Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Терсенов, О некоторых постановках задач Коши и Дирихле, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 151–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:05:05

О некоторых постановках задач Коши и Дирихле

С. А. Терсенов

1. Задача Коши.

ЗАДАЧА 1.1. В области $Q = \mathbb{R}^n \times (t > 0)$ рассмотрим параболическую систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \leq 2b} A_k(x, t) D^k u, \quad u = (u_1, \dots, u_n). \quad (1.1)$$

В области $t > 0$ рассмотрим достаточно гладкие и ограниченные функции $t = f_k(x)$, $k = 0, \dots, n, \dots$, $f_0(x) = 0$, удовлетворяющие условию $\max_{\mathbb{R}^n} f_k(x) < \min_{\mathbb{R}^n} f_{k+1}$, $k = 0, \dots, n, \dots$. Рассмотрим задачу Коши в следующей постановке: найти в Q ограниченное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k u(x, f_k(x)) = f(x) = (f_1, \dots, f_n), \quad (1.2)$$

где B_k – постоянные $n \times n$ матрицы.

Таким образом начальные условия даются как линейная комбинация значений решения на гиперплоскостях $t = f_k(x)$. Если $u(x, 0) = \varphi(x)$, то решение $u(x, t)$ дается формулой

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

где $\Gamma(x, \xi, t)$ – фундаментальная матрица решений. Подставляя (1.3) в (1.2), получим систему интегральных уравнений

$$\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, f_k(x)) \varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (1.4)$$

При помощи оценок (см. [1]) элементов матрицы $\Gamma(x, \xi, t)$ можно легко получить достаточные условия однозначной разрешимости системы уравнений (1.4) и задачи в терминах элементов матриц B_k .

Рассмотрим следующее уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au, \quad a \leq 0. \quad (1.5)$$

В этом случае для $u(x, 0) = \varphi(x)$ будем иметь одно интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, f_k(x)) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (1.6)$$

где d_k – постоянные, а Γ – фундаментальное решение (1.5).

Будем искать решение уравнения (1.6) методом последовательных приближений:

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} d_k \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, f_k(x)) \varphi_{n-1}(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Имеем

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, f_k(x)) [\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)] d\xi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.8)$$

Пусть $f(x) \in C(\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу принципа максимума

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \delta^n |f|_0, \quad |f|_0 = \max_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

где $\delta = \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|$. Пусть $\delta < 1$. Тогда $\varphi_n(x)$ сходится к непрерывной функции $\varphi(x)$ – решению уравнения (1.6), а решение задачи дается формулой типа (1.3).

Пусть $f(x) \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, a_{ij} , a_i , a принадлежат $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q})$, и пусть $f_k(x) = a_k$ – постоянные: $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$. Тогда $\varphi_n(x) \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и при условии $c\delta < 1$ последовательность $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в норме $H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(x) \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, где $c > 0$ не зависит от $f(x)$ (см. [2]).

При невыполнении условия $\delta < 1$ соответствующая однородная задача в зависимости от d_k и a_k может иметь нетривиальное решение. Рассмотрим уравнение $u_t = u_{xx}$ и пусть при заданном n имеем $1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-n^2 a_k} = 0$. Тогда однородное уравнение, соответствующее (1.6), имеет нетривиальное решение $\varphi(x) = \cos nx$. Решением однородной задачи будет функция $u = e^{-n^2 t} \cos nx$.

Задача 1.2. Пусть снова $f_k = a_k$ – постоянные, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{2p} = T$. Рассмотрим в Q полосы $Q_s = \mathbb{R}^n \times (a_s < t < a_{s+1})$, $s = 0, \dots, 2p-1$. В полосе Q_s рассмотрим параболическую систему уравнений вида

$$(-1)^s u_t = Lu, \quad (1.9)$$

которая в Q_{2k} прямо параболическая, а в Q_{2k+1} обратно параболическая.

В области $Q_T = \sum_{s=0}^{2p-1} Q_s$ рассмотрим задачу Коши в следующей постановке: найти непрерывную в $\overline{Q}_T$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

- 1) $u(x, t)$ в полосах Q_s является решением уравнения (1.9);
- 2) $u(x, t)$ удовлетворяет одному из начальных условий

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & u(x, 0) = \varphi(x), \\ \beta) \quad & u(x, a_{2p}) = \psi(x). \end{aligned}$$

Единственность. Обозначим через $u_s = u$ в Q_s . Пусть $\varphi = 0$. Тогда $u_0 = 0$ в Q_0 . В силу непрерывности решения в $\overline{Q}_T$ функция u_1 в Q_1 будет решением обратной задачи $-u_{1t} = Lu_1$ в Q_1 , $u_1(x, a_1) = u_0(x, a_1) = 0$. В силу единственности решения обратной задачи $u_1 = 0$. Продолжая этот процесс получим, что $u = 0$ в Q_T . Аналогично единственность доказывается и в случае $\psi = 0$.

Существование. Пусть постоянные a_s удовлетворяют условию

$$a_{2s+2} - a_{2s+1} = a_{2s+1} - a_{2s}, \quad s = 0, \dots, p-1, \quad (1.10)$$

и пусть коэффициенты Lu не зависят от t . Тогда фундаментальное решение для прямо параболического уравнения будет иметь вид $\Gamma(x, \xi, t - \tau)$, а для обратно параболического – $\Gamma(x, \xi, \tau - t)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} u_{2s} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, t - a_{2s}) \varphi(\xi) d\xi && \text{в } Q_{2s}, \\ u_{2s+1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \xi, a_{2s+2} - t) \varphi(\xi) d\xi && \text{в } Q_{2s+1} \end{aligned}$$

и в силу (1.10) имеем $u_{2s}(x, a_{2s+2} - a_{2s}) = u_{2s+1}(x, a_{2s+2} - a_{2s+1})$, что доказывает непрерывность $u(x, t)$ в $\overline{Q}_T$.

ЗАДАЧА 1.3. В области $Q = \mathbb{R}^n \times (t > 0)$ рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$u_{tt} = Lu, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

и задачу Коши в следующей постановке: найти решение $u(x, t)$ уравнения (1.11), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u(x, f_k(x)) = \mu(x), \quad u_t(x, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_t(x, f_k(x)) = \nu(x). \quad (1.12)$$

Как и выше, имея представление решения обычной задачи Коши с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, условия (1.12) сведутся к исследованию системы уравнений относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Рассмотрим случай уравнения колебания и пусть $f_k(x) = a_k$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

Представим решение уравнения (1.13) в виде

$$u(x, t) = F(x - t) + \Phi(x + t), \quad F, \Phi \in C^2(\mathbb{R}).$$

Так как $u(x, 0) = F(x) + \Phi(x)$, $u_t(x, 0) = -F'(x) + \Phi'(x)$, условия (1.12) относительно F и Φ будут иметь вид

$$F(x) + \Phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k [F(x - a_k) + \Phi(x + a_k)] = \mu(x), \quad (1.14)$$

$$-F'(x) + \Phi'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k [-F'(x - a_k) + \Phi'(x + a_k)] = \nu(x). \quad (1.15)$$

Интегрируя (1.15), получим

$$-F(x) + \Phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k [-F(x - a_k) + \Phi(x + a_k)] = \int_0^x \nu(\xi) d\xi + C. \quad (1.16)$$

Из (1.14) и (1.16) имеем

$$F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k F(x - a_k) = \delta_1(x), \quad \Phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \Phi(x + a_k) = \delta_2(x), \quad (1.17)$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \mu(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \nu(\xi) d\xi - \frac{1}{2} C, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \mu(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \nu(\xi) d\xi + \frac{1}{2} C.$$

Пусть $\mu(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\nu(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Для производных $F^{(s)}$ и $\Phi^{(s)}$, $s = 0, 1, 2$, получим

$$F^{(s)} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k F^{(s)}(x - a_k) = \delta_1^{(s)}(x), \quad \Phi^{(s)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \Phi^{(s)}(x + a_k) = \delta_2^{(s)}(x).$$

Пусть выполняется условие $\delta < 1$. Тогда применяя метод последовательных приближений, можно показать, что последовательные приближения $F_n^{(s)}(x)$, $\Phi_n^{(s)}(x)$ сходятся равномерно к некоторым функциям $f_s(x)$, $\varphi_s(x)$, причем $f_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $f'_0 = f_1$, $f''_0 = f_2$, $\varphi'_0 = \varphi_1$, $\varphi''_0 = \varphi_2$.

Пусть $\mu = \nu = 0$. Тогда решениями уравнений (1.17) будут

$$F(x) = -\frac{1}{2} C \sum_{s=0}^{\infty} (-\beta)^s, \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} C \sum_{s=0}^{\infty} (-\beta)^s, \quad \beta = \sum_{k=1}^{\infty} d_k < \infty.$$

Отсюда $F(x) + \Phi(x) = 0$, $-F'(x) + \Phi'(x) = 0$, т.е. задача при условии $\mu = \nu = 0$ и $\delta < 1$ имеет решение и оно единственно. Если $\delta \geq 1$, то, как и выше, в зависимости от d_k и a_k однородная задача может иметь нетривиальное решение. Пусть $a_k = k\pi$, $d_k = (-1)^k \gamma_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = -1$, т.е. условие $\delta < 1$ не выполняется. Решением однородной задачи будет функция $u(x, t) = a_1 \sin(x - t) + a_2 \cos(x + t)$, a_1, a_2 – постоянные.

2. Задача Дирихле. В области $Q = \mathbb{R}^{n-1} \times (x_n > 0)$ рассмотрим уравнение эллиптического типа порядка $2n$

$$Lu = 0, \quad (2.1)$$

и пусть $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим задачу Дирихле в Q в следующей постановке: найти решение (2.1) в Q , удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^s u}{\partial x_n^s} \Big|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{ks} \frac{\partial^s u}{\partial x_n^s} \Big|_{x_n=f_k(x')} = f_s(x'), \quad s = 0, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

Как и выше, если известно интегральное представление обычной задачи Дирихле для Lu (см. [3]) при условиях

$$\frac{\partial^s u}{\partial x_n^s} \Big|_{x_n=0} = \varphi_s(x'), \quad s = 0, \dots, n-1,$$

то подставив это представление для $\varphi_s(x')$ в (2.2), получим систему интегральных уравнений. Ниже рассмотрим частные случаи этой задачи, когда $f_k = a_k$.

Задача 2.1. В полупространстве $\mathbb{R}^2 \times (z > 0)$ рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Ищется гармоническая функция в $\mathbb{R}^2 \times (z > 0)$, удовлетворяющая условию

$$u(x, y, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u(x, y, a_k) = f(x, y), \quad (2.3)$$

где d_k – постоянные. Если $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, то

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi, \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta, \quad (2.4)$$

и условие (2.3) принимает вид

$$\varphi(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{a_k}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + a_k^2]^{3/2}} d\xi d\eta = f(x, y). \quad (2.5)$$

В силу принципа максимума и при условии $\delta < 1$, как и выше, нетрудно построить решение методом последовательных приближений. Более того, решение единственно.

Задача 2.2. Рассмотрим теперь уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$$

в круге $x^2 + y^2 < 1$. Пусть заданы числа $1 > r_1 > \dots > r_n > \dots$, где r_n может стремиться к 0. В круге $x^2 + y^2 < 1$ ищется гармоническая функция $u(r, \varphi)$, удовлетворяющая условию

$$u(1, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k u(r_k, \varphi) = f(\varphi). \quad (2.6)$$

Представим гармоническую функцию $u(r, \varphi)$ в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} r^s (a_s \cos s\varphi + b_s \sin s\varphi). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), для определения a_s, b_s получим следующую систему:

$$a_s \varepsilon_s = \gamma_s, \quad s = 0, \dots, n, \dots, \quad b_s \varepsilon_s = \beta_s, \quad s = 1, \dots, n, \dots, \quad (2.8)$$

где γ_s и β_s — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$ и $\varepsilon_s = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k r_k^s$. Если $\varepsilon_s \neq 0$ для всех s , например это выполняется при условии $\delta < 1$, то система (2.8) однозначно разрешима относительно a_s, b_s и существует единственное решение задачи. Если $\varepsilon_s = 0$, при $s = q_1, \dots, q_m$, то задача разрешима только при условии, что коэффициенты Фурье $f(x)$, $\gamma_s = \beta_s = 0$ для $s = q_1, \dots, q_m$ и решение не единственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. В. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, М., 1964. [2] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967. [3] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, ОГИЗ, М.—Л., 1948.

С. А. Терсенов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск

Поступило

26.09.2008

Исправленный вариант

16.08.2009