Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 662–672

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:29:46

Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак

В статье изучается вопрос об асимптотике спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

в случае, когда вес $\rho \in \dot{W}_2^{-1}[0, 1]$ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции $P \in L_2[0, 1]$ нулевого спектрального порядка.

Библиография: 8 названий.

1. Введение

1.1. В настоящей статье нами будет продолжено начатое в работах [1] и [2] изучение спектральных асимптотик граничной задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{1.2}$$

где вес $\rho \in \dot{W}_2^{-1}[0, 1]$ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции $P \in L_2[0, 1]$. Говоря более точно, мы намерены теперь подвергнуть исследованию ранее не рассмотренный случай, когда спектральный порядок D функции P равен нулю. Развернутые определения соответствующих понятий будут даны в разделе 2.

1.2. История вопроса восходит к работе [3], в которой для распределения собственных значений задачи (1.1), (1.2) в случае неубывающей функции P была получена формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{P'_{ac}} dx, \tag{1.3}$$

где P_{ac} – абсолютно непрерывная составляющая известного разложения

$$P = P_{ac} + P_{sc} + P_d$$

монотонной функции P в сумму абсолютно непрерывной, сингулярно непрерывной и дискретной частей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00283), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5247.2006.1), фонда INTAS (грант № 05-1000008-7883).

Если абсолютно непрерывная часть P_{ac} функции P отлична от нуля, то из формулы (1.3) немедленно вытекает справедливость асимптотического представления

$$\lambda_n \sim c^{-2} n^2, \quad (1.4)$$

где положено

$$c = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{P'_{ac}} dx.$$

В терминах *считающей функции* собственных значений

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_n \mid 0 < \lambda_n \leq \lambda\}$$

асимптотика (1.4) принимает вид

$$N(\lambda) \sim c\sqrt{\lambda}.$$

Если же функция P является чисто сингулярной, то из формулы (1.3) следует, что порядок роста последовательности собственных значений задачи (1.1), (1.2) превосходит n^2 , или, что то же самое, выполняется асимптотическое соотношение

$$N(\lambda) = o(\sqrt{\lambda}).$$

При этом возникает естественный вопрос о более квалифицированном описании поведения функции N .

В работе [4] для некоторого класса сингулярных самоподобных мер ρ была установлена справедливость асимптотики

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot (s(\ln \lambda) + o(1)), \quad (1.5)$$

где s – зависящая от выбора меры ρ периодическая функция, а D – явным образом выражающееся через параметры самоподобия меры ρ число из интервала $(0, 1/2)$.

В работах [1] и [2] результаты работы [4] были обобщены на существенно более широкий класс весов. А именно, был изучен случай $\rho = P'$, где $P \in L_2[0, 1]$ – квадратично суммируемая самоподобная функция положительного спектрального порядка (см. п. 2), производная которой понимается в смысле теории обобщенных функций. Существенное отличие весов этого класса от рассмотренных в работе [4] заключается в том, что они, вообще говоря, приводят к индефинитной задаче. При этом возникает необходимость различать две считающие функции

$$N_{\pm}(\lambda) = \#\{\lambda_n \mid 0 < \pm\lambda_n \leq \lambda\}.$$

Асимптотические формулы для таких считающих функций имеют вид

$$N_{\pm}(\lambda) = \lambda^D \cdot (s_{\pm}(\ln \lambda) + o(1)), \quad (1.6)$$

где периодические функции $s_{\pm}$, вообще говоря, различны, а показатель D , называемый *спектральным порядком* функции P , явным образом выражается через параметры самоподобия этой функции и лежит на интервале $(0, 1)$.

1.3. Общая конструкция самоподобных функций позволяет рассматривать также функции *нулевого спектрального порядка*, характеризующиеся тем, что отвечающий набору их параметров самоподобия спектральный порядок D оказывается равен 0. Среди неубывающих самоподобных сингулярных функций $P \in L_2[0, 1]$ таковыми являются в точности те, для которых выполняется равенство $P_{sc} = 0$. Отвечающие таким функциям веса $\rho \Leftarrow P'$ представляют собой дискретные меры. Более детальное описание свойств самоподобных функций нулевого спектрального порядка может быть найдено в работе [5].

Особенностью случая $D = 0$ является неприменимость использованной в работах [4], [1] и [2] при рассмотрении случая $D > 0$ техники, основанной на теории восстановления (см. [6], [7]). Коротко говоря, указанная техника существенно опирается на факт экспоненциального убывания некоторых вспомогательных функций (см., например, оценку [1; (4.11)]); между тем как в случае $D = 0$ для таких функций имеется лишь неубывающая, вообще говоря, оценка порядка $O(1)$. В соответствии с этим далее нами будет развита другая методика исследования.

1.4. Структура статьи имеет следующий вид. В разделе 2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения о самоподобных функциях. В разделе 3 дается операторная трактовка задачи (1.1), (1.2) и доказываются некоторые вспомогательные утверждения. В разделе 4 устанавливаются основные результаты об асимптотике спектра задачи (1.1), (1.2). Наконец, в разделе 5 приводятся данные численных расчетов, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

2. Самоподобные функции в $L_2[0, 1]$ и их спектральные порядки

2.1. Пусть фиксировано натуральное число $n > 1$, и пусть вещественные числа $a_k > 0$, β_k и d_k , где $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют равенству

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1.$$

Указанному набору чисел можно поставить в соответствие непрерывное отображение $G: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ вида

$$(\forall f \in L_2[0, 1]) \quad G(f) = \sum_{k=1}^n \{\beta_k \cdot \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})} + d_k \cdot G_k(f)\}, \quad (2.1)$$

где использованы следующие обозначения:

- 1) через α_k обозначены числа $\alpha_1 \Leftarrow 0$ и $\alpha_k \Leftarrow \alpha_{k-1} + a_{k-1}$ при $k = 2, \dots, n+1$.
- 2) через $\chi_{(\zeta, \xi)}$ обозначена характеристическая функция интервала (ζ, ξ) , рассматриваемая как элемент пространства $L_2[0, 1]$.
- 3) через G_k , где $k = 1, \dots, n$, обозначены непрерывные линейные отображения в пространстве $L_2[0, 1]$, действующие на произвольно фиксированную функцию $f \in L_2[0, 1]$ согласно правилу

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad [G_k(f)](x) = \begin{cases} f\left(\frac{x - \alpha_k}{a_k}\right) & \text{при } x \in (\alpha_k, \alpha_{k+1}), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отображения G вида (2.1) будут называться *операторами подобия*. Наибольший интерес для дальнейшего представляют те из них, которые являются сжимающими.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Действующий в пространстве $L_2[0, 1]$ оператор подобия G является сжимающим в том и только том случае, когда выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k |d_k|^2 < 1. \quad (2.2)$$

Доказательство утверждения 2.1 может быть найдено в работе [1; лемма 3.1].

Из утверждения 2.1 и принципа сжимающих отображений немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Если выполняется (2.2), то решение $f \in L_2[0, 1]$ уравнения $G(f) = f$ существует и единственно.

Функции, удовлетворяющие уравнению $G(f) = f$ с некоторым сжимающим оператором подобия G , будем называть *аффинно самоподобными* или просто *самоподобными*. Определяющие оператор G числа a_k , β_k и d_k , где $k = 1, 2, \dots, n$, мы будем при этом называть *параметрами самоподобия* функции f .

В дальнейшем неравенство (2.2) всегда будет предполагаться выполненным.

2.2. Самоподобная функция называется *функцией положительного спектрального порядка*, если ее параметры самоподобия удовлетворяют следующим двум условиям:

- 1) среди чисел β_k , где $k = 1, \dots, n$, по меньшей мере одно отлично от нуля;
- 2) среди чисел d_k , где $k = 1, \dots, n$, не менее двух отличны от нуля.

Справедливо следующее утверждение (см. [1; лемма 3.2]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть f – самоподобная функция положительного спектрального порядка, и пусть n , a_k и d_k , где $k = 1, \dots, n$, – ее параметры самоподобия. Тогда существует и единственно положительное решение D уравнения

$$\sum_{k=1}^n (a_k |d_k|)^D = 1. \quad (2.3)$$

При этом выполняется неравенство $D < 1$.

Отметим, что именно фигурирующее в формулировке утверждения 2.3 число D и определяет порядок асимптотических формул (1.5) и (1.6).

2.3. Аналогично вышесказанному, нетривиальная¹ самоподобная функция называется функцией *нулевого спектрального порядка*, если ее параметры самоподобия удовлетворяют следующим двум условиям:

- 1) среди чисел β_k , где $k = 1, \dots, n$, по меньшей мере одно отлично от нуля;
- 2) среди чисел d_k , где $k = 1, \dots, n$, в точности одно отлично от нуля.

Поскольку неравенство (2.2) гарантирует выполнение неравенств $a_k |d_k| < 1$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$, то в случае функции нулевого спектрального порядка уравнение (2.3) имеет только тривиальное решение $D = 0$.

¹То есть не являющаяся кусочно-постоянной с конечным числом точек разрыва.

В дальнейших рассуждениях о самоподобных функциях нулевого спектрального порядка через m мы будем обозначать натуральное число $m \in [1, n]$, удовлетворяющее соотношению $d_m \neq 0$. Неравенство (2.2) при этом превращается в неравенство $a_m |d_m|^2 < 1$, из выполнения которого с очевидностью следует также выполнение неравенства $a_m |d_m| < 1$.

Заметим также, что любая самоподобная функция нулевого спектрального порядка является кусочно-постоянной и имеет не более чем счетное число разрывов первого рода. Соответственно, фигурирующая в уравнении (1.1) весовая функция $\rho \in \dot{W}_2^{-1}[0, 1]$, представляющая собой обобщенную производную некоторой самоподобной функции $P \in L_2[0, 1]$ нулевого спектрального порядка, является дискретной².

3. Операторная трактовка задачи и некоторые вспомогательные утверждения

3.1. В дальнейшем через $\mathfrak{H}$ мы будем обозначать пространство Соболева $\dot{W}_2^1[0, 1]$, снабженное скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle = \int_0^1 y' \overline{z'} dx. \quad (3.1)$$

Через $\mathfrak{H}'$ мы при этом будем обозначать пространство, двойственное к $\mathfrak{H}$ относительно $L_2[0, 1]$, т.е. получаемое пополнением пространства $L_2[0, 1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{H}'} = \sup_{\|z\|_{\mathfrak{H}}=1} \left| \int_0^1 y \overline{z} dx \right|.$$

Если рассмотреть оператор вложения $J: \mathfrak{H} \rightarrow L_2[0, 1]$, то непосредственно из определения пространства $\mathfrak{H}'$ вытекает возможность непрерывного продолжения сопряженного оператора $J^*: L_2[0, 1] \rightarrow \mathfrak{H}$ до изометрии $J^+: \mathfrak{H}' \rightarrow \mathfrak{H}$.

Как и в предшествующих работах [1] и [2], в качестве операторной модели задачи (1.1), (1.2) будем рассматривать линейный пучок $T_\rho: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}'$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathfrak{H}) \quad \langle J^+ T_\rho(\lambda) y, y \rangle = \int_0^1 (|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)') dx. \quad (3.2)$$

3.2. Через $\text{ind } E$ мы далее будем обозначать отрицательный индекс инерции действующего в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$ ограниченного эрмитова оператора E , т.е. точную верхнюю грань размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{E}$, удовлетворяющих условию

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall y \in \mathfrak{M}) \quad \langle Ey, y \rangle_{\mathfrak{E}} \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathfrak{E}}^2.$$

3.3. Рассмотрим два подпространства $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}$, определяемые следующим образом. Подпространство $\mathfrak{H}_1$ имеет вид

$$\mathfrak{H}_1 = \{y \in \mathfrak{H} \mid (\forall x \notin (\alpha_m, \alpha_{m+1})) \quad y(x) = 0\}.$$

²В том смысле, что носитель этой функции имеет лишь конечное число предельных точек.

Подпространство $\mathfrak{H}_2$ представляет собой $(n-1)$ -мерную линейную оболочку функций $e_k \in \mathfrak{H}$, где $k = 1, \dots, n-1$, имеющих вид

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{x - \gamma_{k+1}}{\alpha_{k+1} - \gamma_{k+1}} & \text{при } x \in [\gamma_{k+1}, \alpha_{k+1}], \\ \frac{\delta_{k+1} - x}{\delta_{k+1} - \alpha_{k+1}} & \text{при } x \in [\alpha_{k+1}, \delta_{k+1}], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где положено

$$\gamma_{k+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_k & \text{при } k \neq m, \\ \alpha_{m+1} - a_m a_n & \text{при } k = m, \end{cases} \quad \delta_{k+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{k+2} & \text{при } k \neq m-1, \\ \alpha_m + a_m a_1 & \text{при } k = m-1. \end{cases}$$

Справедливы следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Ортогональное дополнение прямой суммы $\mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2$ допускает представление в виде*

$$\mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2) = \left\{ y \in \mathfrak{H} \mid \left(\forall x \in (\alpha_m, \alpha_{m+1}) \cup \bigcup_{k=2}^n \{\alpha_k\} \right) y(x) = 0 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что производными функций $y \in \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2$ являются в точности те ортогональные константам элементы пространства $L_2[0, 1]$, которые сохраняют свое значение на каждом из интервалов (α_k, α_{k+1}) , где $k \neq m$. В соответствии с формулой (3.1) это означает, что ортогональному дополнению подпространства $\mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2$ принадлежат в точности те функции $y \in \mathfrak{H}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$(\forall x \in (\alpha_m, \alpha_{m+1})) \quad y'(x) = 0, \quad (\forall k \neq m) \quad \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} y' dx = 0.$$

Полученный результат с очевидностью равносильно утверждению 3.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Пусть λ – вещественное число, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ – конечномерное подпространство, на котором квадратичная форма оператора $J^+T_\rho(\lambda)$ отрицательна. Тогда существует подпространство $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2$ размерности $\dim \mathfrak{M}$, на котором квадратичная форма оператора $J^+T_\rho(\lambda)$ также отрицательна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения 3.2 с очевидностью вытекает из тождества

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2) \quad (\forall z \perp \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}_2) \quad \langle J^+T_\rho(\lambda)(y+z), (y+z) \rangle = \langle J^+T_\rho(\lambda)y, y \rangle + \|z\|_{\mathfrak{H}}^2,$$

легко устанавливаемого на основе формулы (3.2), утверждения 3.1 и факта самоподобия функции P .

3.4. Рассмотрим два линейных пучка $A: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_1$ и $C: \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2$ ограниченных операторов, удовлетворяющие тождествам

$$\begin{aligned} (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathfrak{H}_1) \quad \langle A(\lambda)y, y \rangle &= \int_0^1 (|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)') dx, \\ (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathfrak{H}_2) \quad \langle C(\lambda)y, y \rangle &= \int_0^1 (|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)') dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а также оператор $B: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_2$, удовлетворяющий тождеству

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \quad (\forall z \in \mathfrak{H}_2) \quad \langle By, z \rangle = \int_0^1 y' \overline{z'} dx. \quad (3.4)$$

Имеют место следующие два факта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть λ – вещественное число. Тогда выполняется равенство

$$\text{ind } A(\lambda) = \text{ind } J^+ T_\rho(a_m d_m \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим изометрический оператор $U: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}$, определяемый тождеством

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \quad (\forall x \in [0, 1]) \quad [Uy](x) = \frac{y(\alpha_m + a_m x)}{\sqrt{a_m}}.$$

Из формул (3.2) и (3.3) с учетом факта самоподобия функции P легко выводится справедливость тождества

$$(\forall y \in \mathfrak{H}_1) \quad \langle A(\lambda)y, y \rangle = \langle J^+ T_\rho(a_m d_m \lambda)Uy, Uy \rangle,$$

имеющего утверждение 3.3 в качестве тривиального следствия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Пусть λ – вещественное число, не принадлежащее спектру пучка C . Тогда выполняется равенство

$$\text{ind } J^+ T_\rho(\lambda) = \text{ind}[A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda)B] + \text{ind } C(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычислением легко устанавливается, что для любых функций $y \in \mathfrak{H}_1$ и $z \in \mathfrak{H}_2$ выполняется равенство

$$\langle J^+ T_\rho(\lambda)(y + z), (y + z) \rangle = \langle [A(\lambda) - B^* C^{-1}(\lambda)B]y, y \rangle + \langle C(\lambda)u, u \rangle,$$

где положено $u \equiv z + C^{-1}(\lambda)By$. Доказываемое утверждение немедленно вытекает из этого равенства и утверждения 3.2.

3.5. Рассмотрим величины ζ_k , где $k = 2, \dots, n$, имеющие вид

$$\zeta_k \equiv \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m \beta_1 & \text{при } k = m, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m \beta_n & \text{при } k = m + 1, \\ \beta_k - \beta_{k-1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим также через $Z_\pm$ две величины

$$Z_\pm \equiv \#\{k \in [2, n] \mid \pm \zeta_k > 0\}.$$

Имеют место следующие два факта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Для любого достаточно большого вещественного $\lambda > 0$ выполняется равенство

$$\text{ind } C(\lambda) = Z_+.$$

Справедливость утверждения 3.5 немедленно вытекает из легко проверяемого тождества

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathfrak{H}_2) \quad \langle C(\lambda)y, y \rangle = \|y\|_{\mathfrak{H}}^2 - \lambda \sum_{k=2}^n \zeta_k \cdot |y(\alpha_k)|^2. \quad (3.5)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Пусть выполнено равенство $Z_+ + Z_- = n - 1$. Тогда для любого достаточно большого вещественного числа $\lambda > 0$ оператор $C(\lambda)$ является ограниченно обратимым, причем при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотика

$$\|C^{-1}(\lambda)\| = O(\lambda^{-1}).$$

Справедливость утверждения 3.6 также представляет собой несложное следствие тождества (3.5).

4. Основные результаты

Имеют место следующие три факта.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $Z_+ > 0$ и $Z_+ + Z_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \dots, Z_+$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет при $k \rightarrow \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{l+kZ_+} = \mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 3.6 найдется вещественное $\lambda_0 > 0$, для которого при любом $\lambda > \lambda_0$ будет выполняться неравенство $\|C^{-1}(\lambda)\| < \lambda_0/(3\lambda)$. Отсюда и из очевидным образом получаемой на основе определения (3.4) оценки $\|B\| \leq 1$ следует, что при любом $\lambda > \lambda_0$ будут выполняться неравенства

$$\text{ind} \left[A(\lambda) + \frac{\lambda_0}{(3\lambda)} \right] \leq \text{ind}[A(\lambda) - B^*C^{-1}(\lambda)B] \leq \text{ind} \left[A(\lambda) - \frac{\lambda_0}{(3\lambda)} \right]. \quad (4.1)$$

С использованием немедленно вытекающих из определения (3.3) равенств

$$A\left(\lambda \pm \frac{\lambda_0}{2}\right) = \left(1 \pm \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right) \cdot \left[A(\lambda) \mp \frac{\lambda_0}{2\lambda \pm \lambda_0}\right]$$

из оценок (4.1) легко выводятся оценки

$$\text{ind} A\left(\lambda - \frac{\lambda_0}{2}\right) \leq \text{ind}[A(\lambda) - B^*C^{-1}(\lambda)B] \leq \text{ind} A\left(\lambda + \frac{\lambda_0}{2}\right). \quad (4.2)$$

Далее, рассмотрим неубывающую функцию $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad s(t) = \#\{k \geq 1 \mid \lambda_k < e^t\}.$$

Согласно теореме [1; теорема 4.1] эта функция удовлетворяет тождеству

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad s(t) = \text{ind } J^+ T_\rho(e^t).$$

Объединяя последнее тождество с оценками (4.2) и утверждениями 3.3, 3.4 и 3.5, устанавливаем, что при любом $t > \ln \lambda_0$ будут справедливы соотношения

$$s(t + \ln(a_m d_m) - \lambda_0 e^{-t}) + Z_+ \leq s(t) \leq s(t + \ln(a_m d_m) + \lambda_0 e^{-t}) + Z_+. \quad (4.3)$$

Из оценок (4.3) немедленно вытекает, что внутри некоторой окрестности точки $+\infty$ любой интервал длины $-\ln(a_m d_m)/2$ содержит не более Z_+ точек разрыва функции s . Тем самым, заведомо найдется точка $t_0 > \ln \lambda_0$, для которой окрестность радиуса $\lambda_0 e^{-t_0}/(1 - a_m d_m)$ будет свободна от таких точек разрыва. Как следует из оценок (4.3), указанным выбором точки t_0 мы добиваемся и того, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ внутри имеющей радиус $\lambda_0 e^{-t_0} \cdot (a_m d_m)^k/(1 - a_m d_m)$ окрестности точки

$$t_k = t_0 - k \cdot \ln(a_m d_m)$$

также не было ни единого разрыва функции s . Объединяя полученные результаты с фактом простоты собственных значений задачи (1.1), (1.2) (см., например, [1; теорема 4.1]), убеждаемся, что при любом $k \in \mathbb{N}$ отрезок $[t_k, t_{k+1}]$ содержит ровно Z_+ точек разрыва функции s , причем каждая из них является внутренней точкой этого отрезка. Для завершения доказательства остается теперь лишь заметить, – в соответствии с оценками (4.3), – что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $l = 1, \dots, Z_+$ расстояние между l -ми слева точками разрыва функции s на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$ и $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ отличается от величины $-\ln(a_m d_m)$ не более, чем на $\lambda_0 e^{-t_0} \cdot (a_m d_m)^{k+1}$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $Z_- > 0$ и $Z_+ + Z_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \dots, Z_-$, для которых последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^\infty$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет при $k \rightarrow \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+kZ_-)} = -\mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 4.2 проводится аналогичным доказательству утверждения 4.1 способом.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть выполняются соотношения $d_m < 0$ и $Z_+ + Z_- = n - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l = 1, \dots, n - 1$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений задачи (1.1), (1.2), удовлетворяет при $k \rightarrow \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{l+k(n-1)} = \mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=1}^\infty$, занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений задачи (1.1), (1.2), удовлетворяет при $k \rightarrow \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+Z_-+k(n-1))} = -\mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 4.3 также проводится аналогичным доказательству утверждения 4.1 способом.

5. Примеры

5.1. В таблице 1 представлены результаты численных расчетов для первых восьми положительных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщенная производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия (случай 1) $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = 2/3$, $\zeta_2 = 1/3$, $Z_+ = 2$, $Z_- = 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение 4.1.

Таблица 1. Оценки первых собственных значений (случай 1)

l	k	λ_{l+2k}	$\lambda_{l+2k}/6^k$
1	0	$4.93 \cdot 10^0 \pm 1\%$	4.9341 ± 10^{-4}
2	0	$1.36 \cdot 10^1 \pm 1\%$	13.6598 ± 10^{-4}
1	1	$4.94 \cdot 10^1 \pm 1\%$	8.2322 ± 10^{-4}
2	1	$8.85 \cdot 10^1 \pm 1\%$	14.7576 ± 10^{-4}
1	2	$2.96 \cdot 10^2 \pm 1\%$	8.2330 ± 10^{-4}
2	2	$5.31 \cdot 10^2 \pm 1\%$	14.7577 ± 10^{-4}
1	3	$1.78 \cdot 10^3 \pm 1\%$	8.2330 ± 10^{-4}
2	3	$3.19 \cdot 10^3 \pm 1\%$	14.7577 ± 10^{-4}

5.2. В таблице 2 представлены данные численных расчетов первых четырех отрицательных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщенная производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия (случай 2) $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $Z_+ = Z_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение 4.2.

Таблица 2. Оценки первых собственных значений (случай 2)

l	k	$-\lambda_{-(l+k)}$	$-\lambda_{-(l+k)}/6^k$
1	0	$5.10 \cdot 10^0 \pm 1\%$	5.1005 ± 10^{-4}
1	1	$2.60 \cdot 10^1 \pm 1\%$	4.3459 ± 10^{-4}
1	2	$1.56 \cdot 10^2 \pm 1\%$	4.3458 ± 10^{-4}
1	3	$9.39 \cdot 10^2 \pm 1\%$	4.3458 ± 10^{-4}

5.3. В таблице 3 представлены данные численных расчетов первых шести положительных и семи отрицательных (исключая первое) собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщенная производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия (случай 3) $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $Z_+ = Z_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение 4.3.

5.4. При получении вышеприведенного иллюстративного материала нами была использована вычислительная методика, описанная в работе [8].

ТАБЛИЦА 3. Оценки первых собственных значений (случай 3)

l	k	λ_{l+2k}	$\lambda_{l+2k}/6^{2k}$	$-\lambda_{-(l+1+2k)}$	$-\lambda_{-(l+1+2k)}/6^{2k+1}$
1	0	$4.31 \cdot 10^0 \pm 1\%$	4.3146 ± 10^{-4}	$2.55 \cdot 10^1 \pm 1\%$	4.2572 ± 10^{-4}
2	0	$3.81 \cdot 10^1 \pm 1\%$	38.0536 ± 10^{-4}	$2.28 \cdot 10^2 \pm 1\%$	38.0535 ± 10^{-4}
1	1	$1.53 \cdot 10^2 \pm 1\%$	4.2572 ± 10^{-4}	$9.19 \cdot 10^2 \pm 1\%$	4.2572 ± 10^{-4}
2	1	$1.37 \cdot 10^3 \pm 1\%$	38.0535 ± 10^{-4}	$8.22 \cdot 10^3 \pm 1\%$	38.0535 ± 10^{-4}
1	2	$5.52 \cdot 10^3 \pm 1\%$	4.2572 ± 10^{-4}	$3.31 \cdot 10^4 \pm 1\%$	4.2572 ± 10^{-4}
2	2	$4.93 \cdot 10^4 \pm 1\%$	38.0535 ± 10^{-4}	$2.96 \cdot 10^5 \pm 1\%$	38.0535 ± 10^{-4}

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 13–30.
- [2] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 88–98.
- [3] М. Г. Крейн, “Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот”, *Докл. АН СССР*, **76**:3 (1951), 345–348.
- [4] M. Solomyak, E. Verbitsky, “On a spectral problem related to self-similar measures”, *Bull. London Math. Soc.*, **27**:3 (1995), 242–248.
- [5] И. А. Шейпак, *Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стильбеса*, arXiv:math.FA/0711.0451.
- [6] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. т. 2, Мир, М., 1967.
- [7] M. Levitin, D. Vassiliev, “Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **72**:1 (1996), 188–214.
- [8] А. А. Владимиров, “О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:8 (2007), 1350–1355.

А. А. Владимиров

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН,

г. Москва

E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило

11.12.2008

И. А. Шейпак

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: iasheip@mech.math.msu.su