Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Гордиенко, Критерий конечности и асимптотика
коразмерностей обобщенных тождеств, *Матем. замет-*
ки, 2009, том 86, выпуск 5, 681–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:55:50

Критерий конечности и асимптотика коразмерностей обобщенных тождеств

А. С. Гордиенко

Пусть A – ассоциативная алгебра над полем характеристики нуль. Тогда либо все коразмерности $gc_n(A)$ ее обобщенных полиномиальных тождеств бесконечны, либо A есть сумма идеалов I и J , где $\dim_F I < \infty$, а J – нильпотентен. В последнем случае существуют такие числа $n_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $gc_n(A) < +\infty$ при $n \geq n_0$ и $gc_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \rightarrow \infty$, где $d = \text{PI exp}(A) \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, во втором случае для обобщенных коразмерностей выполняются гипотезы С. А. Амицура и А. Регева.

Библиография: 7 названий.

В начале 80-х гг. в теории полиномиальных тождеств зародилось и стало бурно развиваться новое направление, связанное с исследованием числовых характеристик многообразий алгебр. Были сформулированы гипотезы С. А. Амицура и Регева. Гипотеза Амицура об асимптотическом поведении обычных коразмерностей была доказана в 1999 г. Зайцевым и Джамбруно [1; с. 143, теорема 5.2] для всех ассоциативных алгебр. Для широкого класса алгебр была доказана и гипотеза Регева [2]–[4]. Кроме обычных тождеств, важную роль в теории колец играют обобщенные полиномиальные тождества [5]. В связи с этим возникает вопрос о справедливости указанных гипотез для обобщенных коразмерностей. В работе [6] было изучено асимптотическое поведение обобщенных коразмерностей конечномерных алгебр. Настоящая работа посвящена исследованию этого поведения в случае произвольных ассоциативных алгебр.

Далее через A мы везде будем обозначать произвольную ассоциативную алгебру над некоторым полем F характеристики нуль. Пусть $F\langle X \rangle$ – свободная алгебра без 1 на счетном множестве $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ над полем F . Многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle *_{F} A$ называется *обобщенным тождеством* алгебры A , если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для всех $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$. (Здесь знаком $*$ обозначено свободное произведение алгебр.)

Ясно, что обобщенные тождества алгебры A образуют идеал в алгебре $F\langle X \rangle *_{F} A$. Обозначим его через $\text{GId}(A)$.

Пусть

$$V_n(A) = \langle a_0 x_{\sigma(1)} a_1 x_{\sigma(2)} a_2 \cdots a_{n-1} x_{\sigma(n)} a_n \mid \sigma \in S_n, a_i \in A \cup \{1\} \rangle_F, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00485) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1983.2008.1).

Элементы пространства $V_n(A)$ называются *обобщенными полилинейными многочленами* с коэффициентами в алгебре A . Последовательность

$$\mathrm{gc}_n(A) = \dim \frac{V_n(A)}{V_n(A) \cap \mathrm{GId}(A)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

назовем *последовательностью обобщенных коразмерностей* алгебры A .

Многочлен $f \in F\langle X \rangle$ называется *обычным тождеством* для алгебры A , если он обращается в нуль при любой подстановке элементов из A вместо переменных X . Совокупность $\mathrm{Id}(A)$ обычных тождеств алгебры A является T -идеалом в $F\langle X \rangle$. Если $\mathrm{Id}(A) \neq 0$, то говорят, что A – PI-алгебра. Обозначим через P_n пространство полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда последовательность

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$$

называется *последовательностью обычных коразмерностей* алгебры A . В силу теоремы Зайцева–Джамбруно [1; с. 143, теорема 5.2] для любой ассоциативной PI-алгебры A над полем F характеристики нуль существует предел

$$\mathrm{PIexp}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \in \mathbb{Z}_+,$$

который называется *PI-экспонентой* алгебры A .

В случае обобщенных тождеств гипотезы Амицура и Регева можно сформулировать так.

ГИПОТЕЗА 1 (Амицур). Существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathrm{gc}_n(A)} \in \mathbb{Z}_+$.

ГИПОТЕЗА 2 (Регев). Существуют такие числа $C \in \mathbb{Q}_+$ и $t \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathrm{gc}_n(A) \sim Cn^t d^n$ при $n \rightarrow \infty$, где $d = \mathrm{PIexp}(A)$. (Мы пишем, что $f \sim g$, если $\lim f/g = 1$.)

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае обычных коразмерностей $c_n(A)$ на константы C и t накладываются более слабые ограничения, так как существуют алгебры [7], для которых $c_n(A) \sim Cn^t d^n$, где $C \notin \mathbb{Q}$ и $t < 0$.

Цель данной работы – доказать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = I + J$ – сумма идеалов, $\dim_F I < \infty$, а J – нильпотентен. Тогда существуют $n_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{Q}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$, что $\mathrm{gc}_n(A) < \infty$ при $n \geq n_0$ и $\mathrm{gc}_n(A) \sim Cn^r d^n$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $d = \mathrm{PIexp}(A) \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\mathrm{gc}_n(A) < \infty$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $A = I + J$ для некоторых идеалов I и J , причем $\dim_F I < \infty$, а J – нильпотентен.

СЛЕДСТВИЕ. Если A – ассоциативная алгебра над некоторым полем F характеристики нуль и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathrm{gc}_n(A) < \infty$, то для обобщенных тождеств такой алгебры выполняются гипотезы Амицура и Регева.

ЛЕММА 1. Пусть I – идеал алгебры A . Тогда $\mathrm{gc}_n(A/I) \leq \mathrm{gc}_n(A)$. Если $B \subseteq A$ – подалгебра, то $\mathrm{gc}_n(B) \leq \mathrm{gc}_n(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: A \rightarrow A/I$ – естественная проекция. Обозначим через π_0 индуцированное отображение $V_n(A) \rightarrow V_n(A/I)$. Понятно, что π_0 – эпиморфизм. Пусть $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m \in V_n(A/I)$ – линейно независимые по модулю $\mathrm{GId}(A/I)$

элементы. Рассмотрим их прообразы $g_1, \dots, g_m \in V_n(A)$ при отображении π_0 . Пусть $\sum_{k=1}^m \alpha_k g_k \in \text{GId}(A)$ для некоторых $\alpha_k \in F$. Тогда $\sum_{k=1}^m \alpha_k g_k(a_1, \dots, a_n) = 0$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \bar{g}_k(\pi a_1, \dots, \pi a_n) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \pi_0 g_k(\pi a_1, \dots, \pi a_n) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \pi g_k(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Из сюръективности гомоморфизма π следует, что $\sum_{k=1}^m \alpha_k \bar{g}_k \in \text{GId}(A/I)$. Поэтому все $\alpha_k = 0$, многочлены g_k линейно независимы по модулю $\text{GId}(A)$ и $\text{gc}_n(A/I) \leq \text{gc}_n(A)$. Аналогично доказывается и второе утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $L_j: x \mapsto jx$, $R_j: x \mapsto xj$, где $j \in J$, а $\text{End}_F I$ – пространство всех линейных операторов $I \rightarrow I$. Заметим, что

$$\dim \text{End}_F I = (\dim I)^2 < \infty.$$

Выберем базис $(L_{j_1}, R_{j_1}), \dots, (L_{j_m}, R_{j_m})$ в $\langle (L_j, R_j) \rangle_{j \in J} \subseteq \text{End}_F I \oplus \text{End}_F I$. Тогда если $(L_j, R_j) = \sum_{s=1}^m \alpha_s (L_{j_s}, R_{j_s})$, то $ja = (\sum_{s=1}^m \alpha_s j_s)a$ и $aj = a(\sum_{s=1}^m \alpha_s j_s)$ для всех $a \in I$. По условию $J^p = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Поэтому алгебра J_1 , порожденная элементами $j_1, \dots, j_m$, конечномерна. Тогда конечномерна и алгебра $A_1 = I + J_1$. В силу [6], где утверждение теоремы было доказано для конечномерных алгебр, достаточно показать, что $\text{gc}_n(A) = \text{gc}_n(A_1)$ и $c_n(A) = c_n(A_1)$ при $n \geq p$. Тогда $\text{gc}_n(A) < \infty$ при $n \geq p$ и будут существовать такие $C \in \mathbb{Q}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$, что $\text{gc}_n(A) \sim Cn^r d^n$ при $n \rightarrow \infty$, где $d = \text{PIexp}(A) \in \mathbb{Z}_+$.

Так как $A_1 \subseteq A$, в силу леммы 1 достаточно доказать, что $\text{gc}_n(A) \leq \text{gc}_n(A_1)$ и $c_n(A) \leq c_n(A_1)$. Сначала покажем, что если $f \in V_n(A_1) \cap \text{GId}(A_1)$ (соответственно $\in P_n \cap \text{Id}(A_1)$), то $f \in V_n(A_1) \cap \text{GId}(A)$ (соответственно $\in P_n \cap \text{Id}(A)$). В силу полилинейности многочлена f для проверки достаточно подставлять в него только базисные элементы алгебры A . Если все они будут из J , то выражение обратится в нуль, так как $n \geq p$. Значит, подставляется хотя бы один элемент из I . Но тогда вместо элемента $j \in J$ можно подставлять $\sum_{s=1}^m \alpha_s j_s \in A_1$, где $(L_j, R_j) = \sum_{s=1}^m \alpha_s (L_{j_s}, R_{j_s})$, и результат будет такой же, а именно нуль, так как $f \in V_n(A_1) \cap \text{GId}(A_1)$ или $f \in P_n \cap \text{Id}(A_1)$. Поэтому, если многочлены $f_1, \dots, f_s \in P_n$ линейно независимы по модулю $\text{Id}(A)$, то они будут линейно независимы и по модулю $\text{Id}(A_1)$, откуда $c_n(A) = c_n(A_1)$, $\text{PIexp}(A) = \text{PIexp}(A_1)$.

Для завершения доказательства равенства $\text{gc}_n(A) = \text{gc}_n(A_1)$ для всяких $f_1, \dots, f_s \in V_n(A)$ достаточно найти $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s \in V_n(A_1)$ такие, что $f_i - \tilde{f}_i \in \text{GId}(A)$. Всякий коэффициент $a + j$, где $a \in I$, $j \in J$, в многочлене f_i заменим на $a + \sum_{s=1}^m \alpha_s j_s \in A_1$, где $(L_j, R_j) = \sum_{s=1}^m \alpha_s (L_{j_s}, R_{j_s})$. Получим многочлен $\tilde{f}_i \in V(A_1)$. Как мы уже отмечали, все многочлены из $V_n(A)$ при подстановке вместо всех переменных элементов из J обращаются в нуль, поэтому можно считать, что подставляется хотя бы один элемент из I . Но тогда значения $\tilde{f}_i$ и f_i будут одинаковы, т.е. $\tilde{f}_i - f_i \in \text{GId}(A)$. Если $f_1, \dots, f_s$ были линейно независимы по модулю $\text{GId}(A)$, то $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s$ линейно независимы по модулю $\text{GId}(A_1)$. Отсюда $\text{gc}_n(A) = \text{gc}_n(A_1)$ при $n \geq p$ и асимптотика этих последовательностей совпадает.

ЛЕММА 2. Пусть A – бесконечномерная примитивная алгебра. Тогда $\text{gc}_n(A) = \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – точный неприводимый A -модуль. Тогда $\Delta = \text{End}_A M$ – тело и согласно теореме плотности либо $A \cong M_k(\Delta')$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, либо для любого $k \in \mathbb{N}$ существует подкольцо $R_k \subseteq A$, которое гомоморфно отображается на $M_k(\Delta')$. Здесь тело Δ' антиизоморфно телу Δ . Из леммы 1 следует, что $\text{gc}_n(A) \geq \text{gc}_n(\Delta')$. Поэтому, если $\dim_F \Delta = \infty$, то $\text{gc}_n(A) = \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если $\delta_i \in \Delta'$, $i \in \mathbb{N}$, линейно независимы над F , то подстановкой $x_1 = \dots = x_n = 1$ устанавливается, что $\delta_i x_1 \dots x_n$ – линейно независимы по модулю $\text{GId}(\Delta')$.

Если $\dim_F \Delta' < \infty$, то из условия $\dim_F A = \infty$ следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует подкольцо $R_k \subseteq A$, которое гомоморфно отображается на $M_k(\Delta')$. Если e_{ij} – матричные единицы алгебры $M_k(\Delta')$, то подстановкой $x_1 = \dots = x_n = 1$ устанавливается, что $e_{ij} x_1 \dots x_n$ – линейно независимы по модулю $\text{GId}(M_k(\Delta'))$. Тогда $\text{gc}_n(M_k(\Delta')) \geq k^2$. В силу неравенства $\text{gc}_n(A) \geq \text{gc}_n(M_k(\Delta'))$ (лемма 1) и произвольности числа k заключаем, что и в этом случае $\text{gc}_n(A) = \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3. Пусть A – бесконечномерная полупростая алгебра. Тогда $\text{gc}_n(A) = \infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу своей полупростоты алгебра A обладает некоторым неприводимым модулем M_1 . Если $I_1 = \{r \in A \mid rM_1 = 0\}$, то алгебра A/I_1 примитивна. Либо $\dim_F A/I_1 = \infty$ и, применяя леммы 1 и 2, мы получаем, что $\text{gc}_n(A) = \infty$, либо $A/I_1 \cong M_{k_1}(\Delta_1)$, где $k_1 \in \mathbb{N}$ и Δ_1 – некоторая конечномерная F -алгебра с делением. Тогда идеал I_1 полупрост и бесконечномерен. Мы можем применить аналогичные рассуждения и к нему, построить по индукции идеалы I_2, I_3 и т.д. Либо на каком-то шаге мы получим бесконечномерную примитивную алгебру, откуда, пользуясь леммами 1 и 2, выведем требуемое, либо у нас будет бесконечная цепочка

$$A = I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \dots \supsetneq I_s \supsetneq \dots,$$

где I_s является идеалом в I_{s-1} , $I_{s-1}/I_s \cong M_{k_s}(\Delta_s)$, $k_s \in \mathbb{N}$, а Δ_s – конечномерная F -алгебра с делением. Обозначим через e_s прообраз единицы алгебры $M_{k_s}(\Delta_s)$ в алгебре A . Тогда $e_s^2 \in (e_s + I_{s+1}) \subseteq I_s$. Докажем, что многочлены $f_s = e_s x_1 \dots x_n$ линейно независимы по модулю $\text{GId}(A)$. Действительно, пусть $g = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{s_i} \equiv 0$ для некоторых $\alpha_i \in F \setminus \{0\}$. Тогда $g(e_{s_1}, \dots, e_{s_1}) \in \alpha_1 e_{s_1} + I_{s_1+1}$, т.е. $\alpha_1 = 0$. Получили противоречие. Отсюда f_s , $s \in \mathbb{N}$, линейно независимы по модулю $\text{GId}(A)$ и $\text{gc}_n(A) = \infty$.

ЛЕММА 4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in A$ справедливо неравенство

$$m = \dim(Aa_1 \dots a_n A + Aa_1 \dots a_n + a_1 \dots a_n A + Fa_1 \dots a_n) \leq \text{gc}_n(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно выбрать линейно независимые элементы b_k , $1 \leq k \leq m$, каждый из которых имеет вид $c_i a_1 \dots a_n d_j$, $c_i a_1 \dots a_n$, $a_1 \dots a_n d_j$ или равен $a_1 \dots a_n$. Обозначим через f_k соответствующие им многочлены $c_i x_1 \dots x_n d_j$, $c_i x_1 \dots x_n$, $x_1 \dots x_n d_j$ и $x_1 \dots x_n$. Тогда $f_k(a_1, \dots, a_n) = b_k$ для всех $1 \leq k \leq m$. Таким образом, f_k линейно независимы по модулю $\text{GId}(A)$, т.е. $\text{gc}_n(A) \geq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если $\dim_F A < \infty$, то достаточно положить $I = A$ и $J = 0$. Поэтому считаем, что $\dim_F A = \infty$. Пусть $J = J(A)$ – радикал Джекобсона алгебры A . Тогда A/J – полупростая алгебра. Если $\dim A/J = \infty$, то в силу

лемм 1 и 3 мы получаем, что $\text{gc}_n(A) = \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а это противоречит условию. Поэтому $\dim A/J < \infty$. Из теоремы Веддерберна следует, что A/J содержит единицу $\bar{e}$. Пусть e – ее прообраз в A . Тогда $ea, ae \in a + J$ для всех $a \in A$ и $A = Ae^n A + J$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $I = Ae^n A$. Это двусторонний идеал в A , который согласно лемме 4 конечномерен. Для завершения доказательства осталось показать, что $J^p = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Положим $p = (\ell^{2n} + 1)\ell n$, где $\ell = \text{gc}_n(A)$. Пусть $j_1, \dots, j_p \in J$. Докажем, что $j_1 \cdots j_p = 0$. Рассмотрим пространство

$$T = Aj_1 \cdots j_n A + Aj_1 \cdots j_n + j_1 \cdots j_n A + Fj_1 \cdots j_n.$$

Это двусторонний идеал в A , поэтому $J(T) = J(A) \cap T = T$. В силу леммы 4 $\dim T \leq \ell$. Идеал $J(T) = T$ нильпотентен как радикал артиновой алгебры T , его размерность не превосходит ℓ , поэтому $T^\ell = 0$. Рассмотрим линейную оболочку операторов $R_j: x \mapsto xj$, $j \in J$, в алгебре $\text{End}_F T$ всех линейных операторов $T \rightarrow T$. Ее размерность не превосходит $\dim \text{End}_F T = \ell^2$. Выберем базис $(R_j)_{j \in \Lambda}$, $|\Lambda| \leq \ell^2$. Тогда $j_1 \cdots j_p = R_{j_p} R_{j_{p-1}} \cdots R_{j_{n+1}}(j_1 \cdots j_n)$ является линейной оболочкой произведений вида $(j_1 \cdots j_n) \tilde{j}_{n+1} \cdots \tilde{j}_{p-1} \tilde{j}_p$, где $\tilde{j}_i \in \Lambda$. Поэтому достаточно показать, что всякое такое произведение равно нулю. Для произвольных $q_1, \dots, q_n \in \Lambda$ идеал $Q(q_1 \cdots q_n)$ алгебры A , порожденный произведением $q_1 \cdots q_n$, конечномерен в силу леммы 4 и $\dim Q(q_1 \cdots q_n) \leq \ell$. Как и в случае с T , выполняется условие $Q(q_1 \cdots q_n)^\ell = 0$. Рассмотрим

$$W = T + \sum_{q_1, \dots, q_n \in \Lambda} Q(q_1 \cdots q_n).$$

Этот идеал является суммой $|\Lambda|^n + 1$ идеалов степени нильпотентности не выше ℓ , поэтому $W^{(|\Lambda|^n + 1)\ell} = 0$. Тем более $W^{(\ell^{2n} + 1)\ell} = 0$. Однако $(j_1 \cdots j_n) \tilde{j}_{n+1} \cdots \tilde{j}_p \in W^{(\ell^{2n} + 1)\ell}$. Поэтому $J^p = 0$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr., **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [2] A. Berele, A. Regev, “Asymptotic behaviour of codimensions of p.i. algebras satisfying Capelli identities”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:10 (2008), 5155–5172.
- [3] V. Drensky, “Relations for the cocharacter sequences of T -ideals”, *Proceedings of the International Conference on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Mal'cev*, Pt. 2 (Novosibirsk, 1989), *Contemp. Math.*, **131**, Pt. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 285–300.
- [4] А. С. Гордиенко, “Гипотеза Реева и кохарактеры тождеств ассоциативных алгебр PI-экспоненты 1 и 2”, *Матем. заметки*, **83**:6 (2008), 815–824.
- [5] K. I. Beidar, W. S. III Martindale, A. V. Mikhalev, *Rings with Generalized Identities*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **196**, Marcel Dekker, New York, NY, 1996.
- [6] А. С. Гордиенко, “Коразмерности обобщенных полиномиальных тождеств”, *Матем. сб.* (в печати).
- [7] A. Regev, “Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal”, *Israel J. Math.*, **47**:2–3 (1984), 246–250.

А. С. Гордиенко

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: gordienko_a_s@mail.ru

Поступило

10.12.2008