Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, Примеры расходящихся рядов Фурье для классов функций ограниченной Λ -вариации, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 664–672

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:57:58

Примеры расходящихся рядов Фурье для классов функций ограниченной Λ -вариации

А. Н. Бахвалов

Ранее автором было показано, что одной принадлежности непрерывной функции к классу $HBV([-\pi, \pi]^m)$ при $m \geq 3$ недостаточно для сходимости ряда Фурье по прямоугольникам. Были построены примеры функций трех и более переменных из класса Ватермана, гармонического по первой переменной и существенно более узкого по остальным, ряды Фурье которых расходятся в некоторой точке даже по кубам. В настоящей работе это утверждение усиливается. Основной результат состоит в том, что пример такого рода можно построить, даже если несколько сузить класс по первой переменной. Уточнен также одномерный результат Д. Ватермана.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Введем вначале необходимые обозначения. Положим $T = [-\pi; \pi]$. Для промежутка I на прямой через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\bar{I}_n \subset I$. Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ положим $f(I^1) = f(b^1) - f(a^1)$; если для любой функции $m - 1$ переменных уже определено выражение $f(I^1 \times \dots \times I^{m-1})$, то для функции m переменных положим

$$f(I^1 \times \dots \times I^m) = f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, b^m) - f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, a^m).$$

Величину $f(I^1 \times \dots \times I^m)$ назовем *смешанным приращением* функции f на I . Мы будем пользоваться тем, что смешанное приращение симметрично относительно перестановок переменных. Через $\text{osc}(f, I)$ обозначим колебание функции f на I .

Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β , состоящих из p и $m - p$ элементов соответственно. Если $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, то x^α — элемент $\mathbb{R}^p$, состоящий из компонент x^j , $j \in \alpha$. Для параллелепипеда $I = \bigotimes_{j=1}^m I^j$ обозначим $I^\alpha = \bigotimes_{j \in \alpha} I^j$. Через $f(I^\alpha, x^\beta)$ будем обозначать смешанное приращение f как функции аргументов x^j , $j \in \alpha$, на I^α при фиксированных значениях x^k , $k \in \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неубывающая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ положительных чисел задает *класс функций ограниченной Λ -вариации* (класс Ватермана), если

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00302) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2787.2008.1).

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$. Множество последовательностей, удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$.

Каждой последовательности возрастающих чисел $\Lambda \in \mathbb{L}$ сопоставим также возрастающую последовательность чисел $\Lambda(n) = \sum_{k=1}^n 1/\lambda_k$. Положим $H = \{n\}$. Ясно, что $H \in \mathbb{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть даны $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m$ – последовательности из $\mathbb{L}$. Тогда $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -*вариацией функции* $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно $x^1, \dots, x^m$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{\mathbf{x}}(f; \Delta) = \sup_{\{I_{k_j}^j\}_{j \in \Omega(\Delta^j)}} \sum_{k_1, \dots, k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть непустое множество $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus \alpha$. Через

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$$

обозначим $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацию f как функции переменных $x^{j_1}, \dots, x^{j_p}$ по p -мерному параллелепипеду $\Delta^\alpha = \Delta^{j_1} \times \dots \times \Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^β остальных переменных (если β не пусто).

Далее, $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных x^α по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x^\beta \in \Delta^\beta} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) = \sum_{\substack{\alpha \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \alpha \neq \emptyset}} V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta)$$

называется (*полной*) $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -*вариацией функции* $f(x^1, \dots, x^m)$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$. Множество функций, для которых она конечна, называется *классом* $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -*ограниченной вариации* на Δ и обозначается через $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ , то для краткости будем записывать $V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}$, V_Λ и $\Lambda BV(\Delta)$ соответственно. Величину V_H называют *гармонической вариацией*.

В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые функции измеримы. Через $S_n(f, x)$ будем обозначать частную сумму одномерного тригонометрического ряда Фурье функции f , а через $S_{\mathbf{n}}(g, \mathbf{x}) = S_{n_1, \dots, n_m}(g, (x^1, \dots, x^m))$ – прямоугольную частную сумму кратного тригонометрического ряда Фурье функции g .

Классы ΛBV были определены в одномерном случае Ватерманом [1], в двумерном – Саакяном [2], а для случая более высоких размерностей – Саблиным [3], [4]. В этих работах, а также в работах автора (в частности, [5]–[7]) был получен ряд результатов о сходимости тригонометрических рядов Фурье для функции из классов Ватермана. Приведем результат Ватермана и два результата автора, ограничившись в теореме В для простоты случаем непрерывных функций.

ТЕОРЕМА А (Ватерман [1]). Пусть $f \in HBV(T)$. Тогда в каждой точке ряд Фурье f сходится к величине $(1/2)(f(x+0) + f(x-0))$ и сходимость равномерна внутри каждого интервала непрерывности. Если же класс $\Lambda BV(T)$ содержит $HBV(T)$ как собственное подмножество, то в таком классе найдется непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в точке нуля.

ТЕОРЕМА В ([7; теорема 2]; [5; следствие из теоремы 2]). Пусть $f \in HBV(T^m)$ – непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция. Тогда в каждой точке $\mathbf{x} \in T^m$ функции f , для которой

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} V_H(f; (\mathbf{x} - \delta, \mathbf{x} + \delta)) = 0, \quad (1.1)$$

ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму к величине $f(\mathbf{x})$. Если функция f принадлежит к тому же некоторому классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$, где $H(n)/\Lambda^j(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого j , то условие (1.1) выполнено равномерно по T^m и сходимость является равномерной.

ТЕОРЕМА С ([6; теорема 5]). Пусть $m \geq 3$ и последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится по кубам в точке $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Вопрос о том, когда один класс Ватермана вложен в другой, решен в одномерном случае в работе Перлмана и Ватермана [8], а для случая произвольной размерности – автором [5].

ТЕОРЕМА D. Класс $(M^1, \dots, M^m)BV(\Delta)$ вложен в класс $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ тогда и только тогда, когда при каждом $p = 1, \dots, m$ найдется такое число C_p , что при всех натуральных N выполнено неравенство

$$\Lambda^p(N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_n^p} \leq C_p M^p(N) = C_p \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu_n^p}. \quad (1.2)$$

При этом, если $\tilde{C}_p = \max\{C_p, 1\}$ для каждого p , то выполняется оценка

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) \leq \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_m V_{M^1, \dots, M^m} \Lambda(f; \Delta).$$

Отметим для дальнейшего, что в случае $M^p = H$ в силу хорошо известных свойств гармонического ряда для $N \geq 2$ можно брать $\ln N$ вместо $M^p(N)$; это может повлиять лишь на числа C_p и $\tilde{C}_p$.

В п. 2 данной работы мы усилим вторую часть теоремы А, доказав такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если класс $\Lambda BV(T)$ не содержится в классе $HBV(T)$, то найдется непрерывная функция из $\Lambda BV(T)$, ряд Фурье которой расходится в точке нуля.

Более того, мы построим пример такой функции в явном виде, в то время как Ватерман привел лишь доказательство ее существования, опирающееся на принцип равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза.

В п. 3 мы, опираясь на те же идеи, усилим теорему С. Точнее, мы установим такое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \geq 3$, и последовательности $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\Lambda^1(n)} = \alpha > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty. \quad (1.3)$$

Тогда в классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится по кубам в точке $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

2. Одномерный пример. В качестве такого примера мы возьмем модификацию классического примера Лебега непрерывной функции на отрезке с расходящимся в точке рядом Фурье (см., например, [9; гл. 1, § 46]).

Определим для натуральных k и n , где $2 \leq k \leq n$, функции

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \pi/n \leq x \leq k\pi/n, \\ 0 & \text{при остальных } x \in (-\pi, \pi], \end{cases}$$

и продолжим их 2π -периодически на всю прямую.

ЛЕММА 1. Существует такая абсолютная постоянная C_1 , что для любых натуральных n, k , где $2 \leq k \leq n$, справедлива оценка

$$S_n(f_{n,k}, 0) \geq \frac{1}{2\pi} \ln k - C_1. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, (см., например, [9; гл. 1, § 32]), для любой непрерывной функции f имеет место оценка

$$|S_n(f, x) - \tilde{S}_n(f, x)| \leq C \max_T |f|,$$

где C – абсолютная постоянная, а

$$\tilde{S}_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin nu}{u} du. \quad (2.2)$$

Поэтому достаточно доказать искомую оценку для $\tilde{S}_n(f_{n,k}, 0)$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(f_{n,k}, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^{k\pi/n} \frac{\sin^2 nt}{t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\pi/n}^{k\pi/n} \frac{dt}{t} - \int_{\pi/n}^{k\pi/n} \frac{\cos(2nt)}{t} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \ln k - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{k\pi} \frac{\cos 2s}{s} ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_{\pi}^{\infty} (\cos 2s/s) ds$ сходится, а значит, его частичные интегралы ограничены в совокупности, получаем утверждение леммы.

Пусть заданы такие последовательности натуральных k_j , n_j и последовательность вещественных положительных чисел c_j , что $c_j \downarrow 0$, $k_j \geq 2$ и $n_j \geq k_j n_{j-1}$. Последнее условие гарантирует, что носители функций f_{n_j, k_j} попарно не перекрываются. Поэтому равномерно сходится ряд

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_{n_j, k_j}(x).$$

Рассмотрим также функции, заданные его остатками

$$g_p(x) = \sum_{j=p+1}^{\infty} c_j f_{n_j, k_j}(x).$$

ЛЕММА 2. Если $n < n_{p+1}/k_{p+1}$, то

$$|S_n(g_p, 0)| \leq 4\pi c_{p+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} |S_n(g_p, 0)| &= \left| \sum_{j=p+1}^{\infty} c_j S_n(f_{n_j, k_j}, 0) \right| = \left| \sum_{j=p+1}^{\infty} c_j \int_{\pi/n_j}^{k_j \pi/n_j} \sin(n_j t) \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} dt \right| \\ &\leq \sum_{j=p+1}^{\infty} c_j \left(\frac{k_j \pi}{n_j} - \frac{\pi}{n_j} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ &\leq \left(n + \frac{1}{2} \right) (\max_{j \geq p} c_j) \sum_{j=p+1}^{\infty} \left(\frac{k_j \pi}{n_j} - \frac{\pi}{n_j} \right) \leq 4\pi c_{p+1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть класс $\Lambda BV(T)$ не содержится в классе $HBV(T)$. По теореме D найдется такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$, что $k_1 \geq 2$ и

$$\frac{\Lambda(2k_j)}{\ln(2k_j)} \leq \frac{1}{j^3}.$$

Положим

$$c_j = \frac{1}{j^2 \Lambda(2k_j)}.$$

Тогда $c_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. В то же время

$$c_j \ln(k_j) \geq \frac{1}{j^2 \Lambda(2k_j)} \cdot \frac{j^3 \Lambda(2k_j)}{2} = \frac{j}{2} \rightarrow +\infty.$$

Выберем теперь по индукции последовательность натуральных чисел $\{n_j\}$. Положим $n_1 = k_1$. Пусть $n_1, \dots, n_p$ уже выбраны. Рассмотрим функцию

$$h_p(x) = \sum_{j=1}^p c_j f_{n_j, k_j}(x).$$

Ряд Фурье этой функции сходится в нуле к нулю (например, по принципу локализации). Выберем n_{p+1} столь большим, что $n_{p+1} \geq n_p k_{p+1}$ и, к тому же, для любого $n \geq n_{p+1}$ имеет место оценка

$$|S_n(h_p, 0)| \leq 1.$$

Покажем, что функция

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_{n_j, k_j}(x)$$

с выбранными выше параметрами c_j , n_j и k_j удовлетворяет условию теоремы. Действительно, несложно видеть, что

$$V_{\Lambda}(f, T) \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j V_{\Lambda}(f_{n_j, k_j}, T) \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j \Lambda(2k_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty,$$

так что функция принадлежит классу $\Lambda BV(T)$.

С другой стороны, для любого натурального p имеет место оценка

$$\begin{aligned} |S_{n_p}(f, 0)| &\geq c_p |S_{n_p}(f_{n_p, k_p}, 0)| - |S_{n_p}(h_{p-1}, 0)| - |S_{n_p}(g_p, 0)| \\ &\geq \frac{1}{2\pi} c_p \ln k_p - 1 - \pi c_{p+1} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

при $p \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

3. Многомерный пример. Доказательство теоремы 2 будет модификацией доказательства теоремы С и, как и последнее, опирается на следующую конструкцию.

Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим систему вложенных в T интервалов $\{D_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ и системы попарно непересекающихся интервалов $\{D_i^q\}_{i=1}^{\infty}$, $q = 2, \dots, m$, где $D_i^q = (a_i^q, b_i^q) \subset T$.

Пусть $f_i(x)$ – произвольные функции на T , удовлетворяющие условиям $f_i(t) = 0$ при $t \leq a_i^1$ и $f_i(t) = 0$ при $t \geq b_i^1$.

Обозначим через $h_i^q(t)$ произвольную функцию, равную нулю при $t \leq a_i^q$ и $t \geq b_i^q$, такую, что $h_i^q((a_i^q + b_i^q)/2) = \pm 1$, $|h_i^q(t)|$ не убывает на $[a_i^q; (a_i^q + b_i^q)/2]$ и не возрастает на $[(a_i^q + b_i^q)/2; b_i^q]$.

Назовем “диагональной” функцию на T^m , имеющую вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_i(x^1) \prod_{q=2}^m h_i^q(x^q) \right). \quad (3.1)$$

Ясно, что носитель этой функции содержится в объединении замыканий попарно непересекающихся параллелепипедов $D_i^1 \times \dots \times D_i^q$.

ЛЕММА 3 [6; лемма 6]. Пусть последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) “диагональная” функция $f(\mathbf{x})$, определенная формулой (3.1), принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$;

(б) при всех натуральных i выполнено $f_i \in \Lambda^1 BV(T)$, и величины $V_{\Lambda^1}(f_i, T)$ ограничены в совокупности некоторым числом C_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. По условиям теоремы величина α положительна. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$ так, чтобы $k_1 \geq 3$ и $\ln 2k_j / \Lambda^1(2k_j) > \alpha/2$.

Вторую последовательность $\{n_j\}$ мы будем выбирать по индукции; пока лишь потребуем, чтобы $n_1 > 10$ и $k_{j+1}/n_{j+1} < 1/n_j$.

Рассмотрим функции

$$f_j(t) = \frac{1}{\ln k_j} f_{n_j, k_j}(t).$$

По определению их носителями будут замыкания интервалов $D_j^1 = (\pi/n_j, k_j\pi/n_j)$. Нетрудно видеть, что

$$V_{\Lambda^1}(f_j, T) \leq \frac{\Lambda^1(2k_j)}{\ln k_j} \leq \frac{4}{\alpha}.$$

Для $q = 2, \dots, m$ возьмем $D_j^q = (\pi/(n_j + 1/2), 2\pi/(n_j + 1/2))$ и $h_j(t) = h_j^q(t) = \sin((n_j + 1/2)t)$ на D_j^q и нулю вне него.

Тогда “диагональная” функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^m h_{2j}(x^q) \right) \quad (3.2)$$

принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(T^m)$ по лемме 3.

Поскольку функции f_j и h_j непрерывны на T , а $\max_t |f_j(t)|$ убывает с ростом j , f непрерывна и $f(\mathbf{0}) = 0$. Покажем, что при достаточно быстро растущих $\{n_j\}$ найдется положительная величина δ такая, что

$$\begin{cases} R_j = S_{n_j, \dots, n_j}(f, \mathbf{0}) \geq 2\delta & \text{для четных } j, \\ |R_j| = |S_{n_j, \dots, n_j}(f, \mathbf{0})| \leq \delta & \text{для нечетных } j. \end{cases} \quad (3.3)$$

В силу равномерной сходимости ряда (3.2)

$$R_j = \sum_{i=1}^{\infty} S_{n_j}(f_{2i}, 0) (S_{n_j}(h_{2i}, 0))^{m-1} = \sum_{i=1}^{\infty} R_{j, 2i}.$$

Величины $S_{n_j}(f_i, 0)$ обладают следующими тремя свойствами (все $o(1)$ берутся при $j \rightarrow \infty$).

(а) Для любого j

$$S_{n_j}(f_j, 0) \geq \frac{1}{2\pi} - o(1) \quad (3.4)$$

(следует из леммы 1).

(б) Пусть $f_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ (по построению это непрерывная функция). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^{\infty} |S_{n_j}(f_i, 0)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{k_{j+1}\pi/n_{j+1}} |f_0(t)| \frac{\sin(n_j + 1/2)t}{2 \sin t/2} dt \\ &\leq \frac{n_j + 1/2}{n_j} \max_{[0; \pi/n_j]} |f_0(t)| = o(1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

(в) Если $n_1, \dots, n_{j-1}$ уже выбраны, то для любого $\varepsilon_j > 0$ можно выбрать n_j столь большим, что для любого $n > n_j$ выполнена оценка

$$\sum_{i=1}^{j-1} |S_n(f_i, 0)| < \varepsilon_j. \quad (3.6)$$

Действительно, для любого i

$$S_n(f_i, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

где первое слагаемое можно рассматривать как коэффициент Фурье непрерывной функции $f_i(t)/t$, поэтому оно стремится к нулю с увеличением n .

Далее, для любого j

$$S_{n_j}(h_j, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(n_j+1/2)}^{2\pi/(n_j+1/2)} \frac{\sin^2(n_j + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} dt = c_0 + o(1), \quad (3.7)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{u} du$$

есть абсолютная постоянная. С другой стороны, для любых j и i справедлива оценка

$$|S_{n_j}(h_i, 0)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{\pi/(n_j+1/2)}^{2\pi/(n_j+1/2)} \frac{\sin(n_j + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} \sin\left(n_i + \frac{1}{2}\right)t dt \right| \leq 1. \quad (3.8)$$

Пусть $\delta = c_0^{m-1}/(9\pi)$. Выберем последовательность $\{n_j\}$ так, чтобы (3.6) выполнялось для $\varepsilon_j = \delta/2$. Тогда с учетом (3.8) для любого k выполнено неравенство

$$\sum_{2i < j} |R_{j,2i}| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (3.9)$$

На основании оценок (3.4) и (3.7) выберем j_0 так, чтобы при $j \geq j_0$ выполнялось неравенство

$$R_{j,j} \geq \frac{c_0^{m-1}}{3\pi} = 3\delta. \quad (3.10)$$

Кроме того, выберем j_0 столь большим, чтобы при $j \geq j_0$ сумма в левой части (3.5) не превосходила $\delta/2$. Тогда с учетом (3.8) справедливо

$$\sum_{2i > j} |R_{j,2i}| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (3.11)$$

Объединяя оценки (3.9), (3.10) и (3.11), получаем, что при четных $j \geq j_0$ справедливо неравенство

$$R_j \geq R_{j,j} - \sum_{2i < j} |R_{j,2i}| - \sum_{2i > j} |R_{j,2i}| \geq 3\delta - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 2\delta,$$

а при нечетных $j \geq j_0$ – неравенство

$$|R_j| \leq \sum_{2i < j} |R_{j,2i}| + \sum_{2i > j} |R_{j,2i}| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Таким образом, выполнены неравенства (3.3), что и означает расходимость по кубам в нуле. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", *Studia Math.*, **44**:1 (1972), 107–117.
- [2] А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **21**:6 (1986), 517–529.
- [3] А. И. Саблин, *Функции ограниченной Λ -вариации и ряды Фурье*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1987.
- [4] А. И. Саблин, " Λ -вариация и ряды Фурье", *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 10, 66–68.
- [5] А. Н. Бахвалов, "О сходимости и локализации кратных рядов Фурье для классов функций ограниченной Λ -вариации", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 3, 6–12.
- [6] А. Н. Бахвалов, "Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье", *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 3–20.
- [7] А. Н. Бахвалов, "Представление непериодических функций ограниченной Λ -вариации интегралом Фурье в многомерном случае", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 3–22.
- [8] S. Perlman, D. Waterman, "Some remarks on functions of Λ -bounded variation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74**:1 (1979), 113–118.
- [9] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматлит, М., 1961.

А. Н. Бахвалов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: anbakh@rol.ru

Поступило

10.12.2008