Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Калягин, А. А. Кононова, О компактных возмущениях предельно-периодического оператора Якоби, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 845–858

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:36:20

О компактных возмущениях предельно-периодического оператора Якоби

В. А. Калягин, А. А. Кононова

Рассмотрим ограниченный оператор Якоби, действующий в пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$. Добавим к спектральной мере этого оператора набор конечного числа дискретных масс (на действительной оси вне выпуклой оболочки носителя спектральной меры оператора). В настоящей работе изучается вопрос о компактности полученного возмущения исходного оператора. Для предельно-периодических операторов Якоби найдено необходимое и достаточное условие на расположение масс, при котором возмущение является компактным.

Библиография: 16 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную трехдиагональную матрицу Якоби

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$. Далее всюду будем предполагать, что эти последовательности ограничены:

$$\sup_n \{a_n\} + \sup_n \{|b_n|\} < \infty.$$

Матрица $\mathcal{A}$ порождает ограниченный самосопряженный оператор (оператор Якоби) в гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$ с каноническим ортонормированным базисом $\{e_n\}_0^\infty$.

Самосопряженному оператору Якоби A соответствует семейство спектральных проекторов E_λ такое, что

$$A^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n dE_\lambda, \quad n \geq 0.$$

Мера $d\mu(\lambda) := d(E_\lambda e_0, e_0)$ называется *спектральной мерой* оператора. Для ограниченных операторов Якоби носитель спектральной меры является замкнутым ограниченным подмножеством действительной оси. И наоборот, любая положительная мера с ограниченным носителем, содержащим бесконечное количество точек, является спектральной мерой только одного ограниченного оператора Якоби [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00179) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ 3906.2008.1).

Множество изолированных точечных масс спектральной меры составляет *дискретный спектр* оператора. Обозначим через $\sigma(A)$ спектр A и через $\sigma_d(A)$ дискретный спектр; тогда множество $\sigma_{\text{ess}} := \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$ будет являться *существенным спектром* оператора Якоби. Оператор Якоби называется *конечнозонным*, если его существенный спектр является объединением конечного числа попарно непересекающихся промежутков.

Говорят, что оператор A является *компактным возмущением* оператора A_0 , если разность $A - A_0$ является компактным оператором в $\ell^2(\mathbb{N})$. Назовем два оператора *эквивалентными* ($A \sim A_0$), если один из них является компактным возмущением другого. Хорошо известно, что $A_0 \sim A$ тогда и только тогда, когда (см. [2])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n^0 - a_n| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n^0 - b_n| = 0. \quad (2)$$

По теореме Вейля существенный спектр оператора Якоби не изменяется при компактном возмущении [3]. Таким образом, любое компактное возмущение конечнозонного оператора Якоби является конечнозонным оператором Якоби с возможно другим дискретным спектром. С другой стороны, любое возмущение спектральной меры влечет некоторое возмущение оператора. В общей теории ортогональных многочленов, тесно связанной с теорией операторов Якоби, известны некоторые классы возмущений меры, интересные для приложений. Один из классов таких возмущений – это домножение меры на неотрицательную весовую функцию, другой получается при добавлении точечных масс к мере. Последний класс возмущений привлек к себе большое внимание в последние десятилетия [4]–[7].

Оператор Якоби A_0 будем называть *периодическим*, а оператор A *предельно-периодическим* с периодом p , если $A \sim A_0$ и

$$a_{np+k}^0 = a_k^0, \quad b_{np+k}^0 = b_k^0, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

При добавлении к спектральной мере оператора конечного числа дискретных масс, лежащих на действительной оси вне выпуклой оболочки носителя спектральной меры оператора, мы получаем новый оператор Якоби. Основная проблема, исследуемая в настоящей статье, состоит в определении условий, при которых полученный оператор будет являться компактным возмущением исходного.

Для однозонных операторов Якоби (существенный спектр которых состоит из единственного отрезка) решение этой задачи известно для широкого класса мер (класс Рахманова, см. [8]). Говорят, что мера μ *принадлежит классу Рахманова*, если $\text{supp}(\mu) = [-1, 1]$ и $\mu' > 0$ почти всюду на отрезке $[-1, 1]$. Из асимптотической формулы Гончара [4] следует, что при добавлении конечного числа точечных масс к мере класса Рахманова возмущение соответствующего оператора Якоби всегда является компактным. Это неверно для двух и более зонных операторов. Как будет показано ниже, ответ на этот вопрос зависит от геометрии существенного спектра оператора и от расположения дополнительных точечных масс. Основным результатом настоящей работы является теорема 3, дающая необходимое и достаточное условие на расположение дискретных масс, при котором соответствующее возмущение предельно-периодического оператора Якоби будет компактным.

Отметим, что в последнее время изучению спектральных свойств операторов Якоби уделяется большое внимание (см. [7], [9]–[11]). Однако, насколько известно авторам, задача в постановке, рассмотренной в настоящей статье, раньше не ставилась.

2. Предварительные сведения. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые стандартные функции геометрической теории функций.

Пусть $E = \bigcup_{j=1}^r E_j$ – объединение конечного числа попарно непересекающихся отрезков действительной оси, $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$. Обозначим $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость.

Комплексная функция Грина. Пусть $g(z, z_0)$ – действительная функция Грина для Ω с особенностью в точке z_0 , т.е.

- 1) $g(z, z_0)$ гармонична в $\Omega \setminus \{z_0\}$;
- 2) функция $g(z, z_0) - \log(1/|z - z_0|)$ гармонична в окрестности точки z_0 ; если $z_0 = \infty$, то функция $g(z) - \log|z|$ гармонична в окрестности ∞ ;
- 3) $\lim_{z \rightarrow \zeta} g(z, z_0) = 0$ при $\zeta \in \partial\Omega$.

Функция

$$G(z, z_0) = g(z, z_0) + i\tilde{g}(z, z_0)$$

(где $\tilde{g}(z, z_0)$ – функция, гармонически сопряженная с $g(z, z_0)$) называется *комплексной функцией Грина* для области Ω с полюсом в точке z_0 . Мы будем обозначать через $g(z)$ и $G(z)$ действительную и комплексную функции Грина с полюсом в бесконечности ($z_0 = \infty$). Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp[G(z)].$$

Эта функция локально аналитична в Ω , имеет полюс в бесконечности и нигде не равна нулю. Граничные значения $\Phi(z)$ на $\partial\Omega$ удовлетворяют равенству $|\Phi(\zeta)|_{\zeta \in \partial\Omega} = 1$. Если $p > 1$ (т.е. область Ω не является односвязной), то функция $\Phi(z)$ многозначна в Ω . Точнее, ее модуль $|\Phi(z)| = \exp(g(z))$ является однозначной функцией, а аргумент $\arg \Phi(z)$ – многозначной (см. [12]).

Логарифмическая емкость. *Логарифмической емкостью* множества E называется положительное число

$$C(E) := \exp(-\gamma),$$

где γ – так называемая *константа Робена* для Ω :

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow \infty} [g(z) - \log|z|].$$

Если $r = 1$, то

$$C(E) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{z}{\Phi(z)} \right].$$

Таким образом, емкость отрезка $[-1, 1]$ равна $1/2$ (так как в этом случае $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$).

Гармонические меры. Гармоническая мера $\omega_k(z)$, $k = 1, \dots, r$, – это функция, гармоническая в области Ω , имеющая граничные значения 1 на отрезке E_k и граничные значения 0 на E_j , $j \neq k$. С помощью стандартных формул комплексного анализа можно следующим образом выразить функции ω_k :

$$\omega_k(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{E_k} \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} |d\zeta|,$$

(при интегрировании отрезок обходится дважды, по одному разу в каждом направлении).

Пусть задан некоторый предельно-периодический ограниченный оператор Якоби A . Так как он является компактным возмущением некоторого периодического оператора A_0 , то по теореме Вейля их существенные спектры совпадают. А спектр периодического оператора можно вычислить, зная его матрицу (см. [13]). Хорошо известно (см. [13]), что если спектр оператора с периодом p является объединением p непересекающихся отрезков действительной оси (т.е. $p = r$), то гармонические меры этих отрезков в бесконечности совпадают: $\omega_k(\infty) = 1/p$.

В более общем случае, когда период оператора больше или равен числу отрезков, соответствующие гармонические меры будут рациональны (можно представить, что некоторые из отрезков, составляющих спектр, склеены в граничных точках). Таким образом, если оператор является предельно-периодическим, то его существенный спектр состоит из объединения конечного числа отрезков

$$\sigma_{\text{ess}} = E = \bigcup_{j=1}^r E_j, \quad E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k,$$

таких, что $\omega_k(\infty)$ – рациональные числа. В этом случае период оператора будет равен наименьшему общему кратному знаменателей $\omega_k(\infty)$.

Оператору Якоби A одозначно соответствует система многочленов $Q_n(z)$, которые определяются следующими рекуррентными уравнениями:

$$Q_{n+1}(z) = (z - b_n)Q_n(z) - a_{n-1}^2 Q_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

с начальными условиями $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z - b_0$. Известно, что эти многочлены ортогональны относительно меры $d\mu(\lambda) = d(E_\lambda e_0, e_0)$. Ортогональные многочлены $Q_n(z)$ являются мощным средством изучения спектральных свойств оператора Якоби (см. [1], [2]). В частности, критерий компактности возмущения оператора Якоби может быть сформулирован в терминах многочленов Q_n .

Пусть A и A_* – операторы Якоби, обозначим через Q_n последовательность многочленов, ассоциированных с оператором Якоби A , а через Q_n^* – последовательность многочленов, ассоциированных с оператором Якоби A_* . Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (Беккерман [11]). *Оператор Якоби A_* является компактным возмущением оператора Якоби A тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{Q_n^*(z)}{Q_{n+1}^*(z)} \right) = 0$$

равномерно в некоторой окрестности бесконечности.

Для того чтобы применить теорему 1 к нашему случаю, нам понадобятся асимптотические формулы для многочленов, ортогональных на системе действительных отрезков.

3. Компактные возмущения предельно-периодического оператора Якоби. Рассмотрим предельно-периодический оператор Якоби A . Пусть A_0 – соответствующий периодический оператор Якоби (матрица этого оператора составлена из пределов через период элементов матрицы A). По периодической матрице A_0 можно восстановить меру, относительно которой ортогональны соответствующие

многочлены Q_n^0 (см. [13]). Абсолютно непрерывная часть этой меры будет удовлетворять условию Сегё на существенном спектре оператора. Помимо абсолютно непрерывной составляющей мера периодического оператора может также содержать дискретную составляющую. Для многочленов, ортогональных относительно такой меры, в [12]–[14] получены асимптотические формулы, из которых следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{(n+1)p}^0(z)}{Q_{np}^0(z)} &= (C(E)\Phi(z))^p, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{np+k}^0(z)}{Q_{np}^0(z)} &= (C(E)\Phi(z))^k F_k(z), \quad 1 \leq k \leq p-1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F_k(z)$ – некоторые многозначные функции с однозначным модулем (рациональные функции на двулистной римановой поверхности рода $p-1$, со склейкой листов по отрезкам E_j). Причем при умножении этих функций на соответствующие степени функции $\Phi(z)$ произведение становится однозначным.

Так как оператор A является компактным возмущением оператора A_0 , то из теоремы 1 следует, что отношения $Q_{(n+1)p}(z)/Q_{np}(z)$ имеют такие же пределы через период:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{(n+1)p}(z)}{Q_{np}(z)} &= (C(E)\Phi(z))^p, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{np+k}(z)}{Q_{np}(z)} &= (C(E)\Phi(z))^k F_k(z), \quad 1 \leq k \leq p-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Существование этих пределов является отправной точкой для построения относительной асимптотики многочленов, ортогональных относительно той же меры, что и Q_n , но с дополнительными дискретными массами, расположенными на действительной прямой вне выпуклой оболочки носителя спектральной меры A .

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\frac{F_{k+j}(z)}{F_k(z)} := F_{k,j}(z), \quad 1 \leq j \leq p-1.$$

Тогда также верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{np+k+j}(z)}{Q_{np+k}(z)} = (C(E)\Phi(z))^j F_{k,j}(z). \quad (6)$$

Рассмотрим теперь меру $\mu^* = \mu + \alpha$, где α – дискретная мера с массами A_j в точках z_j^* , $j = 1, 2, \dots, l$, $z_j \in \mathbb{R} \setminus \text{conv}(\sigma(A))$.

Обозначим через Q_n^* многочлены, ортогональные относительно меры μ^* . Для многочленов Q_n^* выполнены соотношения ортогональности:

$$(Q_n^*, z^m)_{\mu^*} := \int_E Q_n^*(\zeta) \zeta^m d\mu + \sum_{k=1}^l A_k Q_n^*(z_k^*) (z_k^*)^m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

В следующем пункте мы исследуем связь между исходными многочленами Q_n и возмущенными Q_n^* и выведем формулу асимптотики их отношения.

4. Относительная асимптотика многочленов, возмущенных добавлением масс. Эта часть работы в основном опирается на статью Гончара [4], в которой решена подобная проблема для случая $p = 1$. Метод, предложенный в [4], также был успешно применен в [15] для случая $p > 1$.

Пусть A – некоторый предельно-периодический оператор Якоби, $Q_n(z)$ – ассоциированные с ним ортогональные многочлены. Будем добавлять дополнительные дискретные массы к спектральной мере оператора по одной. Для большего количества масс формула будет получаться итеративно. Пусть

$$\mu^*(\zeta) = \mu(\zeta) + \alpha,$$

где α – мера с единственной дискретной массой, расположенной на действительной оси вне выпуклой оболочки $\mu(A)$ в точке z_1^* .

Сформулируем леммы, аналогичные леммам из работы Гончара [4], для нашего случая. Их доказательства, приведенные в [4], остаются верными.

ЛЕММА 1. Для любых натуральных $j, k, j < k < n$, на компактах вне $\text{conv}(\sigma(A))$ имеют место оценки

$$c_1 n^{k-j} < \left| \frac{Q_n^{(k)}(z)}{Q_n^{(j)}(z)} \right| < c_2 n^{k-j},$$

где $c_1 > 0, c_2 < +\infty$ не зависят от n . (Здесь $Q_n^{(k)}(z)$ означает k -ю производную от $Q_n(z)$.)

ЛЕММА 2. Для любых натуральных j, k имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{np+h+j}^{(k)}(z)}{Q_{np+h}^{(k)}(z)} = (C(E)\Phi(z))^j \frac{F_{h+j}(z)}{F_h(z)}, \quad h = 0, \dots, p-1,$$

равномерная внутри $\mathbb{C} \setminus \text{conv}(\sigma(A))$.

ЛЕММА 3. Для любых целых неотрицательных j, k выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|Q_{n+j}\|_E}{|Q_n^{(k)}(z)|} \right)^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(z)|}$$

для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \text{conv}(\sigma(A))$ ($\|\cdot\|_E$ – sup-норма на множестве E).

Основным результатом настоящего пункта является

ТЕОРЕМА 2. Равномерно внутри области Ω верны следующие соотношения:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j}^*}{Q_{mp+j-1}}(z)(z - z_1^*) = H_j(z),$$

где

$$H_j(z) = (C(E)\Phi(z))^2 F_{j-1,2}(z) + \lambda_{j,1}(C(E)\Phi(z))F_{j-1,1}(z) + \lambda_{j,2},$$

а параметры $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}$ определяются из условий

$$H_j(z_1^*) = 0, \quad H'_j(z_1^*) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Марковскую функцию, являющуюся преобразованием Коши меры μ , обозначим $f(z)$:

$$f(z) = \int_E \frac{d\mu(t)}{z - t}.$$

Аналогично для μ^*

$$f^*(z) = \int_E \frac{d\mu(t)}{z - t} + \frac{A_k}{(z - z_1^*)}.$$

Вместе с многочленами Q_n (или Q_n^*) нам также понадобятся многочлены второго рода P_n (P_n^* соответственно):

$$P_n(z) = \int_{\sigma(A)} \frac{Q_n(z) - Q_n(t)}{z - t} d\mu(t).$$

Тогда

$$(Q_n^* f^* - P_n^*)(z) = \frac{a}{z^{n+1}} + \dots,$$

следовательно, для достаточно больших R

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} (Q_n^*(z) f^*(z) - P_n^*(z)) z^k dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} (Q_n^*(z) f^*(z) z^k dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_E \int_{|z|=R} \frac{Q_n^*(z) z^k}{z - t} dz d\mu(t) + \frac{A_1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Q_n^*(z) z^k}{z - z_1^*} dz \\ &= \int_E (Q_n^*(t) t^k d\mu(t) + A_1 Q_n^*(z_1^*) (z_1^*)^k = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого многочлена P степени не выше $n - 1$ мы имеем

$$\int_E Q_n^*(t) P(t) d\mu(t) + A_1 Q_n^*(z_1^*) P(z_1^*) = 0. \quad (7)$$

В частности,

$$\int_E Q_n^*(t) (t - z_1^*) t^k d\mu(t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2.$$

Положим $R_{n+1}(z) = Q_n^*(z)(z - z_1^*)$; тогда

$$\int_E R_{n+1}(t) t^k d\mu(t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2.$$

Разложим этот многочлен по системе многочленов Q_n :

$$R_{n+1} = Q_{n+1} + \lambda_{n,1} Q_n + \lambda_{n,2} Q_{n-1}. \quad (8)$$

Заметим, что $Q_n^*(z_1^*) = R'_{n+1}(z_1^*)$; тогда, используя равенство (7), можно записать

$$\int_E \frac{R_{n+1}(t)}{A_1(t - z_1^*)} d\mu(t) + R'_{n+1}(z_1^*) = 0.$$

Перепишем эту формулу, используя разложение (8), и разделим получившееся выражение на $(Q_{n-1})'(z_1^*)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(Q_{n-1})'(z_1^*)} \int_E \frac{Q_{n+1}(t)}{A_1(t - z_1^*)} d\mu(t) + \frac{\lambda_{n,1}}{(Q_{n-1})'(z_1^*)} \int_E \frac{Q_n(t)}{A_1(t - z_1^*)} d\mu(t) \\ & + \frac{\lambda_{n,2}}{(Q_{n-1})'(z_1^*)} \int_E \frac{Q_{n-1}(t)}{A_1(t - z_1^*)} d\mu(t) + \frac{(Q_{n+1})'}{(Q_{n-1})'}(z_1^*) + \lambda_{n,1} \frac{(Q_n)'}{(Q_{n-1})'}(z_1^*) + \lambda_{n,2} = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем интегралы из последнего выражения следующим образом:

$$\delta_n(1, j) := \frac{1}{(Q_{n-1})'(z_1^*)} \int_E \frac{Q_{n+j}(t)}{A_1(t - z_1^*)} d\mu(t) = \frac{\|Q_{n+j}\|_E}{(Q_{n-1})'(z_1^*)} \int_E \frac{q_{n+j}(t)}{A_1(t - z_1^*)} d\mu(t),$$

где $q_n = Q_n/\|Q_n\|$ – ортонормированная система многочленов. Тогда последний интеграл является $(n+j)$ -м коэффициентом ряда Фурье функции $1/(A_1(t - z_1^*))$ по этой системе, а потому стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая лемму 3, подберем δ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n(1, j)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(z_1^*)|} < \delta < 1, \quad j = 0, \pm 1.$$

Тогда

$$\delta_n(1, j) = o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы получили систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}}(z_1^*) + \lambda_{n,1} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}(z_1^*) + \lambda_{n,2} = 0, \\ & \frac{(Q_{n+1})'}{(Q_{n-1})'}(z_1^*) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \frac{(Q_n)'}{(Q_{n-1})'}(z_1^*) + o(\delta^n) + \lambda_{n,2}(1 + o(\delta^n)) = 0. \end{aligned}$$

Вычтем первое равенство из второго и воспользуемся соотношением

$$\frac{(Q_{n+k})'}{(Q_{n-1})'} - \frac{Q_{n+k}}{Q_{n-1}} = \left(\frac{Q_{n+k}}{Q_{n-1}} \right)' \frac{Q_{n-1}}{(Q_{n-1})'}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}} \right)'(z_1^*) \frac{Q_{n-1}}{(Q_{n-1})'}(z_1^*) + o(\delta^n) \\ & + \lambda_{n,1} \left(\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right)'(z_1^*) \frac{Q_{n-1}}{(Q_{n-1})'}(z_1^*) + o(\delta^n) \right) + \lambda_{n,2} \cdot o(\delta^n) = 0. \end{aligned}$$

Домножим это равенство на $(Q'_{n-1}/Q_{n-1})(z_1^*)$. Так как по лемме 1 это выражение растет с линейной скоростью, то окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}}(z_1^*) + \lambda_{n,1} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}(z_1^*) + \lambda_{n,2} = 0, \\ & \left(\frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}} \right)'(z_1^*) + o(1) + \lambda_{n,1} \left(\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right)'(z_1^*) + o(1) \right) + \lambda_{n,2} \cdot o(1) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что по формуле Кристоффеля–Дарбу

$$\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)'(z_1^*) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} q_k^2(z_1^*)}{q_{n-1}^2(z_1^*)} = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{q_k^2(z_1^*)}{q_{n-1}^2(z_1^*)} > 1.$$

Следовательно, при больших n наша система будет иметь единственное решение.

Добавим к этой системе равенство

$$\frac{Q_{n+1}^*(z - z_1^*)}{Q_{n-1}(z)} = \frac{Q_{n+1}}{Q_{n-1}}(z) + \lambda_{n,1} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}(z) + \lambda_{n,2}$$

и исключим параметры $\lambda_{n,1}$, $\lambda_{n,2}$.

Переходя к пределу по подпоследовательности, мы получаем утверждение теоремы 2.

Для наших целей не важно, какое выражение имеют функции $H_j(z)$. Для нас существенно лишь то, что для их определения нужны только функции $F_{j,k}(z)$ и точка расположения дискретной массы. Если для разных последовательностей многочленов функции $F_{j,k}(z)$ и точка расположения дополнительной дискретной массы одинаковы, то и формулы асимптотики отношения для них тоже будут одинаковы. Более того, процедуру добавления дискретной массы можно проводить итеративно. Мы получим аналогичные формулы асимптотики отношения:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j}^*}{Q_{mp+j-l}}(z) \prod_{k=1}^l (z - z_k^*) = H_{j,l}(z),$$

причем функции $H_{j,l}$ также будут зависеть только от $F_{j,k}(z)$ и набора точек z_k^* , в которых располагаются дополнительные массы.

5. Исследование компактности возмущения. Для исследования компактности полезной оказывается следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Для каждого предельно-периодического оператора Якоби A найдется оператор A^S такой, что $A \sim A^S$, спектральная мера оператора A^S абсолютно непрерывна и вес удовлетворяет условию Сегё.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и раньше, $A \sim A_0$, где A_0 – периодический оператор. Известно, что спектральная мера оператора A_0 состоит из абсолютно непрерывной части, удовлетворяющей условию Сегё, и, возможно, имеет конечное число дискретных масс (см. [13]), точнее

$$\mu^0 = \mu_{\text{cont}}^0 + \sum_{j=1}^s \tilde{A}_j \delta(x - \tilde{z}_j),$$

где точки появления возможных дискретных масс $\{\tilde{z}_j\}_{j=1}^s$, $s \leq p-1$, – нули полинома Q_{p-1} , μ_{cont}^0 – абсолютно непрерывная часть меры.

Рассмотрим эту меру без дискретной составляющей и домножим весовую функцию $\rho^0(\zeta)$ ($d\mu_{\text{cont}}^0(z) = \rho^0(z) dz$) на такой множитель, что асимптотика отношения для соответствующих ортогональных многочленов не изменится.

Для этого рассмотрим функцию

$$V(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^r \nu_k(\omega_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z))\right),$$

где ν_k однозначно определяются из системы

$$\sum_{k=1}^r \nu_k \Delta_j \tilde{\omega}_k(z) = \sum_{k=1}^s \omega_j(\tilde{z}_k), \quad \sum_{k=1}^r \nu_k = 0.$$

Подобные функции подробно рассмотрены в работах [12], [16].

Рассмотрим новую весовую функцию $\rho^S(z) = \rho^0(z)|V(z)|$ и соответствующую меру $d\alpha_{\text{cont}}^S(z) = \rho^S(z) dz$. Многочлены, ортогональные относительно меры μ^S , обозначим Q_n^S . Используя асимптотические формулы, получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j}^S}{Q_{mp+j-1}^S}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j}^0}{Q_{mp+j-1}^0}(z).$$

И следовательно, соответствующий оператор A^S по теореме 1 будет являться компактным возмущением оператора A .

Лемма доказана.

Теперь мы можем наряду с мерой μ рассмотреть соответствующую меру Сегё μ^S на том же носителе. Многочлены, ортогональные относительно этой меры, обозначим $Q_n^S(z)$. Для них также выполнены условия (5).

Добавим к этой новой мере те же массы A_k в тех же точках z_k^* . Пусть $\mu^{*S} = \mu^S + \alpha$ – новая мера с дискретной составляющей. Соответствующие операторы Якоби обозначим A^S и A_*^S .

ЛЕММА 5. Оператор Якоби A_* является компактным возмущением оператора A тогда и только тогда, когда A_*^S является компактным возмущением оператора A^S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлены, ортогональные относительно μ^{*S} , обозначим $Q_n^{*S}(z)$. Все написанное ранее для многочленов Q_n , Q_n^* верно и для многочленов Q_n^S , Q_n^{*S} . В частности,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j+l}^{*S}}{Q_{mp+j-l}^{*S}}(z) \prod_{k=1}^l (z - z_k^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j+l}^{*S}}{Q_{mp+j-l}^{*S}}(z) \prod_{k=1}^l (z - z_k^*) = H_{j,l}(z).$$

Отсюда мы также можем вывести, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j}^{*S}}{Q_{mp+j-1}^{*S}}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{mp+j}^{*S}}{Q_{mp+j-1}^{*S}}(z).$$

Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{mp+j}}{Q_{mp+j-1}}(z) - \frac{Q_{mp+j}^{*S}}{Q_{mp+j-1}^{*S}}(z) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{mp+j}^S}{Q_{mp+j-1}^S}(z) - \frac{Q_{mp+j}^{*S}}{Q_{mp+j-1}^{*S}}(z) \right)$$

и, следовательно, эти два последних предела равны нулю при одних и тех же условиях. Как следует из теоремы 1, равенство нулю такого предела равносильно тому, что соответствующее возмущение матрицы Якоби является компактным. Лемма доказана.

Из асимптотических формул для ортогональных многочленов, соответствующих оператору A^S , и свойств тэта-функций Римана (см. [13], [16]) можно вывести, что (при выполнении условия Сегё для абсолютно непрерывной части спектральной меры оператора) оператор A_*^S будет компактным возмущением оператора A^S тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\sum_{k=1}^l \omega_j(z_k^*) \equiv 0 \pmod{1}.$$

Суммируя все вышеизложенное, приходим к следующему утверждению, которое является основным результатом этой работы.

ТЕОРЕМА 3. *Добавление дискретных масс в точках z_k^* , $k = 1, \dots, l$, вне выпуклой оболочки носителя спектральной меры предельно-периодического оператора Якоби A с периодом $p \geq 1$ дает компактное возмущение оператора тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^l \omega_j(z_k^*) \equiv 0 \pmod{1}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (9)$$

где r – число компонент связности множества $\sigma_{\text{ess}}(A)$.

6. Пример. В качестве примера рассмотрим ортогональные многочлены, заданные следующими рекуррентными соотношениями:

$$Q_{2n+1} = zQ_{2n} - 4Q_{2n-1}, \quad Q_{2n+2} = zQ_{2n+1} - Q_{2n}.$$

Известно, что мера ортогональности этих многочленов удовлетворяет условию Сегё, можно показать, что дискретных масс эта мера не имеет, а носителем ее является набор отрезков $E = [-3, -1] \cup [1, 3]$, симметричный относительно начала координат.

Добавим к имеющейся мере дискретную массу в некоторой точке $z_1^* \in \mathbb{R} \setminus \text{conv}(E)$. Так как $\omega_j(z_1^*) \neq 0 \pmod{1}$, $j = 1, 2$, то соответствующее возмущение матрицы Якоби не будет компактным.

Получим этот результат, используя асимптотическую формулу из теоремы 2. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}^*}{Q_{2m}}(z)(z - z_1^*) &= (C(E)\Phi(z))^2 + \lambda_{1,1}(C(E)\Phi(z))F_1(z) + \lambda_{1,2} := H_{1,1}(z), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+2}^*}{Q_{2m+1}}(z)(z - z_1^*) &= (C(E)\Phi(z))^2 + \lambda_{0,1} \frac{C(E)\Phi(z)}{F_1(z)} + \lambda_{0,2} := H_{0,1}(z). \end{aligned}$$

Причем

$$\begin{aligned} (C(E)\Phi(z))F_1(z) &= \frac{(C(E)\Phi(z))^2 + 1}{z}, \quad \frac{C(E)\Phi(z)}{F_1(z)} = \frac{(C(E)\Phi(z))^2 + 4}{z}, \\ (C(E)\Phi(z))^2 &= \frac{z^2 - 5 + \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 9)}}{2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\lambda_{0,1}$, $\lambda_{0,2}$, $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$ можно найти из неоднородной системы линейных уравнений

$$H_{0,1}(z_1^*) = 0, \quad H'_{0,1}(z_1^*) = 0, \quad H_{1,1}(z_1^*) = 0, \quad H'_{1,1}(z_1^*) = 0.$$

Мы хотим доказать, что данное возмущение не может быть компактным. Проведем доказательство от противного. Предположим, что возмущение компактно. Тогда по теореме 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{2m}}{Q_{2m+1}}(z) - \frac{Q_{2m}^*}{Q_{2m+1}^*}(z) \right) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{2m+1}}{Q_{2m+2}}(z) - \frac{Q_{2m+1}^*}{Q_{2m+2}^*}(z) \right) = 0.$$

А так как пределы отношений существуют, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m}}{Q_{2m+1}}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m}^*}{Q_{2m+1}^*}(z), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}}{Q_{2m+2}}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}^*}{Q_{2m+2}^*}(z).$$

Нам будет удобнее переписать так:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}}{Q_{2m}}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}^*}{Q_{2m}^*}(z).$$

В нашем случае

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}}{Q_{2m}}(z) = C(E)\Phi(z)F_1(z).$$

По теореме 2

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+1}^*}{Q_{2m}^*}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_{2m+1}^*}{Q_{2m}^*} \frac{Q_{2m}}{Q_{2m-1}} \frac{Q_{2m-1}}{Q_{2m}^*} \right)(z) = H_{1,1}(z) \frac{C(E)\Phi(z)}{F_1(z)H_{0,1}(z)}.$$

Таким образом, если возмущение оператора компактно, то должно выполняться равенство

$$H_{1,1}(z) \frac{C(E)\Phi(z)}{F_1(z)H_{0,1}(z)} = C(E)\Phi(z)F_1(z),$$

т.е. $H_{1,1}(z) = F_1^2(z)H_{0,1}(z)$.

Нетрудно увидеть, что

$$H_{0,1}(z) - H_{0,1}(-z) = 2\lambda_{0,1} \frac{C(E)\Phi(z)}{F_1(z)}, \quad H_{1,1}(z) - H_{1,1}(-z) = 2\lambda_{1,1}C(E)\Phi(z)F_1(z).$$

И если наше предположение верно, то

$$\lambda_{0,1}C(E)\Phi(z)F_1(z) = \lambda_{1,1}C(E)\Phi(z)F_1(z),$$

т.е. $\lambda_{0,1} = \lambda_{1,1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} H_{1,1}(z) - H_{0,1}(z) &= \lambda_{1,1} \left(C(E)\Phi(z)F_1(z) - \frac{C(E)\Phi(z)}{F_1(z)} \right) + \lambda_{1,2} - \lambda_{0,2} \\ &= -\frac{3\lambda_{0,1}}{z} + \lambda_{0,2} - \lambda_{1,2}. \end{aligned}$$

Но тогда

$$H'_{1,1}(z) - H'_{0,1}(z) = \frac{3\lambda_{0,1}}{z^2},$$

что противоречит условию $H'_{0,1}(z_1^*) = H'_{1,1}(z_1^*) = 0$. Таким образом, предположение о компактности возмущения неверно.

Добавим теперь еще одну массу в точке $-z_1^*$. В этом случае

$$\omega_j(z_1^*) + \omega_j(-z_1^*) = 0 \pmod{1}, \quad j = 1, 2,$$

и, следовательно, возмущение матрицы Якоби, соответствующее добавлению двух масс в симметричных относительно начала координат точках, будет компактным.

Покажем это, используя асимптотическую формулу из теоремы 2. Так как теорема сформулирована для случая добавления одной массы, нам надо применить ее дважды:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+2}^*}{Q_{2m}}(z)(z^2 - z_1^{*2}) &= (C(E)\Phi(z))^4 + \lambda_{0,1}(C(E)\Phi(z))^3 F_1(z) + \lambda_{0,2}(C(E)\Phi(z))^2 \\ &\quad + \lambda_{0,3}(C(E)\Phi(z)) F_1(z) + \lambda_{0,4} \\ &:= H_{0,2}(z), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q_{2m+3}^*}{Q_{2m+1}}(z)(z^2 - z_1^{*2}) &= (C(E)\Phi(z))^4 + \lambda_{1,1}(C(E)\Phi(z))^3 F_1(z) + \lambda_{1,2}(C(E)\Phi(z))^2 \\ &\quad + \lambda_{1,3}(C(E)\Phi(z)) F_1(z) + \lambda_{1,4} \\ &:= H_{1,2}(z). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему, определяющую коэффициенты $\lambda_{0,j}$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$H_{0,1}(z_1^*) = 0, \quad H'_{0,1}(z_1^*) = 0, \quad H_{0,1}(-z_1^*) = 0, \quad H'_{0,1}(-z_1^*) = 0.$$

Заметим, что коэффициенты, стоящие перед $\lambda_{0,1}$ и $\lambda_{0,3}$ в уравнениях

$$H_{0,1}(z_1^*) = 0, \quad H_{0,1}(-z_1^*) = 0,$$

определяются нечетными функциями, все остальные – четными. Вычтем из первого уравнения второе:

$$2\lambda_{0,1}(C(E)\Phi(z))^3 F_1(z) + 2\lambda_{0,3}(C(E)\Phi(z)) F_1(z) = 0.$$

В уравнениях

$$H'_{0,1}(z_1^*) = 0, \quad H'_{0,1}(-z_1^*) = 0$$

наоборот, коэффициенты, стоящие перед $\lambda_{0,1}$ и $\lambda_{0,3}$, – четные, а остальные – нечетные. Сложив эти два уравнения, получим

$$2\lambda_{0,1}((C(E)\Phi(z))^3 F_1(z))' + 2\lambda_{0,3}((C(E)\Phi(z)) F_1(z))' = 0.$$

Таким образом, для определения $\lambda_{0,1}$ и $\lambda_{0,3}$ мы получили однородную систему из двух уравнений с отличным от нуля дискриминантом. Она имеет только нулевое решение.

То же самое верно и для $\lambda_{1,1}$ и $\lambda_{1,3}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} (C(E)\Phi(z))^4 + \lambda_{0,2}(C(E)\Phi(z))^2 + \lambda_{0,4} &:= H_{0,2}(z), \\ (C(E)\Phi(z))^4 + \lambda_{1,2}(C(E)\Phi(z))^2 + \lambda_{1,4} &:= H_{1,2}(z). \end{aligned}$$

А так как системы, определяющие $\lambda_{j,2}$ и $\lambda_{j,4}$, теперь совпадают для $j = 0$ и $j = 1$, то $\lambda_{0,2} = \lambda_{1,2}$, $\lambda_{0,4} = \lambda_{1,4}$. И следовательно, $H_{0,2}(z) = H_{1,2}(z)$, что равносильно компактности возмущения соответствующей матрицы Якоби.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [4] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97**:4 (1975), 607–629.
- [5] Е. М. Никишин, “Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **10**, М., Изд-во МГУ, 1984, 3–77.
- [6] F. Marcellán, P. Maroni, “Sur l’adjonction d’une masse de Dirac à une forme régulière et semi-classique”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **162**:1 (1992), 1–22.
- [7] D. Damanik, R. Killip, B. Simon, *Perturbations of Orthogonal Polynomials with Periodic Recursion Coefficients*, [arXiv: math.SP/0702388v2](https://arxiv.org/abs/math.SP/0702388v2).
- [8] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **103**:2 (1977), 237–252; “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II”, *Матем. сб.*, **118**:1 (1982), 104–117.
- [9] С. П. Суетин, “О формулах следов для некоторого класса операторов Якоби”, *Матем. сб.*, **198**:6 (2007), 107–138.
- [10] V. Batchenko, F. Gesztesy, “On the spectrum of Jacobi operators with quasiperiodic algebro-geometric coefficients”, *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, **10** (2005), 511–563.
- [11] B. Beckermann, “Complex Jacobi matrices”, *J. Comput. Appl. Math.*, **127**:1–2 (2001), 17–65.
- [12] H. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane”, *Adv. in Math.*, **3**:2 (1969), 127–232.
- [13] А. И. Аптекарев, “Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода”, *Матем. сб.*, **125**:2 (1984), 231–258.
- [14] В. А. Калягин, А. А. Кононова, “Об асимптотике многочленов, ортогональных на системе дуг, по мере, имеющей дискретную часть”, *Алгебра и анализ*, **21**:2 (2009), 71–91.
- [15] А. А. Гончар, С. П. Суетин, “Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа”, *Совр. пробл. матем.*, **5**, МИАН, М., 2004, 3–67.
- [16] Е. А. Рахманов, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **104**:2 (1977), 271–291.

В. А. Калягин

Государственный университет – Высшая школа экономики
(Нижегородский филиал)

E-mail: vkalyagin@hse.nnov.ru

Поступило

05.12.2008

А. А. Кононова

Нижегородский государственный технический университет
им. Р. Е. Алексеева

E-mail: anya.kononova@gmail.com