскому за постоянное внимание и поддержку. Кроме того, хотелось бы выразить глубокую благодарность рецензенту за конструктивные замечания, способствующие существенному улучшению статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ш. Левенталь, Х. Салехи, С. А. Чобанян, “Общие максимальные неравенства, связанные с усиленным законом больших чисел”, *Матем. заметки*, **81**:1 (2007), 98–111.
- [2] F. Móricz, “The strong laws of large numbers for quasi-stationary sequences”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **38**:3 (1977), 223–236.
- [3] В. Ф. Гапошкин, “Критерий усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей”, *ТВП*, **22**:2 (1977), 295–319.
- [4] В. Ф. Гапошкин, “Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:6 (1975), 1366–1392.
- [5] R. J. Serfling, “On the strong law of large numbers and related results for quasistationary sequences”, *ТВП*, **25**:1 (1980), 190–194.
- [6] В. Ф. Гапошкин, “О порядке роста сумм неортогональных рядов”, *Anal. Math.*, **6**:2 (1980), 105–119.
- [7] T.-C. Hu, A. Rosalsky, A. Volodin, “On convergence properties of sums of dependent random variables under second moment and covariance restrictions”, *Statist. Probab. Lett.*, **78**:14 (2008), 1999–2005.
- [8] S. H. Sung, “Maximal inequalities for dependent random variables and applications”, *J. Inequal. Appl.*, 2008, Article ID 598319, 10 pp.
- [9] H. Walk, “Almost sure Cesàro and Euler summability of sequences of dependent random variables”, *Arch. Math. (Basel)*, **89**:5 (2007), 466–480.

- [10] F. Móricz, “SLLN and convergence rates for nearly orthogonal sequences of random variables”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:2 (1985), 287–294.
- [11] I. Fazekas, O. Klesov, “A general approach to the strong laws of large numbers”, *ТВП*, **45**:3 (2000), 568–583.
- [12] G. Cohen, M. Lin, “Extensions of the Menchoff–Rademacher theorem with applications to ergodic theory”, *Israel J. Math.*, **148**:1 (2005), 41–86.
- [13] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [14] F. Móricz, K. Tandori, “Counterexamples in the theory of orthogonal series”, *Acta Math. Hungar.*, **49**:1–2 (1987), 283–290.

П. А. Яськов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yaskov_pavel@mail.ru

Поступило

20.12.2008

Исправленный вариант

06.04.2009