Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, Замечание об аппроксимационных свойствах фреймов общего вида, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 312–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:38:19

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ФРЕЙМОВ ОБЩЕГО ВИДА

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова

В последние годы в теории приближения активно изучаются аппроксимационные свойства переполненных систем. В частности, в связи с развитием теории всплесков и приложениями исследуются приближения по фрейм-системам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. *Фреймом* (или *фрейм-системой*) называется набор ненулевых векторов $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H такой, что

$$A\|v\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (v, \varphi_j)^2 \leq B\|v\|^2 \quad \forall v \in H, \quad (1)$$

где $0 < A \leq B < \infty$, а $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ — соответственно норма и скалярное произведение в H .

Постоянные A и B называются соответственно *нижней* и *верхней границами* фрейма Φ , а их отношение

$$\kappa = \kappa(\Phi) = \frac{B}{A}$$

называется *коэффициентом обусловленности*. Наконец, фрейм называется *жестким*, если $\kappa(\Phi) = 1$, т.е. $A = B$. Отметим здесь работу Козлова [2], в которой (в других терминах) исследовались жесткие фреймы.

Очевидно, что фреймом является любая полная ортонормированная система (о.н.с.) в H , а также произвольный базис Рисса (см. определение, например, в [3, с. 17]). Фрейм-системы, вообще говоря, не минимальны, однако для них сохраняются некоторые свойства ортогональных разложений. В частности, мы используем неравенство (см. [1])

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j \right\| \leq B^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $\{c_j\}$ — произвольная последовательность из ℓ^2 .

Для каждого фрейма $\Phi = \{\varphi_j\}$ определен (см., например, [4]) двойственный фрейм $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_j\}$, и каждый элемент $f \in H$ представим сходящимся по норме рядом

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \tilde{\varphi}_j) \varphi_j. \quad (3)$$

Если $\kappa(\Phi) = 1$, т.е. фрейм Φ жесткий, то

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{A} \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

В общем случае для фрейма Φ с границами A и B двойственный фрейм $\tilde{\Phi}$ имеет границы B^{-1} , A^{-1} ($B^{-1} \leq A^{-1}$).

Ряд (3) называется *каноническим разложением* элемента $f \in H$ по фрейм-системе Φ . При использовании фреймов как аппарата в задачах аппроксимации встает вопрос об оценках величин

$$\sigma_m(f, \Phi) = \inf_{\Lambda, \#\Lambda \leq m} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda} (f, \tilde{\varphi}_j) \varphi_j \right\| \quad (4)$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00315.

(здесь $\Lambda \subset \mathbb{N}$ – подмножество натурального ряда, $\#$ – число элементов в множестве),

$$\sigma_m(K, \Phi) = \sup_{f \in K} \sigma_m(f, \Phi), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

(здесь K – заданное подмножество в H ; обычно K – некоторый класс гладких функций в функциональном гильбертовом пространстве).

В случае, когда Φ – полная о.н.с. в H , величина (4) совпадает с наилучшим m -членным приближением элемента f по системе Φ , т.е. с величиной

$$e_m(f, \Phi) = \inf_{\{c_j\}_{j \in \Lambda}, \Lambda \subset \mathbb{N}, \# \Lambda \leq m} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda} c_j \varphi_j \right\|. \quad (6)$$

Однако для общих фреймов оценки величин (6) могут оказаться малосодержательными. Нетрудно привести пример фрейма $\Phi_0 = \{\varphi_j^0\}$, для которого множество $\{\lambda \varphi_j^0\}_{\lambda \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}}$ плотно в H , т.е. $e_1(f, \Phi_0) = 0$ для любого элемента $f \in H$.

Цель этой заметки – показать, что геометрический подход, предложенный в [5] для получения наилучших m -членных приближений, применим и к исследованию величин (5) для фреймов общего вида.

Введем некоторые обозначения: для $x = \{x_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^N$ положим

$$\|x\|_2 = \|x\|_{l_2^N} = \left(\sum_{k=1}^N x_k^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \|x\|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|, \\ B_\infty^N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty \leq 1\}$$

– N -мерный куб, а W_∞^N – множество вершин этого куба. Мы будем рассматривать также N -мерные кубы, вложенные в гильбертово пространство H , т.е. множества вида

$$B_N = \left\{ f : f = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k, |a_k| \leq 1, k = \overline{1, N} \right\}, \quad \{\psi_k\}_{k=1}^N \text{ – о.н.с.}, \quad (7)$$

а также множество вершин куба (7):

$$W_N = \left\{ f : f = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \psi_k, \varepsilon_k = \pm 1 \right\}, \quad \{\psi_k\}_{k=1}^N \text{ – о.н.с.} \quad (8)$$

Наконец, обозначим через $E_m, m = 1, 2, \dots$, совокупность всех подмножеств натурального ряда с числом элементов $\leq m$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ – фрейм с коэффициентом обусловленности $\kappa = \kappa(\Phi)$, и пусть $\delta > 0$. Если W_N – множество вершин некоторого N -мерного куба (см. (8)), то при $m \leq c(\delta)N$ имеет место неравенство

$$\sigma_m(W_N, \Phi) \geq (1 - \kappa^{1/2} \delta) \cdot N^{1/2},$$

где $c(\delta) \in (0, 1)$ – положительная постоянная, зависящая только от δ .

Следующий результат получен в [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть в $\mathbb{R}^N, N = 1, 2, \dots$, задана последовательность векторов $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, причем

$$\sum_{i=1}^\infty \|e_i\|_2^2 \leq 1, \quad \max_{1 \leq i < \infty} \|e_i\|_2 = \rho.$$

Пусть также задано число $\delta > 0$. Если $m\rho^2 \leq c(\delta)$, то найдется вершина $w \in W_\infty^N$, для которой

$$\sup_{\Lambda \in E_m} \left(\sum_{i \in \Lambda} (w, e_i)^2 \right)^{1/2} \leq \delta$$

(здесь $c(\delta), 0 < c(\delta) < 1$, – постоянная, зависящая только от δ).

ЗАМЕЧАНИЕ. В [5] рассматривается случай $\delta = 1/2$, для других δ утверждение проверяется аналогично. Кроме того, в [5] предполагалось, что $\sum \|e_i\|_2^2 = 1$; разница между этим условием и условием, приведенным в нашей формулировке утверждения 1, несущественна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_j\}_{j=1}^\infty$ – фрейм, двойственный к Φ , L – линейная оболочка функций ψ_k , $k = \overline{1, N}$ (см. (8)), и

$$\tilde{e}_j = \pi_L(\tilde{\varphi}_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $\pi_L: H \rightarrow L$ – оператор ортогонального проектирования на L . С учетом того факта, что $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ – ортонормированный базис в L , имеем

$$\sum_{j=1}^\infty \|\tilde{e}_j\|^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^\infty (\tilde{\varphi}_j, \psi_k)^2. \quad (10)$$

Поскольку $\tilde{\Phi}$ – фрейм с границами B^{-1}, A^{-1} , где A, B – границы фрейма Φ , то при $k = 1, 2, \dots, N$ имеем оценку

$$B^{-1} = B^{-1} \|\psi_k\|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty (\tilde{\varphi}_j, \psi_k)^2 \leq A^{-1} \|\psi_k\|^2 = A^{-1}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$B^{-1}N \leq \sum_{j=1}^\infty \|\tilde{e}_j\|^2 \leq A^{-1}N,$$

т.е.

$$\frac{1}{\kappa(\Phi)} \leq \sum_{j=1}^\infty \|N^{-1/2} A^{1/2} \tilde{e}_j\|^2 \leq 1. \quad (12)$$

Кроме того,

$$\|\tilde{e}\| \leq \|\tilde{\varphi}_j\| \leq A^{-1/2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

(последнее неравенство вытекает из определения фрейма), а значит,

$$\max_j \|N^{-1/2} A^{1/2} \tilde{e}_j\| \equiv \rho \leq N^{-1/2}. \quad (13)$$

Далее, для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и элемента $z \in L$, используя (2), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_m(z, \Phi) &= \inf_{\Lambda \in E_m} \left\| z - \sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{\varphi}_j) \varphi_j \right\| = \inf_{\Lambda \in E_m} \left\| z - \sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{e}_j) \varphi_j \right\| \\ &\geq \inf_{\Lambda \in E_m} \left(\|z\| - \left\| \sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{e}_j) \varphi_j \right\| \right) \geq \|z\| - B^{1/2} \sup_{\Lambda \in E_m} \left(\sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{e}_j)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, для любой точки $w \in W_N$ выполняется

$$\sigma_m(w, \Phi) \geq N^{1/2} \left(1 - \left(\frac{B}{A} \right)^{1/2} \sup_{\Lambda \in E_m} \left(\sum_{j \in \Lambda} \left(w, \left(\frac{A}{N} \right)^{1/2} \tilde{e}_j \right)^2 \right)^{1/2} \right).$$

Применяя утверждение и учитывая (13), мы устанавливаем существование точки $w_0 \in W_N$, для которой при $m \leq c(\delta)N$ выполнена оценка

$$\sigma_m(w_0, \Phi) \geq N^{1/2} \left(1 - \left(\frac{B}{A} \right)^{1/2} \delta \right) = (1 - \delta \kappa^{1/2}) N^{1/2}.$$

Теорема 1 доказана.

Если Φ – не просто фрейм, а базис Рисса, то для $f \in H$ имеет место неравенство

$$\sigma_m(f, \Phi) \leq \kappa^{1/2} e_m(f, \Phi).$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}$ – базис Рисса в H и W_N – множество вершин некоторого N -мерного куба (см. (8)). Тогда при $m \leq c(\kappa)N$ имеет место неравенство

$$\max_{w \in W_N} e_m(w, \Phi) \geq 0.9 \cdot N^{1/2}.$$

Приложения теоремы 1 и следствия 1 получаются точно так же, как аналогичные результаты в [5]. В частности, пусть $H = L^2(0, 1)$ и $H^{r, \alpha}$ – следующий класс гладких функций:

$$H^{r, \alpha} = \left\{ f \in L^2(0, 1) : \|f\|_C + \|f^{(r)}\|_C \leq 1, \right. \\ \left. \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 1 \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. При $r = 0, 1, \dots$ и $\alpha \in (0, 1]$ для произвольного фрейма Φ с коэффициентом обусловленности κ имеют место неравенства

$$\sup_{f \in H^{r, \alpha}} \sigma_m(f, \Phi) \geq c(r, \alpha, \kappa) \cdot m^{-(r+\alpha)} > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin R., Schaeffer A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 2. P. 341–266.
2. Козлов В. Я. // Матем. сб. 1948. Т. 23 (65). № 3. С. 441–474.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск: РХД, 2001.
5. Кашин Б. С. // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 187–191.

(Б. С. Кашин) Математический институт РАН им. Стеклова
(Т. Ю. Куликова) Научно-исследовательский Актуарно-финансовый центр
E-mail: kashin@mi.ras.ru, koulikt@mi.ras.ru

Поступило
13.03.2002