Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Доманов, О спектральной кратности некоторых вольтерровых операторов в соболевских пространствах, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 306–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:11:49

О СПЕКТРАЛЬНОЙ КРАТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. Ю. Доманов

Введение. Прежде всего дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подпространство E банахова пространства X называют *циклическим подпространством* для оператора $T \in [X]$, если $\text{span}\{T^n E : n \geq 0\} = X$. Вектор $f \in X$ называют *циклическим вектором* для оператора T , если $\text{span}\{T^n f : n \geq 0\} = X$. Множество всех циклических подпространств оператора T обозначают $\text{Cyc}(T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положим

$$\mu_T := \inf_E \{\dim E : E - \text{циклическое подпространство оператора } T \text{ в } X\},$$

число μ_T называют *спектральной кратностью* оператора T в X .

Отметим, что μ_T может быть равно ∞ . Ясно, что оператор T циклический тогда и только тогда, когда $\mu_T = 1$.

Отметим, что понятие спектральной кратности играет важную роль в теории управления [1]. Именно, линейная динамическая система описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с операторами $A \in [X]$, $B = B \upharpoonright U$, $B \in [U, X]$, где X и U – банаховы пространства (пространство состояний и управляющее подпространство соответственно) и $x(t) \in X$, $u(t) \in U$.

Первая из задач теории управления заключается в отыскании всех пространств U , удовлетворяющих следующему свойству управляемости: для любого состояния $x \in X$, любого $\varepsilon > 0$ и любого момента времени $t > 0$ найдется (гладкая) функция управления $u(\cdot)$, при которой решение системы (1) достигает ε -окрестности x , $\|x - x(t)\| < \varepsilon$, начиная из некоторого фиксированного исходного состояния $x(0)$ (например, $x(0) = 0$).

Хорошо известная теорема Калмана утверждает, что система $A, B \upharpoonright U$ управляема тогда и только тогда, когда, $B \upharpoonright U \in \text{Cyc } A$, т.е. когда минимальная размерность управляющего подпространства в (1) равна μ_A .

Исследуя другие задачи теории управления, Никольский и Васюнин [2] ввели еще одну характеристику оператора A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [2]. Положим

$$\text{disc } T := \sup_{E' \in \text{Cyc } T} \min\{\dim E' : E' \subset E, E' \in \text{Cyc } T\};$$

$\text{disc } T$ называют *disc-характеристикой* оператора T (“disc” – аббревиатура от “Dimension of the Input Subspace of Control”).

Ясно, что $\text{disc } A \geq \mu_A$. Отметим, что как $\text{disc } A$, так и μ_A зависят только от решетки инвариантных подпространств $\text{Lat } A$ оператора A .

Как обычно, $W_p^k[0, 1]$ обозначает соболевское пространство: $f \in W_p^k[0, 1]$, если f имеет $(k-1)$ -ю абсолютно-непрерывную производную и $f^{(k)} \in L_p[0, 1]$; $W_{p,0}^k[0, 1] = \{f \in W_p^k[0, 1] : f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$. Положим $W_p^0[0, 1] = W_{p,0}^0[0, 1] := L_p[0, 1]$.

Хорошо известно [3], [4], что оператор

$$J^\alpha : f(x) \rightarrow \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt, \quad \text{Re } \alpha > 0,$$

является одноклеточным в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, и его решетка инвариантных подпространств $\text{Lat } J^\alpha$ имеет вид

$$\text{Lat } J^\alpha = \{E_a : \chi_{[0,a]} L_p[0, 1] : 0 \leq a \leq 1\}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что вектор $f \in \text{Cyc } J^\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Это условие называют ε -условием.

Пекановским было получено описание решетки инвариантных подпространств $\text{Lat } J_k$ оператора интегрирования J_k , действующего в пространстве Соболева $W_2^k[0, 1]$. Именно, в [5] показано, что оператор интегрирования $J_k : f \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ в $W_2^k[0, 1]$ также одноклеточен и решетка $\text{Lat } J_k$ состоит из непрерывной $\text{Lat}^c J_k$ и дискретной $\text{Lat}^d J_k$ частей: $\text{Lat } J_k = \text{Lat}^c J_k \cup \text{Lat}^d J_k$. Здесь

$$\text{Lat}^c J_k = \{E_a := \{f : f \in W_p^k[0, 1], f = 0 \text{ при } x \in [0, a]\}, 0 \leq a \leq 1\}$$

– непрерывная часть и $\text{Lat}^d J_k = \{E_l^k\}_{l=0}^k$ с $E_l^k := W_p^k[0, 1]$ и с

$$E_l^k = \{f \in W_p^k[0, 1] : f(0) = \dots = f^{(k-l-1)}(0) = 0\}, \quad l \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \quad (4)$$

– дискретная часть. Ясно, что $W_{p,0}^k[0, 1] = E_0^k \subset E_1^k \subset \dots \subset E_k^k = W_p^k[0, 1]$.

В работе [6] показано, что спектральная кратность $\mu_{J_k^\alpha}$ оператора J_k^α равна $\mu_{J_k^\alpha} = \min(-[\alpha], k)$ и, следовательно, J_k^α циклический тогда, когда либо $\alpha = 1$, либо $k = 1$. Там же, в [6], получено описание множества $\text{Cyc } J_k^\alpha$.

Описание циклических и инвариантных подпространств оператора $A := J^\alpha \otimes B$, действующего в пространствах вектор-функций $L_p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$, где $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица, были получены Маламудом [7]. В частности, в [7] показано, что оператор A циклический только тогда, когда

$$\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j \quad \text{при } i \neq j. \quad (5)$$

Там же, в [7], показано, что при условии (5) решетка $\text{Lat } A$ распадается:

$$\text{Lat } A = \bigoplus_{j=1}^n \text{Lat } \lambda_j J^\alpha = \left\{ \bigoplus_{i=1}^n E_{a_i}^p : 0 \leq a_i \leq 1 \right\}.$$

В [8] эти результаты были частично обобщены на случай соболевских пространств вектор функций. Именно в [8] получено описание циклических подпространств для оператора $J \otimes B$, действующего в пространствах $\bigoplus_{j=1}^n W_p^k[0, 1]$ и $\bigoplus_{j=1}^n W_{p,0}^k[0, 1]$. В настоящем сообщении некоторые результаты из [7] и [8] распространяются на случай оператора $J^\alpha \otimes B$, действующего в пространстве $\bigoplus_{i=1}^l W_p^k[0, 1]$.

Мы начнем с более простого описания $\text{Cyc } A_{k,0}$ для оператора $A_{k,0}$, являющегося сужением оператора A_k на подпространство $\bigoplus_{j=1}^n W_{p,0}^k[0, 1]$.

Циклические подпространства оператора $A_{k,0}$. Обозначим через $J_{k,0}^\alpha$ и $J_k^\alpha := J_{k,k}^\alpha$ оператор J^α , действующий в пространствах $W_{p,0}^k[0, 1]$ и $W_p^k[0, 1]$ соответственно. Пусть также $J_{k,l}^\alpha$ обозначает сужения оператора J_k^α на подпространства E_l^k , определенные соотношениями (4) ($l \leq k-1$) и $E_k^k := W_p^k[0, 1]$.

Оператор J_k^α определен корректно при $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ или $\text{Re } \alpha > k - 1/p$, а его сужение $J_{k,0}^\alpha$ на подпространство $W_{k,0}^k[0, 1]$ определено при $\text{Re } \alpha > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица с собственными значениями, имеющими несовпадающие аргументы ($\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j$ при $i \neq j$), и $A_{k,0} = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i J_{k,0}^\alpha$. Тогда система $\{f_i\}_{i=1}^N$ векторов $f_i = \bigoplus_{j=1}^n f_{ij}$ порождает циклическое подпространство в $W_{p,0}^k[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ для оператора $A_{k,0}$ тогда и только тогда, когда каждая из функций

$$F_j := \sum_{i=1}^N |f_{ij}(x)|, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

удовлетворяет ε -условию (3).

В частности, оператор $A_{k,0}$ циклический в $W_{p,0}^k[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ и $f = (f_1, \dots, f_n) \in \text{Cyc } A_{k,0}$ тогда и только тогда, когда $f_i(x)$ удовлетворяет ε -условию (3) при всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [7]. Определитель функциональной матрицы

$$F(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad f_{ij} \in W_p^k[0, 1],$$

подсчитанный по отношению к свертке

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt = \int_0^x g(x-t)f(t) dt = (g * f)(x),$$

называют **-определителем* и обозначают $*\text{-det } F(x)$.

Аналогично **-миноры* $F(x)$ – это миноры, подсчитанные по отношению к свертке; $*\text{-rank } F(x)$ – это максимальный ранг $*\text{-миноров}$ матрицы $F(x)$, удовлетворяющих ε -условию (3).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha > 0$ и B – диагональная матрица вида

$$B = \bigoplus_{j=1}^r \lambda_j I_{n_j}, \quad \arg \lambda_j = \arg \lambda_1 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}, \quad n = n_1 + \dots + n_r,$$

$$\lambda_j = \lambda_1 / s_j^\alpha, \quad 1 = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_r, \quad u$$

$$f_{ij} = \{f_{ij1}, \dots, f_{ijn_j}\} \in W_{p,0}^k[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n_j}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Тогда $\mu_{A_{k,0}} = n$ и система $\{f_i\}_{i=1}^N$ векторов $f_i = \bigoplus_{j=1}^r f_{ij}$ порождает циклическое подпространство $\bigoplus_{j=1}^n W_{p,0}^{k_j}[0, 1]$ для оператора

$$A_{k,0} = J_{k,0}^\alpha \otimes B = \bigoplus_{j=1}^r \lambda_j J_{k,0}^\alpha \otimes I_{n_j}$$

тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $N \geq n$;
- 2) матрица

$$F_r(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(s_1x) & f_{12}(s_2x) & \dots & f_{1r}(s_rx) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r1}(s_1x) & f_{r2}(s_2x) & \dots & f_{rr}(s_rx) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный $*$ -ранг, а именно

$$*\text{-rank } F_r(x) = n_1 + n_2 + \dots + n_r.$$

Прежде чем дать описание множества $\text{Cyc } A_{k,0}$ в случае произвольного оператора

$$A_{k,0} := J_k^\alpha \otimes B = \lambda_1 J_{k_1,0}^\alpha \oplus \dots \oplus \lambda_n J_{k_n,0}^\alpha,$$

введем следующее обозначение. Пусть $T_i \in [H_i]$, $i = \overline{1, n}$, $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$, $H = \bigoplus_{i=1}^n H_i$. Легко видеть, что если $E \in \text{Cyc } T$, то $P_i E \in \text{Cyc } T_i$, где P_i – естественная проекция H на H_i . Если верно обратное, т.е. если соотношения $P_i E \in \text{Cyc } T_i$, $i = \overline{1, n}$, влекут $E \in \text{Cyc } T$, то будем писать $\text{Cyc } T = \bigvee_{i=1}^n \text{Cyc } T_i$. Это условие, очевидно, выполняется, если $\text{Lat } T = \bigoplus_{i=1}^n \text{Lat } T_i$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\alpha > 0$, оператор $A_{j,0} := \bigoplus_{i=1}^{n_j} \lambda_{ij} J_{k_{ij},0}^\alpha$ определен в пространстве $\bigoplus_{i=1}^{n_j} W_{p,0}^{k_{ij}}[0, 1]$, $1 \leq j \leq r$, и $A_0 := \bigoplus_{j=1}^r A_{j,0}$. Пусть также $\lambda_{ij} = \lambda_{1j} s_{ij}^\alpha$, $1 = s_{1j} \leq s_{2j} \leq \dots \leq s_{n_j j}$ и $\arg \lambda_{1j} \neq \arg \lambda_{1l} \pmod{2\pi}$ при $j \neq l$. Тогда

- 1) $\text{Cyc } A_0 = \bigvee_{j=1}^r \text{Cyc } A_{j,0}$;
- 2) $\mu_{A_0} = \max\{n_j : 1 \leq j \leq r\}$;
- 3) система $\{f_i\}_{i=1}^N$ векторов $f_i = \{f_{i11}, \dots, f_{i1n_1}, \dots, f_{ir1}, \dots, f_{irn_r}\}$ порождает циклическое подпространство тогда и только тогда, когда матрицы

$$F_j(x) = \begin{pmatrix} f_{1j1}(s_{1j}x) & \dots & f_{1jn_j}(s_{n_j j}x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{Nj1}(s_{1j}x) & \dots & f_{Njn_j}(s_{n_j j}x) \end{pmatrix}$$

имеют максимальный $*$ -ранг, а именно $*\text{-rank } F_j(x) = n_j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Теоремы 4, 6, 7 обобщают соответствующие результаты из [7] и совпадают с ними при $k = 0$, т.е. для пространства $W_{p,0}^0 := L_p[0, 1]$.

Циклические подпространства оператора A_k . Для каждой системы векторов $\varphi = \{\vec{\varphi}_i\}_{i=1}^m$ обозначим через $W(\varphi)$ $(n \times m)$ -матрицу, состоящую из столбцов $\vec{\varphi}_i$: $W(\varphi) = (\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_m)$.

ЛЕММА 9. Пусть $m_i = \min(-[-\alpha], k_i)$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, и $\lambda_i \neq 0$ для $i = \{1, \dots, n\}$. Тогда система векторов

$$\vec{\varphi}_i = \text{col}(\varphi_{i11}, \dots, \varphi_{i1k_1}, \varphi_{i21}, \dots, \varphi_{i2k_2}, \dots, \varphi_{in1}, \dots, \varphi_{ink_n}), \quad i = \overline{1, N},$$

порождает циклическое подпространство для оператора $A = \lambda_1 J(0; k_1)^\alpha \oplus \dots \oplus \lambda_n J(0, k_n)^\alpha$ в пространстве $\mathbb{C}^k$, $k = k_1 + \dots + k_n$, тогда и только тогда, когда

- 1) $N \geq \sum_{i=1}^n m_i$;
- 2) матрица $W_0 = PW(\varphi)$ имеет максимальный ранг, т.е. $\text{rank } W_0 = \sum_{i=1}^n m_i$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $m = \min(-[-\alpha], k)$, $k \geq 1$. Тогда

1) система векторов $f_i(x) = \{f_{i1}(x), \dots, f_{in}(x)\}$, $i = \overline{1, N}$, порождает циклическое подпространство для оператора $A_k = \lambda_1 J_k^\alpha \oplus \dots \oplus \lambda_n J_k^\alpha$ в пространстве $\bigoplus_{i=1}^n W_p^k[0, 1]$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- i) $N \geq mn$;
- ii) матрица

$$W(0) = \begin{pmatrix} f_{11}(0) & f_{21}(0) & \dots & f_{N1}(0) \\ f'_{11}(0) & f'_{21}(0) & \dots & f'_{N1}(0) \\ f_{11}^{(m-1)}(0) & f_{21}^{(m-1)}(0) & \dots & f_{N1}^{(m-1)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n}(0) & f_{2n}(0) & \dots & f_{Nn}(0) \\ f'_{1n}(0) & f'_{2n}(0) & \dots & f'_{Nn}(0) \\ f_{1n}^{(m-1)}(0) & f_{2n}^{(m-1)}(0) & \dots & f_{Nn}^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг, т.е. $\text{rank } W(0) = mn$;

- 2) $\mu_{A_k} = mn$;
- 3) $\text{disc } A_k = mn$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Отметим, что описания $\text{Cyc } A_{k,0}$ и $\text{Cyc } A_k$ в пространствах $\bigoplus_{j=1}^n W_{p,0}^k[0, 1]$ и $\bigoplus_{j=1}^n W_p^k[0, 1]$ существенно различны.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Для $\alpha = 1$, т.е. для оператора $A_k = \lambda_1 J_k \oplus \dots \oplus \lambda_n J_k$, теорема 10 получена в [8]. Для оператора J^α , действующего в пространстве $W_p^k[0, 1]$ (т.е. при $n = 1$), теорема 10 доказана в [6].

Объединяя теоремы 7, 10, приходим к основному результату заметки.

ТЕОРЕМА 13. Пусть либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\alpha > \max_j (k_j - 1/p)$. Положим

$$W_1 = \bigoplus_{i=1}^l W_p^{k_i}[0, 1], \quad W_{1,0} = \bigoplus_{i=1}^l W_{p,0}^{k_i}[0, 1], \quad W_{2,0} = \bigoplus_{i=l+1}^n W_{p,0}^{k_i}[0, 1].$$

Пусть также операторы

$$A_1 = \bigoplus_{i=1}^l \lambda_i J_{k_i}^\alpha, \quad A_{1,0} = \bigoplus_{i=1}^l \lambda_i J_{k_i,0}^\alpha, \quad A_{2,0} = \bigoplus_{i=l+1}^n \lambda_i J_{k_i,0}^\alpha$$

действуют в пространствах W_1 , $W_{1,0}$, $W_{2,0}$ соответственно. Тогда

$$\text{Cyc}(A_1 \oplus A_{2,0}) = \text{Cyc}(A_{1,0} \oplus A_{2,0}) \cap (\text{Cyc } A_1 \oplus W_{2,0}),$$

где множества $\text{Cyc}(A_{1,0} \oplus A_{2,0})$ и $\text{Cyc } A_1$ описаны в теоремах 6, 7, 10, соответственно. В частности, если $\alpha < k_i - 1$ (в этом случае $\alpha \in \mathbb{Z}_+$) для $i = \overline{1, l}$, то система векторов $f_i = \{f_{i1}, \dots, f_{in}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, порождает циклическое подпространство для оператора A , если выполнены следующие условия:

1) матрица

$$W(0) = \begin{pmatrix} f_{11}(0) & f_{21}(0) & \dots & f_{N1}(0) \\ f'_{11}(0) & f'_{21}(0) & \dots & f'_{N1}(0) \\ f_{11}^{(\alpha-i)}(0) & f_{21}^{(\alpha-i)}(0) & \dots & f_{N1}^{(\alpha-i)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1l}(0) & f_{2l}(0) & \dots & f_{Nl}(0) \\ f'_{1l}(0) & f'_{2l}(0) & \dots & f'_{Nl}(0) \\ f_{1l}^{(\alpha-i)}(0) & f_{2l}^{(\alpha-i)}(0) & \dots & f_{Nl}^{(\alpha-i)}(0) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг, т.е. $\text{rank } W(0) = \alpha l$;

2) имеет место оценка

$$N \geq \begin{cases} \alpha l, & \text{если } \arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j, & 1 \leq i, j \leq n, \\ \max(\alpha l, n), & \text{если } \arg \lambda_i \leq \arg \lambda_j, & 1 \leq i \leq j \leq n; \end{cases}$$

3а) в случае $\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j$, $1 \leq i, j \leq n$, каждая из функций $F_j = \sum_{i=1}^N |f_{ij}(x)|$ удовлетворяет ε -условию (3);

3б) в случае $\arg \lambda_i \leq \arg \lambda_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$, матрица

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda_1 x / \lambda_2) & f_{12}(\lambda_1 x / \lambda_3) & \dots & f_{1n}(\lambda_1 x / \lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N1}(\lambda_1 x / \lambda_2) & f_{N2}(\lambda_1 x / \lambda_3) & \dots & f_{Nn}(\lambda_1 x / \lambda_n) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный $*$ -ранг, а именно $*\text{-rank } F(x) = n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wonham M. W. Linear Multivariable Control. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
2. Nikolskii N. K., Vasjunin V. I. // J. Operator Theory. 1981. V. 10. P. 307–330.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
4. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
5. Цекановский Э. Р. // УМН. 1965. Т. 20. № 6. С. 169–172.
6. Domanov I. Yu., Malamud M. M. Invariant and hyperinvariant subspaces of an operator J^α and related operator algebras in Sobolev spaces // Linear Algebra and Appl. (to appear).
7. Malamud M. M. // Operator Theory Advances Appl. Integral and Differential Operators. 1998. V. 102. P. 143–167.
8. Domanov I. Yu. // Methods of Functional Analysis and Topology. 1999. V. 1. № 5. P. 1–12.

Донецкий национальный университет
E-mail: domanovi@yahoo.com

Поступило
04.07.2001