Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Рыков, О возможности распространения теории законов сохранения на некоторые вырожденные параболические системы уравнений, описывающие процессы сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 300–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:18:06

О возможности распространения теории законов сохранения на некоторые вырожденные параболические системы уравнений, описывающие процессы сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации

Ю. Г. Рыков

Рассматривается вырожденная параболическая система уравнений многокомпонентной двухфазной фильтрации. Показано, что к этой системе можно подойти как к системе законов сохранения и применять понятия, выработанные в соответствующей теории: гиперболичность, ударные волны, соотношения Гюгонио, условия устойчивости, задача Римана, энтропия и т.п. Продемонстрирована специфика применения такого рода понятий в случае многокомпонентной фильтрации. На примере двухкомпонентной смеси описаны специфические свойства решений задачи Римана.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Описание проблематики. В настоящей работе мы будем рассматривать математическую структуру системы уравнений двухфазной многокомпонентной фильтрации для одной пространственной переменной. С физической точки зрения эта система уравнений описывает процесс движения многокомпонентной смеси в пористой среде при наличии двух фаз (например, жидкость и газ) с возможностью фазовых переходов между фазами и представляет собой набор законов сохранения массы каждого компонента, дополненный законом фильтрации Дарси. Описанная система уравнений представляет собой вырожденную параболическую систему уравнений с нетривиальной структурой. Поскольку указанная система уравнений используется для прогноза продуктивности разработки месторождений нефти и газа, то она интенсивно изучалась численно. Проведенные многочисленные расчеты показали наличие в решениях разрывов всех искомых функций (что характерно для систем квазилинейных гиперболических уравнений), кроме давления. Давление же ведет себя подобно решениям параболических уравнений, за исключением того, что теряет гладкость (но не непрерывность) в точках разрыва других искомых функций. То есть, численные исследования показывают, что решения системы уравнений двухфазной многокомпонентной фильтрации обладают и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00288) и программы № 1 ОМН РАН.

гиперболическими, и параболическими свойствами. С физическими основами процесса многокомпонентной фильтрации можно ознакомиться, например, по книге [1], общий вывод основных уравнений содержится, например, в [2].

Целью предлагаемой статьи является постановка задачи Коши для систем уравнений типа многокомпонентной двухфазной фильтрации в случае одной пространственной переменной при условии наличия обеих фаз и их сжимаемости. Вследствие вырожденности рассматриваемой системы уравнений вопрос этот не является простым. Насколько известно автору, предложенный в настоящей статье подход является новым. Поскольку работа совершенно не претендует на какой-либо вид обзора предшествующих результатов, то в целях иллюстрации приведем лишь некоторые ссылки, демонстрирующие основные направления развития теории фильтрационных течений. При этом мы не будем рассматривать то обширное направление исследований, которое занимается двухфазными течениями с использованием полной системы уравнений гидродинамического типа. Мы ограничимся работами, по сути использующими закон фильтрации Дарси вместо закона сохранения импульса.

Математические модели фильтрации хорошо изучены в случае одного компонента и одной фазы, когда неизвестной функцией является только давление (или плотность), см., например, книгу [3]. В этом случае ситуация моделируется с помощью вырождающихся уравнений параболического типа, см., например, обзор [4]. В случае многих компонент имеется обширная литература, посвященная несжимаемому случаю. В этой ситуации система уравнений многокомпонентной фильтрации (в случае одной пространственной переменной и при предположении о постоянстве скорости фильтрации) может быть преобразована в систему законов сохранения, написанную для объемных концентраций компонент. Эта система уравнений является нестрогой гиперболической, и ее можно пытаться исследовать известными методами. Недавний обзор достижений в этой области можно найти, например, в [2]. Однако, стоит подчеркнуть, что свойство нестрогой гиперболичности существенно усложняет подобное исследование, см. статью [5], посвященную модельным системам уравнений (но часть из которых имеет физическое происхождение, в частности, происходит из описания процессов фильтрации) и иллюстрирующую разные стороны математического понятия нестрогой гиперболичности.

В последнее время возник интерес к системам уравнений, описывающих сжимаемую многокомпонентную фильтрацию. Этот интерес вызван как необходимостью проводить более точные расчеты течений на нефтегазовых месторождениях, так и нетривиальностью самой математической модели, связанной с наличием вырождения. Более подробные ссылки на соответствующие работы математического характера будут сделаны по ходу изложения.

Мы рассмотрим фильтрационное течение сжимаемых многокомпонентных смесей с фазовыми переходами в случае наличия обеих фаз. Для более ясного изложения идей в настоящей статье мы будем рассматривать систему уравнений, описывающую упрощенную физическую модель, которая не учитывает влияния гравитации, капиллярных сил, дисперсионных эффектов, геомеханических свойств породы и т.п. Также мы не будем рассматривать изменений энергии и считать температуру постоянной величиной. Все эти допущения часто принимаются даже для практических расчетов, так как могут достаточно хорошо отражать реальную ситуацию на месторождениях. Мы покажем, что если подойти к указанной системе уравнений как к вырожденной системе законов сохранения, то можно прийти к естественному по-

нению характеристик, сформулировать понятие обобщенного решения и применять методы, развитые в теории законов сохранения. Таким образом, в частности, можно изучать задачу Римана, математически формулировать понятие энтропии, вводить регуляризацию методом малой вязкости (что в теории фильтрации имеет ясный физический смысл, см., например, [3]) и т.д. Однако все эти понятия приобретают специфические черты, которые не характерны для систем уравнений гиперболического типа. Отметим, что с современным состоянием теории законов сохранения можно ознакомиться, например, по книгам [6]–[9].

Структура работы выглядит следующим образом. В п. 2 мы опишем основной объект исследований – систему уравнений сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации. Далее, запишем ее в форме вырожденной системы законов сохранения, введем понятие характеристик и дадим определение обобщенного решения в слабом смысле с учетом соответствующих соотношений Гюгоньо и условий устойчивости на разрывах искомых функций. В п. 3 будет сформулирована задача Римана для двух компонент и исследованы свойства ее автомодельных решений в предположении, что такие решения существуют. Наконец, в п. 4 мы обсудим математический смысл введения понятия энтропии.

2. Основная система уравнений. Формулировка понятия обобщенного решения. Одномерная система уравнений сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации в случае наличия обеих фаз и при упрощающих физических предположениях, упомянутых в п. 1, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(x_{iG}\varrho_G s + x_{iL}\varrho_L(1-s))) + \frac{\partial}{\partial x}(x_{iG}\varrho_G V_G + x_{iL}\varrho_L V_L) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Здесь N – число компонент в смеси, $\phi > 0$ представляет собой пористость, $x_{iG} > 0$, $x_{iL} > 0$ являются термодинамическими константами равновесия (т.е. представляют собой молярные концентрации компонента i в газовой (G) и жидкой (L) фазах) для газовой и жидкой фазы соответственно, $\varrho_G > 0$, $\varrho_L > 0$ – плотности газовой и жидкой фаз соответственно, $0 < s < 1$ – насыщенность газовой фазы. При этом скорости фильтрации газовой и жидкой фаз V_G и V_L имеют вид

$$V_G = -\frac{Kk_{rG}}{\mu_G} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V_L = -\frac{Kk_{rL}}{\mu_L} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.2)$$

где $K > 0$ – так называемая *абсолютная проницаемость породы*, $k_{rG} \geq 0$, $k_{rL} \geq 0$, $k_{rG} + k_{rL} > 0$ – относительные проницаемости газовой и жидкой фаз, а $\mu_G > 0$, $\mu_L > 0$ представляют собой вязкости газовой и жидкой фаз соответственно, $P > 0$ обозначает давление.

Используя соотношения (2.2), запишем систему (2.1) в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(x_{iG}\varrho_G s + x_{iL}\varrho_L(1-s))) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(x_{iG}\varrho_G \frac{k_{rG}}{\mu_G} + x_{iL}\varrho_L \frac{k_{rL}}{\mu_L} \right) \left(-K \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (2.3)$$

При этом $i = 1, \dots, N$ и

$$\begin{aligned} \varrho_G &= \varrho_G(x_{1G}, \dots, x_{NG}, P), & \varrho_L &= \varrho_L(x_{1L}, \dots, x_{NL}, P), \\ \mu_G &= \mu_G(x_{1G}, \dots, x_{NG}, P), & \mu_L &= \mu_L(x_{1L}, \dots, x_{NL}, P), \\ k_{rG} &= k_G(s), & k_{rL} &= k_L(1-s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Мы будем считать, что все функции в (2.4) являются достаточно гладкими, например, принадлежат классу C^2 . Также будем считать, что пористость ϕ и абсолютная проницаемость K в (2.3) являются C^2 -функциями от пространственной переменной x и не зависят от всех других величин.

Из термодинамики многокомпонентной смеси известно, см. [1], что должны выполняться условия нормировки $\sum_i x_{iG} = \sum_i x_{iL} = 1$ и, кроме того, переменные $x_{1G}, \dots, x_{NG}, x_{1L}, \dots, x_{NL}$ связаны N дополнительными алгебраическими соотношениями, выражающими собой равенство химических потенциалов фаз. Будем опять считать, что эти нелинейные зависимости выражаются функциями класса C^2 . Таким образом, из этих величин имеются ровно $N - 2$ независимых, которые мы будем обозначать через $y_k, k = 1, \dots, N - 2$.

Итак, система (2.3) представляет собой систему из N уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $s, y_1, \dots, y_{N-2}, P$.

Для удобства и сокращения записи введем следующие соглашения. Буква i всегда обозначает индекс, меняющийся от 1 до N , буква j всегда обозначает индекс, меняющийся от 1 до $N - 1$, а буква k всегда обозначает индекс, меняющийся от 1 до $N - 2$. Также пусть запись A_m обозначает вектор с соответствующими компонентами (какие это будут компоненты, будет всегда ясно из контекста), запись $(A_m)_q$ обозначает вектор с компонентами, являющимися частными производными от A_m по q , а запись $(A_m)_{q_l}$ – матрицу Якоби частных производных от компонент A_m по переменным q_l (при этом количество компонент будет определяться тем, используем ли мы индекс i, j или k). Также пусть запись 0_m обозначает строку или столбец (в зависимости от контекста), состоящий из m нулей.

Обозначим

$$\begin{aligned} X_i(x, s, y_1, \dots, y_{N-2}, P) &\equiv \phi(x)(x_{iG}\varrho_G s + x_{iL}\varrho_L(1-s)), \\ F_i(x, s, y_1, \dots, y_{N-2}, P) &\equiv K(x)\left(x_{iG}\varrho_G \frac{k_G(s)}{\mu_G} + x_{iL}\varrho_L \frac{k_L(1-s)}{\mu_L}\right), \\ Q &\equiv -\frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и запишем систему (2.3) в форме вырожденной системы законов сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} X_i + \frac{\partial}{\partial x} (F_i Q) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -Q. \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.6) представляет собой систему из $N + 1$ уравнений в частных производных первого порядка от вектора неизвестных функций

$$\vec{U} = (s, y_1, \dots, y_{N-2}, P, Q).$$

Будем теперь считать, что функции X_i, F_i являются некоторыми произвольными C^2 функциями от переменных $(x, s, y_1, \dots, y_{N-2}, P)$ и рассмотрим систему (2.6) с общей точки зрения. Для этого, выполнив соответствующие дифференцирования, запишем (2.6) в недивергентной форме:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (X_i)_s & (X_i)_{y_k} & (X_i)_P & 0_i \\ 0 & 0_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \begin{pmatrix} Q(F_i)_s & Q(F_i)_{y_k} & Q(F_i)_P & F_i \\ 0 & 0_k & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \\ &= -Q \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, у системы (2.7) можно стандартным образом выписать уравнение для собственных значений:

$$\det D \equiv \det \begin{pmatrix} Q(F_i)_s - \lambda(X_i)_s & Q(F_i)_{y_k} - \lambda(X_i)_{y_k} & Q(F_i)_P - \lambda(X_i)_P & F_i \\ 0 & 0_k & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

причем из вида матрицы в (2.8) ясно, что может существовать не более $N - 1$ собственных значений λ_j . Также можно искать левые $\vec{l}_j = (l_j^1, \dots, l_j^{N+1})$ и правые $\vec{r}_j = (r_j^1, \dots, r_j^{N+1})$ собственные вектора системы (2.7), т.е.

$$\vec{l}_j \cdot D|_{\lambda=\lambda_j} = 0, \quad D|_{\lambda=\lambda_j} \cdot \vec{r}_j = 0.$$

Каждому левому собственному вектору соответствует характеристическое соотношение в форме

$$\vec{l}_j \cdot \begin{pmatrix} (X_i)_s & (X_i)_{y_k} & (X_i)_P & 0_i \\ 0 & 0_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right) = -Q \vec{l}_j \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим здесь, что в работах [10], [11] была выписана некоторая форма уравнений многокомпонентной фильтрации, названная автором этих работ канонической, гиперболическая часть которой (состоящая из $N - 1$ уравнений) основывалась на свойстве в некотором смысле “распространения” возмущений неизвестных функций, кроме давления, вдоль характеристик. Характеристики при этом понимались как линии движения бесконечно малых разрывов, а дифференциальное уравнение, описывающее такое “распространение” возмущений, включало в себя “замороженные” комбинации пространственных производных от функции давления. Полезность записи такого рода канонической формы определялось удобством для численных расчетов. Нам представляется, что с математической точки зрения введение характеристик посредством формы записи (2.7) является более естественным. Кроме того, множество уравнений вдоль характеристик (2.9) фактически представляет собой также более естественное обобщение гиперболической части канонической формы из [10], [11].

Далее, наряду с некоторым вектором $\vec{q} = (q^1, \dots, q^{N+1})$ будем рассматривать его проекцию $\vec{q}' = (q^1, \dots, q^{N-1})$, состоящую из первых $N - 1$ координат вектора $\vec{q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем некоторый набор векторов $\vec{q}_j$ *линейно независимым по проекции*, если линейно независимы вектора $\vec{q}'_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Систему уравнений типа (2.6) назовем *почти гиперболической*, если характеристическое уравнение (2.8) имеет ровно $N - 1$ действительных и различных корней λ , а также существуют соответственные наборы левых и правых собственных векторов системы (2.7), каждый из которых содержит ровно $N - 1$ линейно независимых по проекции векторов.

Далее везде будем считать, что система (2.6) является почти гиперболической. Для нее в полосе

$$\Pi_T \equiv \{(t, x) : (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\}$$

зададим начальные данные

$$s(0, x) = s^0(x), \quad y_1(0, x) = y_1^0(x), \quad \dots, \quad y_{N-2}(0, x) = y_{N-2}^0(x), \quad P(0, x) = P^0(x) \quad (2.10)$$

и рассмотрим задачу Коши (2.6), (2.10). Решение этой задачи будем понимать в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть функции $s^0(x), y_1^0(x), \dots, y_{N-2}^0(x), P^0(x)$ являются ограниченными измеримыми функциями на $\mathbb{R}$. Тогда назовем ограниченные измеримые в Π_T функции $s(t, x), y_1(t, x), \dots, y_{N-2}(t, x)$ и непрерывную в Π_T функцию $P(t, x)$ *обобщенным решением задачи* (2.6), (2.10), если для любой пробной функции $\varphi \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при фиксированном $t \in [0, T]$, $\varphi \equiv 0$ при $T_1 \leq t \leq T$, $T_1 < T$, выполнены следующие интегральные тождества:

$$\begin{aligned} \iint \left(X_i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F_i Q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt DX + \int X_i^0(x) \varphi(0, x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \iint \left(P \frac{\partial \varphi}{\partial x} - Q \varphi \right) dt dx = 0; \end{aligned} \quad (2.11)$$

здесь интегрирование проводится по всей полосе Π_T и обозначено

$$X_i^0(x) \equiv X_i(s^0(x), y_1^0(x), \dots, y_{N-2}^0(x), P^0(x)).$$

Введем также следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что обобщенное решение задачи (2.6), (2.10) имеет *сильную особенность*, если функции $s(t, x), y_1(t, x), \dots, y_{N-2}(t, x)$ терпят разрыв вдоль некоторой кривой в полосе Π_T . Будем говорить, что обобщенное решение задачи (2.6), (2.10) имеет *слабую особенность*, если функции $s(t, x), y_1(t, x), \dots, y_{N-2}(t, x)$ непрерывны, в то время как их частные производные по t и x терпят разрыв вдоль некоторой кривой в полосе Π_T , а функция $P(t, x)$ является непрерывно-дифференцируемой в окрестности этой кривой.

ТЕОРЕМА 1. *Слабые особенности могут распространяться со скоростью λ , которая является корнем характеристического уравнения (2.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы проводится стандартными методами, см., например, [12], его также можно найти в [13], [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойство системы (2.6), выраженное теоремой 1, можно также положить в основу определения понятия характеристик, что фактически и было сделано в [13].

Рассмотрим теперь более детально сильные особенности в смысле определения 4 решений системы (2.6) в смысле определения 3. Пусть уравнение $x = z(t)$ определяет кривую в полосе Π_T , на которой соответствующие функции терпят разрыв. Пусть запись $y^\pm$ обозначает значения функции y справа и слева от разрыва соответственно, т.е. $y^\pm \equiv y(t, z(t) \pm 0)$. Заметим, что, аналогично тому, как это показывается в теории систем гиперболических законов сохранения, см., например, основополагающую статью [15], формулировка понятия решения системы (2.6) в смысле обобщенных функций, см. соотношения (2.11), говорит, что на разрывах должны выполняться соотношения Гюгонио

$$\frac{dz}{dt}(X_i^+ - X_i^-) = Q^+ F_i^+ - Q^- F_i^-, \quad i = 1, \dots, N, \quad P^+ = P^-. \quad (2.12)$$

Разберемся теперь в структуре множества скачков более подробно. А именно, зафиксируем значение времени $t = t_0$ и соответствующие этому моменту времени значения $\vec{U}^- = (s^-, y_1^-, \dots, y_{N-2}^-, P^-, Q^-)$ на линии разрыва $x = z(t)$ и изучим структуру множества возможных значений $\vec{U}^+ = (s^+, y_1^+, \dots, y_{N-2}^+, P^+, Q^+)$ в соответствии с соотношениями (2.12). Обозначим при этом $\sigma \equiv (dz/dt)(t_0)$.

Поскольку давление P не изменяется на скачке (см. (2.12)), а величины $Q^\pm$ входят в соотношения (2.12) линейным образом, то выразим из последнего уравнения (2.12) величину Q^+ и подставим в оставшиеся уравнения. Тогда, обозначая

$$\Phi_j \equiv F_N^+(X_j^+ - X_j^-) - F_j^+(X_N^+ - X_N^-); \quad \Psi_j \equiv F_j^+ F_N^- - F_j^- F_N^+,$$

получим

$$\sigma \Phi_j = Q^- \Psi_j. \quad (2.13)$$

При фиксированных значениях вектора $\vec{U}^-$ система (2.13) представляет собой систему $N - 1$ алгебраических уравнений относительно N неизвестных $s^+, y_1^+, \dots, y_{N-2}^+, \sigma$.

Для того чтобы изучить структуру множества скачков, описываемых уравнениями (2.13), введем вначале некоторые обозначения. Пусть

$$A \equiv \left(\frac{F_N(X_j)_s - F_j(X_N)_s}{F_N}; \frac{F_N(X_j)_{y_k} - F_j(X_N)_{y_k}}{F_N} \right),$$

$$B \equiv \left(Q \frac{F_N(F_j)_s - F_j(F_N)_s}{F_N}; Q \frac{F_N(F_j)_{y_k} - F_j(F_N)_{y_k}}{F_N} \right). \quad (2.14)$$

Заметим, что по нашему соглашению об употреблении индексов A и B являются матрицами размера $(N - 1) \times (N - 1)$. Напомним также, что $\vec{l}'_j$ и $\vec{r}'_j$ обозначают проекции в смысле определения 1 соответственно левые и правые собственные вектора матрицы D из (2.8), а λ_j обозначает соответствующее собственное число.

ЛЕММА 1. Пусть

$$|F_N| > 0, \quad |\det A| > 0. \quad (2.15)$$

Тогда вектор $\vec{l}'_j = (l^1_j, \dots, l^{N-1}_j)$ удовлетворяет соотношению $\vec{l}'_j \cdot (B - \lambda_j A) = 0$, а вектор $\vec{r}'_j = (r^1_j, \dots, r^{N-1}_j)$ удовлетворяет соотношению $(B - \lambda_j A) \cdot \vec{r}'_j = 0$. Кроме того, $\vec{l}'_m \cdot A \vec{r}'_n = \text{const} \cdot \delta_{mn}$, где $m, n = 1, \dots, N - 1$, а δ_{mn} – символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем равенство $\vec{l}'_j \cdot D|_{\lambda=\lambda_j} = 0$, используя явный вид матрицы D (2.8). При этом из равенства нулю произведения $\vec{l}'_j$ на предпоследний столбец матрицы D очевидно, что компонента l^{N+1}_j находится явным образом, если известны остальные компоненты. Из произведения $\vec{l}'_j$ на последний столбец матрицы D легко получить соотношение $l^N_j = -\sum_{m=1}^{N-1} l^m_j F_m / F_N$, принимая во внимание (2.15). Подставляя это равенство в остальные произведения $\vec{l}'_j$ на столбцы матрицы D , придем к равенству $\vec{l}'_j \cdot (B - \lambda_j A) = 0$.

Расписывая таким же образом равенство $D|_{\lambda=\lambda_j} \cdot \vec{r}'_j = 0$ и действуя аналогично, придем к равенству $(B - \lambda_j A) \cdot \vec{r}'_j = 0$. Здесь только оказывается, что компонента $r^N_j = 0$, а компонента r^{N+1}_j выражается через другие компоненты.

Теперь, следуя стандартным приемам линейной алгебры, нетрудно получить равенство $\vec{l}'_m \cdot A \vec{r}'_n = 0$ при $m \neq n$ и $\vec{l}'_m \cdot A \vec{r}'_n \neq 0$ при $m = n$, используя линейную

независимость по проекции векторов и второе условие (2.15). Доказательство окончено.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены неравенства (2.15). В фазовом пространстве $\vec{U} = (s, y_1, \dots, y_{N-2}, P, Q)$ множество значений $\vec{U}^+$, определяемых соотношениями (2.12), локально представляет собой множество, состоящее из $N - 1$ кривых $\vec{U}_j(\varepsilon)$, $\vec{U}_j(0) = \vec{U}^-$, $j = 1, \dots, N - 1$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ является некоторым малым параметром. При этом существует $N - 1$ скоростей разрыва $\sigma_j(\varepsilon)$, соответствующих кривым $\vec{U}_j(\varepsilon)$. Кроме того, $d\vec{U}_j(0)/d\varepsilon \parallel \vec{r}_j$, а локальная скорость разрыва удовлетворяет соотношению $\sigma_j(0) = \lambda_j(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать по аналогии с книгой [16]. Обозначим $\vec{V} = (s, y_1, \dots, y_{N-2})$. Из (2.12) следует, что, во-первых, давление P на скачке не изменяется и, во-вторых, что справедливы соотношения (2.13). Поскольку $\vec{U}^-$ фиксировано, то фиксировано и $\vec{V}^-$, т.е. фактически можно записать, что $\Phi_j = \Phi_j(\vec{V}^+)$ и $\Psi_j = \Psi_j(\vec{V}^+)$. Для каждого j перепишем (2.13) в следующей форме, учитывая, что $\Phi_j(\vec{V}^-) = \Psi_j(\vec{V}^-) = 0$:

$$\int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\sigma \Phi_j - Q^- \Psi_j] (\vec{V}^- + \tau(\vec{V}^+ - \vec{V}^-)) d\tau = 0$$

или

$$(\sigma \tilde{A} - \tilde{B}) \cdot (\vec{V}^+ - \vec{V}^-) = 0, \quad (2.16)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\equiv \int_0^1 \nabla_{\vec{V}^+} \Phi_j (\vec{V}^- + \tau(\vec{V}^+ - \vec{V}^-)) d\tau, \\ \tilde{B} &\equiv Q^- \int_0^1 \nabla_{\vec{V}^+} \Psi_j (\vec{V}^- + \tau(\vec{V}^+ - \vec{V}^-)) d\tau. \end{aligned}$$

Легко видеть, что в точке $\vec{V}^-$ имеет место соотношение

$$\nabla_{\vec{V}^+} (\sigma \Phi_j - Q^- \Psi_j) = F_N (\sigma A - B). \quad (2.17)$$

Согласно лемме 1 для пары операторов A и B из (2.14) существуют соответствующие собственные числа λ_j и левые $\vec{l}'_j$ и правые $\vec{r}'_j$ собственные вектора. Тогда при малых $|\vec{V}^+ - \vec{V}^-|$ в силу (2.17) пара операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ также имеет ровно $N - 1$ действительных и различных собственных чисел Λ_j и левых $\vec{l}'_j$ и правых $\vec{r}'_j$ собственных векторов. При этом уравнение (2.16) имеет решение $\vec{V}^+ \neq \vec{V}^-$ только при $\sigma = \Lambda_n$ для некоторого n , причем вектор $(\vec{V}^+ - \vec{V}^-) \parallel \vec{r}'_n$ и выполнено

$$\vec{l}'_j \cdot \tilde{A}(\vec{V}^+ - \vec{V}^-) = 0, \quad j \neq n. \quad (2.18)$$

Дифференциал отображения в левой части (2.18), взятый по переменной $\vec{V}^+$ и вычисленный в точке $\vec{V}^-$, очевидно, имеет ранг $N - 2$, и по теореме о неявной функции уравнение (2.18) имеет решение $\vec{V}^+(\varepsilon)$. Решения при разных n будут различными ввиду линейной независимости векторов $\{\vec{r}'_j\}$.

Дифференцируя теперь (2.12) по параметру ε и полагая $\varepsilon = 0$, придем к остальным утверждениям теоремы. Теорема доказана.

Из теории гиперболических систем уравнений хорошо известно, что для единственности решения необходимо выполнение так называемых условий устойчивости или условий типа возрастания энтропии. Введем такие условия и для системы (2.6). Поскольку из теоремы 1 следует, что слабые особенности в системе (2.6) распространяются со скоростями λ_j , то нам представляется естественным искать обобщение условий устойчивости для системы (2.6) на основе аналогичных условий, приведенных в работах [15], [17]. Будем считать, что λ_j упорядочены в порядке возрастания, и положим $\lambda_0^- = -\infty$, $\lambda_N^+ = +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Разрыв решения системы (2.6) называется *устойчивым* (или *энтропийным*), если существует такое $1 \leq n \leq N-1$, что $|\sigma| < \infty$ и

$$\lambda_{n-1}^- \leq \sigma \leq \lambda_n^-, \quad \lambda_n^+ \leq \sigma \leq \lambda_{n+1}^+. \quad (2.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что мы ставим в определении 5 нестрогое неравенство вследствие возможного учета эффектов “невыхуклости”, поскольку структура, например, волн разрежения для системы (2.6) является значительно более сложной, чем в случае привычной гиперболической системы уравнений (см. следующий пункт).

Итак, постановка задачи Коши для системы (2.6) выглядит следующим образом. Найти обобщенное решение системы (2.6) в смысле определения 3, которое удовлетворяет условиям (2.19).

Чтобы иметь возможность контролировать выполнение условий (2.19), для системы (2.6) можно ввести понятие истинной нелинейности по аналогии с работой [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем систему (2.6) *истинно нелинейной* в некоторой области $G \subset \Pi_T$, если $\vec{r}_j \cdot \nabla \lambda_j \neq 0$ в G для любого j .

Это понятие также оказывается полезным при введении понятия энтропии для системы (2.6), которое мы рассмотрим позже.

Далее проиллюстрируем нашу постановку задачи Коши на примере задачи Римана для системы (2.6) в простейшем случае двух компонент.

3. Возможность постановки задачи Римана. Случай двух компонент.

Пусть $N = 2$, справедливы формулы (2.5) и в (2.4) величины x_{iG} , x_{iL} зависят лишь от давления P , т.е. система уравнений (2.6) состоит из трех уравнений с неизвестными функциями s , P , Q . Пусть также величины μ_G , μ_L являются постоянными, а $\phi = K \equiv 1$.

Рассмотрим кусочно-постоянные начальные данные

$$s^0(x) = \begin{cases} s_0^-, & x < 0, \\ s_0^+, & x > 0, \end{cases} \quad P^0(x) = \begin{cases} P_0^-, & x < 0, \\ P_0^+, & x > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Изучим обобщенные решения задачи (2.6), (3.1) при $N = 2$. Также будем предполагать, для определенности, что $P_0^- \geq P_0^+$, и будем рассматривать только класс автомодельных функций, который будет определен ниже. Пусть еще выполнены условия (2.15), что в случае двух компонент означает

$$F_2 \neq 0, \quad F_2(X_1)_s - F_1(X_2)_s \neq 0.$$

Справедливость первого условия следует из физического смысла входящих в него величин. Далее, подставив во второе соотношение выражения (2.5), придем к следующей форме второго условия (2.15):

$$\varrho_G \varrho_L \left(\frac{k_G}{\mu_G} + \frac{k_L}{\mu_L} \right) (x_{1G} x_{2L} - x_{2G} x_{1L}) \neq 0. \quad (3.2)$$

В выражении (3.2) все множители, кроме последнего положительны по своему физическому смыслу. Последний множитель, вспоминая условия нормировки $x_{1G} + x_{2G} = x_{1L} + x_{2L} = 1$, можно переписать так:

$$x_{1G} x_{2L} - x_{2G} x_{1L} = x_{1G} - x_{1L}.$$

В реальных задачах из физического смысла процессов конденсации/испарения следует, что $x_{1G} > x_{1L}$, т.е. выполняется даже более сильное требование, чем (3.2). Таким образом, условия (2.15) оказываются физически обоснованными.

Теперь заметим, что в рассматриваемом случае двух компонент существует единственное собственное число

$$\lambda(s, Q) = Q \frac{F_2(F_1)_s - F_1(F_2)_s}{F_2(X_1)_s - F_1(X_2)_s} = Q\theta(s) \equiv Q \frac{k_G k_L' + k_L k_G'}{\mu_L k_G + \mu_G k_L}. \quad (3.3)$$

Здесь “штрих” обозначает дифференцирование либо по s , либо по $1 - s$ соответственно.

Легко видеть, что для системы типа (2.6), независимо от количества компонент, существует автомодельная переменная $\xi = x/\sqrt{2t}$. Эта переменная отличается от соответствующей переменной для гиперболических систем $\eta = x/t$.

Будем искать автомодельные решения системы (2.6) в виде $s = s(\xi)$, $P = P(\xi)$, $Q = Q(\xi)/\sqrt{2t}$. Тогда легко видеть, что система (2.6), записанная для функций, зависящих только от ξ , сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (“точка” обозначает дифференцирование по ξ):

$$\begin{aligned} \dot{s} &= Q \frac{Q(F_2(F_1)_P - F_1(F_2)_P) - \xi(F_2(X_1)_P - F_1(X_2)_P)}{Q(F_2(F_1)_s - F_1(F_2)_s) - \xi(F_2(X_1)_s - F_1(X_2)_s)}, \\ \dot{P} &= -Q, \\ \dot{Q} &= Q \frac{(Q(F_2)_P - \xi(X_2)_P)(Q(F_1)_s - \xi(X_1)_s) - (Q(F_2)_s - \xi(X_2)_s)(Q(F_1)_P - \xi(X_1)_P)}{Q(F_2(F_1)_s - F_1(F_2)_s) - \xi(F_2(X_1)_s - F_1(X_2)_s)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Как нетрудно заметить, система (3.4) имеет единственную особую точку $Q = 0$ и всюду вне поверхности

$$\xi = \lambda(s, Q) \quad (3.5)$$

в расширенном фазовом пространстве, где $\lambda(s, Q)$ выражается формулами (3.3), удовлетворяет условию существования и единственности решений.

ЛЕММА 2. Если траектория системы (3.4) в расширенном фазовом пространстве не пересекает поверхности (3.5), то знак Q сохраняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $Q > 0$ (это соответствует допущению $P_0^- > P_0^+$ и не ограничивает общности) в некоторой точке ξ^* . Вне поверхности (3.5) функция $Q \in C^1$ как решение системы обыкновенных дифференциальных

уравнений с гладкой правой частью. Предположим, что при некотором значении ξ^0 имеем $Q(\xi^0) = 0$, при этом $Q > 0$ в промежутке между ξ^* и ξ^0 . Тогда $\xi^0 \neq 0$, так как в противном случае мы попадаем на поверхность (3.5). Из последнего уравнения (3.4) и условий (3.2) имеем $|(\ln Q)_\xi| \leq \text{const}$ в окрестности ξ^0 , т.е. в той же окрестности $|\ln Q| \leq \text{const}$, что противоречит предположению $Q(\xi^0) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Вне поверхности (3.5) автомодельное решение задачи (2.6), (3.1) не может иметь следующего вида в окрестности некоторого значения $\xi = \xi^0 \neq \pm\infty$: постоянная в одной из полуокрестностей ξ^0 , непрерывная, отличная от постоянной часть траектории системы (3.4) в другой полуокрестности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО просто. Вне поверхности (3.5) решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.4) удовлетворяют теореме существования и единственности. Если бы указанное в формулировке решение существовало, то это означало бы, что в одной точке существуют два решения: некоторое непрерывное и постоянное: $s = \text{const}$, $P = \text{const}$, $Q = 0$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим здесь, что свойство автомодельных решений, описываемое леммой 3, не справедливо для обычных гиперболических систем, где волна разрежения может примыкать к области постоянных значений неизвестных функций.

ЛЕММА 4. *Пусть функции $\varrho_G, \varrho_L, x_{1G}, x_{1L}$ являются монотонными функциями переменной P и $x_{1G} > x_{1L}$, $\varrho_L > \varrho_G$. Пусть $Q > 0$. В той части траектории системы (3.4), где Q достаточно мало, а $|\xi|$ достаточно велик, справедлива оценка*

$$0 \leq Q \leq \text{const} \cdot e^{-\text{const} \cdot \xi^2}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть непостоянные траектории, описываемые системой (3.4). Из первых двух уравнений (3.4) ясно, что при достаточно больших $|\xi|$ и малых Q величины s и P мало отличаются от постоянных. Учитывая формулы (2.5), легко проверить, что

$$\begin{aligned} & (X_2)_P(X_1)_s - (X_1)_P(X_2)_s \\ &= (\varrho_L - \varrho_G)(s\varrho_G x'_{1G} + (1-s)\varrho_L x'_{1L}) + (x_{1G} - x_{1L})(s\varrho'_G \varrho_L + (1-s)\varrho_G \varrho'_L); \end{aligned}$$

здесь “штрих” обозначает дифференцирование по переменной P . Выражение выше является строго положительным вследствие предположений леммы. Тогда из третьего уравнения (3.4) следует оценка $\dot{Q} \leq -\text{const} \cdot Q\xi$, откуда после интегрирования и получается утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Заметим, что одно из предположений леммы 4 на термодинамические функции соответствует условию (3.2), другие являются естественными для описываемых физических процессов, см. [1], в частности условие, говорящее о том, что плотность жидкой фазы больше плотности газовой фазы.

Посмотрим теперь как выглядят в рассматриваемом случае двухкомпонентной смеси соотношения Гюгонио (2.12). Учитывая соотношения (2.5) из (2.12), получаем

следующие формулы (при $n = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \sigma(s^+ - s^-)(x_{nG}\varrho_G - x_{nL}\varrho_L) &= (x_{nG}\varrho_G - x_{nL}\varrho_L) \left(Q^+ \frac{k_G^+}{\mu_G} - Q^- \frac{k_G^-}{\mu_G} \right) \\ &\quad + x_{nL}\varrho_L \left[Q^+ \left(\frac{k_G^+}{\mu_G} + \frac{k_L^+}{\mu_L} \right) - Q^- \left(\frac{k_G^-}{\mu_G} + \frac{k_L^-}{\mu_L} \right) \right]. \end{aligned}$$

Суммируя по n и вспоминая соотношения нормировки $x_{1G} + x_{2G} = x_{1L} + x_{2L} = 1$, придем к следующей форме соотношений Гюгоню для двухкомпонентной смеси:

$$\begin{aligned} Q^+ \left(\frac{k_G^+}{\mu_G} + \frac{k_L^+}{\mu_L} \right) &= Q^- \left(\frac{k_G^-}{\mu_G} + \frac{k_L^-}{\mu_L} \right) \equiv D, \\ D(\varphi_G(s^+) - \varphi_G(s^-)) &= \sigma(s^+ - s^-), \\ P^+ &= P^-, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\varphi_G(s) = \frac{k_G(s)/\mu_G}{k_G(s)/\mu_G + k_L(1-s)/\mu_L}.$$

Условия устойчивости (2.19) будут теперь выглядеть так (учитывая, что мы ограничились случаем $Q > 0$):

$$\varphi_G'(s^+) \leq \frac{\varphi_G(s^+) - \varphi_G(s^-)}{s^+ - s^-} \leq \varphi_G'(s^-). \tag{3.8}$$

Легко видеть, что (3.8) соответствует известному условию Олейник [18] (условие E) для случая выпуклых функций (строгие неравенства) и функций с одной точкой перегиба.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Заметим, что в практических задачах многокомпонентной фильтрации часто полагают $k_G(s) = s^2$, $k_L(1-s) = (1-s)^2$. Тогда функция $\varphi_G(s)$ является как раз функцией с одной точкой перегиба.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Также отметим, что если $Q < 0$, то знаки неравенств в (3.8) изменятся на противоположные, так что общие условия (2.19) являются в некотором смысле обобщением условия Олейник в случае функций φ_G с простой структурой.

ЛЕММА 5. Для автомодельных решений задачи (2.6), (3.1) при $N = 2$ скачок, разделяющий области, хотя бы в одной из которых искомые функции постоянны, имеет нулевую скорость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если такой скачок существует, то из (3.7) имеем $Q^\pm = 0$, т.е. $D = 0$, а значит, и $\sigma = 0$, если $s^+ \neq s^-$. Но если $s^+ = s^-$, то скачка не будет, так как давление на скачке непрерывно, см. (3.7). Доказательство окончено.

ТЕОРЕМА 3. Если $P_0^+ \neq P_0^-$, то автомодельные решения задачи (2.6), (3.1) обладают бесконечной скоростью распространения возмущений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в задаче присутствует конечная скорость распространения возмущений, то, например, при достаточно больших по модулю отрицательных ξ значения s , P , Q должны быть постоянными. Рассмотрим некоторое $\xi^* < 0$ такое, что $s = s_0^-$, $P = P_0^-$, $Q = 0$ при $\xi \leq \xi^*$. Эти значения лежат вне поверхности (3.5).

Тогда согласно леммам 3 и 5 при $\xi \geq \xi^*$ решение не может продолжаться ни непрерывным решением, ни разрывом, если только не положить $\sigma = 0$. Поскольку для $\xi > 0$ имеет место подобная ситуация, то приходим к единственному разрыву при $\xi = 0$. Если $P_0^+ \neq P_0^-$, то полученное решение имеет разрыв P при $\xi = 0$, т.е. не лежит в рассматриваемом классе функций из определения 3. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Свойство бесконечной скорости распространения возмущений является специфическим для систем вида (2.6) и не справедливо для привычных систем гиперболических законов сохранения. Вместе с тем, свойство очень быстрого убывания решений к постоянным при $|\xi| \rightarrow \infty$, описываемое леммой 4 (см. (3.6)), говорит о том, что систему (2.6) можно рассматривать как обладающую “почти конечной” скоростью распространения возмущений, см. также [10], [11].

ТЕОРЕМА 4. *В автомодельном решении задачи (2.6), (3.1) всегда присутствует особенность насыщенности s : либо скачок, либо, по крайней мере, точка с бесконечной производной по автомодельной переменной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из фактов, изложенных при доказательстве теоремы 3, следует, что решение задачи Римана состоит из двух волн разрежения, которые описываются уравнениями (3.4), начинаются при $\xi = -\infty$ и при $\xi = +\infty$ и продолжаются до пересечения с поверхностью (3.5). Траектории системы (3.4) при малых Q и $\xi \sim -\infty$ или $\xi \sim +\infty$ лежат по разные стороны поверхности (3.5). То есть, если решение задачи Римана существует, то оно либо содержит по крайней мере один скачок с одной волны разрежения на другую, либо траектории волн разрежения встречаются на поверхности (3.5). В последнем случае производная насыщенности будет бесконечной, что следует из формул (3.4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В процессе доказательства теоремы 4 мы фактически получили структуру решений задачи Римана (2.6), (3.1) в предположении, что решение существует. Именно, решение задачи Римана (2.6), (3.1) состоит из двух неконстантных волн разрежения, *всегда* соединенных скачком или, по крайней мере, точкой с бесконечной производной. Эта структура существенно отлична от структуры решений задачи Римана для гиперболических систем, где может иметь место случай наличия только волн разрежения без особенностей. Здесь стоит также отметить, что, по-видимому, подобная структура решений задачи Римана сохранится и в случае системы (2.6) с N компонентами: N волн разрежения, соединенных $N - 1$ скачками или точками с бесконечными производными.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В настоящей работе мы для простоты не рассматриваем возможные особые решения системы (3.4), т.е. траектории, лежащие на поверхности (3.5). Для системы (2.6) общего вида такие решения, вообще говоря, не являются типичными. Заметим, однако, что в случае несжимаемой фильтрации (т.е. в случае отсутствия зависимости нелинейностей от P) волны разрежения, лежащие на поверхности (3.5), как раз являются более естественными. Однако в этом вырожденном по отношению к тематике настоящей работы случае сама постановка задачи Римана будет отличаться от представленной выше.

Вопрос о существовании и единственности решений задачи Римана для системы (2.6) не является простым ввиду наличия особенностей (обращение правой части в бесконечность) в системе уравнений, описывающей волны разрежения, даже

в случае двух компонент, см. (3.4). Здесь мы этот вопрос не затрагиваем. Заметим также, что в доступной автору литературе задача Римана для уравнений *сжимаемой многофазной* фильтрации практически не рассматривалась. Отметим здесь статью [19], в которой изучалась задача Римана для двухфазной фильтрации (одна компонента) и предполагалась сжимаемость лишь одной из фаз. Кроме того, там фактически рассматривалась ситуация, когда поле давления известно и изучается задача Римана только в отношении насыщенности.

Развитый выше подход к построению решений задачи Римана был в несколько другой форме изложен автором в [20].

4. О понятии энтропии. Вопрос о функции, которая являлась бы аналогом энтропии для системы типа (2.6), также не является очевидным. В работах [13], [21] была сделана попытка построить такую функцию, исходя из физических соображений баланса свободной энергии. Как оказалось, построенная функция не накладывает никаких ограничений на скачки, происходящие в области присутствия обеих фаз. Рассмотрим эту проблему опять с точки зрения теории законов сохранения. Введем в рассмотрение вектор-функции размерности $N + 1$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} QF_i \\ P \end{pmatrix},$$

где функции X_i и F_i взяты из (2.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть существуют такая вектор-функция $\vec{E}(\vec{U})$ и такие функции $\mathcal{E}(\vec{U})$ и $\mathcal{F}(\vec{U})$, что

$$\vec{E} \cdot D\vec{X} = D\mathcal{E}, \quad \vec{E} \cdot D\vec{F} = D\mathcal{F}, \quad E^{N+1}Q \geq 0, \quad (4.1)$$

где знак D обозначает дифференциал соответствующих функций, а E^{N+1} – последнюю координату вектора $\vec{E}$. Тогда функцию $\mathcal{E}$ будем называть *энтропией* для системы (2.6), если в смысле теории распределений выполнено неравенство

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \leq 0. \quad (4.2)$$

Заметим, что из (4.2) следует, что на разрыве будет выполняться соотношение

$$\sigma(\mathcal{E}^- - \mathcal{E}^+) - (\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+) \leq 0. \quad (4.3)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть система (2.6) истинно нелинейна в смысле определения 6 и для нее существует энтропия $\mathcal{E}$ из определения 7. Пусть также квадратичная форма, определенная матрицей $D\vec{X}^T \cdot D\vec{E}$, положительно определена на линейном пространстве, базисом которого являются правые собственные вектора $\vec{r}_j$. Здесь верхний индекс T обозначает операцию транспонирования. Тогда для достаточно малых разрывов условие (4.3) со строгим неравенством эквивалентно условию устойчивости (2.19), взятому также со строгими неравенствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы проводится по той же схеме, какая приведена в работе [22].

Таким образом, убывание энтропии, введенное посредством определения 7, оказывается эквивалентным условиям устойчивости (2.19) для достаточно малых разрывов (аналогично теории законов сохранения).

Нахождение общего вида энтропий является отдельной задачей. Здесь ограничимся рассмотрением вида выпуклой энтропии в случае несжимаемой двухкомпонентной системы (2.6) – так называемой системы уравнений типа Баклея–Левеверетта. Свойство несжимаемости означает, что в формулах (2.5), взятых для случая двух компонент, все функции не зависят от давления P .

ТЕОРЕМА 6. Пусть в системе (2.6), взятой для случая $N = 2$, все функции, определяемые формулами (2.5), не зависят от давления P . Пусть выражение (3.2) строго положительно. Положим $\chi(s) \equiv F_2(X_1)_s - F_1(X_2)_s$, и пусть ω является некоторой дважды непрерывно-дифференцируемой функцией двух переменных, удовлетворяющей условию $Q \cdot \omega(Q\chi(s), P) \geq 0$. Пусть также $e_m(s, Q)$, $m = 1, 2$, являются некоторыми непрерывно-дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (X_2)_s(e_2)_Q + (X_1)_s(e_1)_Q &= 0, & (X_2)_s[F_2(e_2)_s + F_1(e_1)_s] &= -Q\chi'(s)(e_1)_Q, \\ (X_1)_s(e_1)_s + (X_2)_s(e_2)_s &> 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда выпуклая энтропия $\mathcal{E}$ такой системы зависит только от насыщенности s и выражается с помощью формулы

$$\mathcal{E}_s = e_1(X_1)_s + e_2(X_2)_s, \quad (4.5)$$

а соответствующий поток $\mathcal{F}$ определяется неоднозначно в соответствии со следующей формулой:

$$\mathcal{F} = \int \omega(Q\chi(s), P) dP + A(s, Q), \quad (4.6)$$

где знак $\int$ обозначает операцию неопределенного интегрирования, а функция $A(s, Q)$ удовлетворяет соотношениям

$$A_s = Q[e_1(F_1)_s + e_2(F_2)_s], \quad A_Q = e_1F_1 + e_2F_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 6 использует соотношения (4.1) и вытекающие из них равенства для соответствующих смешанных производных.

Соотношения (4.5), (4.4) говорят о том, что в некотором смысле “практически любая” выпуклая функция от s является энтропией для (2.6) при $N = 2$ в несжимаемом случае. Это свойство подобно соответствующему свойству для одного квазилинейного закона сохранения. Однако, в отличие от скалярного случая, соответствующий поток определяется далеко не однозначно, см. формулу (4.6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Брусиловский, *Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа*, Издательский дом Грааль, М., 2002.
- [2] F. M. Orr, jr., *Theory of Gas Injection Processes*, Tie-Line Publ., Copenhagen, 2007.
- [3] Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик, *Движение жидкостей и газов в природных пластах*, Недра, М., 1984.
- [4] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42:2** (1987), 135–176.

- [5] B. L. Keyfitz, C. A. Mora, "Prototypes for nonstrict hyperbolicity in conservation laws", *Nonlinear PDE's, dynamics and continuum physics* (South Hadley, MA, 1998), Contemp. Math., **255**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 125–137.
- [6] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., **11**, SIAM, Philadelphia, PA, 1973.
- [7] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Университетская серия, **4**, Научная книга, Новосибирск, 1998.
- [8] D. Serre, *System of Conservation Laws*. v.I: *Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, 2000; v.II: *Geometric Structures, Oscillations, and Initial-Boundary Value Problems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [9] P. G. LeFloch, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The Theory of Classical and Non-classical Shock Waves*, Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2002.
- [10] Ю. Б. Радвогин, *Каноническая форма системы уравнений многокомпонентной фильтрации. Гиперболичность и устойчивость*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша № 41, М., 2001.
- [11] Ю. Б. Радвогин, "Каноническая форма уравнений двухкомпонентной фильтрации", *Докл. РАН*, **391**:3 (2003), 1–4.
- [12] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [13] А. В. Колдоба, Е. В. Колдоба, *Разрывные решения уравнений многокомпонентной фильтрации*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша № 85, М., 1999.
- [14] А. В. Колдоба, Е. В. Колдоба, "Распространение слабых разрывов концентраций при изотермической фильтрации многокомпонентной смеси с фазовыми переходами", *ПММ*, **71**:3 (2007), 477–482.
- [15] P. D. Lax, "Hyperbolic systems of conservation laws. II", *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:4 (1957), 537–566.
- [16] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Grundlehren Math. Wiss., **258**, Springer, New York, 1994.
- [17] И. М. Гельфанд, "Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений", *УМН*, **14**:2 (1959), 87–158.
- [18] О. А. Олейник, "О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения", *УМН*, **14**:2 (1959), 165–170.
- [19] П. Г. Бедриковецкий, Р. Д. Каневская, М. В. Лурье, "Автомодельные решения задач двухфазной фильтрации с учетом сжимаемости одной из фаз", *МЖГ*, 1990, № 1, 71–80.
- [20] Ю. Г. Рыков, *О задаче Римана для системы уравнений двухкомпонентной двухфазной фильтрации в пористых средах в случае сжимаемости обеих фаз*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша № 59, М., 2007.
- [21] A. V. Koldoba, E. V. Koldoba, "The discontinuous solutions of the transport equations for compositional flow in porous media", *Transp. Porous Media*, **52**:2 (2003), 267–277.
- [22] P. Lax, "Shock waves and entropy", *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1971, 603–634.

Ю. Г. Рыков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: Yu-Rykov@yandex.ru

Поступило

17.12.2008

Исправленный вариант

16.04.2010