Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х.-К. Лиу, Д.-Й. Ронг, Об эрмитовых неотрицательно определенных решениях матричных уравнений $\mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^* = \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^*$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 470–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:03:48

Об эрмитовых неотрицательно определенных решениях матричных уравнений $A_i X A_i^* = B_i B_i^*$

Ху-Кинг Лиу, Жиан-Йинг Ронг

Рассматривается задача существования эрмитовых неотрицательно определенных решений для системы q матричных уравнений

$$A_i X A_i^* = B_i B_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Результат, полученный в данной статье, является более простым и регулярным вариантом результата Жанга [1], о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы эти матричные уравнения при $q = 2$ имели эрмитовы неотрицательно определенные решения, который был получен Жангом при более подробном рассмотрении результатов Янга с соавторами [2]. Кроме того, приводится необходимое условие в общем случае, а затем высказывается гипотеза, которую можно обосновать, по крайней мере, в некоторых частных случаях.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Для удобства во всей статье используются следующие обозначения: $A \in \mathbb{C}_{n,p}$, если A – комплексная $(n \times p)$ -матрица, $A \in \mathbb{C}_n^H$, если $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ является эрмитовой матрицей, $A \in \mathbb{C}_n^{\geq}$, если $A \in \mathbb{C}_n^H$ является неотрицательно определенной матрицей. Далее, пусть U_n – подмножество пространства $\mathbb{C}_{n,n}$, состоящее из всех унитарных матриц. Для заданной матрицы $A \in \mathbb{C}_{n,p}$, символы A^* , A^- , $A^\dagger$, $\text{rk}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ и $P_A = A(A^*A)^-A^* = AA^\dagger$ будут обозначать сопряженную транспонированную матрицу, любую обобщенную обратную матрицу, обратную матрицу Мура–Пенроза, ранг матрицы, пространство столбцов (область значений) и комплексную ортогональную проекцию матрицы A соответственно; также будем писать $Q_A = I_n - P_A$, где символ I_n обозначает единичную матрицу в пространстве $\mathbb{C}_{n,n}$.

Из литературы хорошо известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы матричное уравнение

$$A X A^* = B B^* \tag{1.1}$$

имело эрмитово неотрицательно определенное решение, является соотношение $P_A B = B$ или, что то же самое, $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$. В работе Дая и Ланкастера [3], убедительно показано, какую важную роль играет уравнение (1.1) (см. также работу Гросса [4], где общие эрмитовы решения уравнения (1.1) обсуждаются более подробно). Янг с соавторами [2] рассматривали расширенную версию уравнения (1.1),

$$A_i X A_i^* = B_i B_i^*, \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке грантов HGQ0637 и HGQN0725 и программы “Green & Blue Project” на 2008 г. по поддержке молодых ученых в Хуайяньском технологическом институте.

пытаясь решить так называемую задачу *сохранения распределения независимости*, а затем применить свои результаты в многомерной линейной модели в статистике (в предположении матричной нормальности). Однако, Гросс [5], приведя контр-пример, показал, что необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение (1.2) имело эрмитово неотрицательно определенное решение, которые были получены Янгом с соавторами [2], вызывают подозрения и, следовательно, соответствующее решение также некорректно. Затем, Жанг [1], изучая результаты [2], исследовал и решал ту же самую задачу. Очевидно, что обосновать условия (см. теорему 2.1 ниже), полученные Жангом [1], не так просто. В данной постановке задачи, ставятся два основных вопроса.

- Как сформулировать краткий, но в то же время стандартный результат относительно условий необходимых и достаточных для того, чтобы уравнение (1.2) имело эрмитово неотрицательно определенное матричное решение?
- При каких условиях в общем случае системы q матричных уравнений

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^* = \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (1.3)$$

существует эрмитова неотрицательно определенная матрица $\mathbf{X}_0$, удовлетворяющая условию $\mathbf{A}_i \mathbf{X}_0 \mathbf{A}_i^* = \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^*$ при любых $i = 1, 2, \dots, q$?

В следующем разделе рассматривается альтернативный вариант теоремы 2.1, основанный на прямом матричном методе частной эквивалентности, и делается весьма полезная попытка высказать предположение в терминах вышеизложенной нерешенной задачи, о возможности ее дальнейшего обобщения в смысле разрешимости эрмитовых неотрицательно определенных матричных уравнений (1.3).

2. Результаты, полученные для матричных уравнений: случай $q = 2$. Сначала приведем результат, полученный Жангом [1].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть даны $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_{p_i, n}$. Уравнения (1.2) имеют общее эрмитово неотрицательно определенное решение тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $\mathcal{R}(\mathbf{B}_1) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_1)$ и $\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \{\mathbf{I}_{p_2} - [\mathbf{A}_2(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{A}_1)][\mathbf{A}_2(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{A}_1)]^\dagger\} \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{G} &= \{\mathbf{I}_{p_2} - [\mathbf{A}_2(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{A}_1)][\mathbf{A}_2(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{A}_1)]^\dagger\} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{B}_1. \end{aligned}$$

При выполнении условий теоремы автор предлагает разделить процесс получения обычного общего эрмитова неотрицательно определенного решения на пять этапов. Как мы видим, необходимые и достаточные условия, приведенные в теореме 2.1, недостаточно прозрачны и их трудно проверить на практике. Поэтому сначала рассмотрим первую часть теоремы 2.1 в новой формулировке. Для демонстрации нашего основного результата сформулируем следующую лемму, которая доказывается непосредственной проверкой.

ЛЕММА 2.1. При заданных $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_{p_i, n}$ следующие утверждения эквивалентны:

- существует матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^{\geq}$, удовлетворяющая уравнению (1.2);
- $\mathcal{R}(\mathbf{B}_j) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_j)$ и матричные уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^* &= \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^*, \\ \mathbf{A}_j^\dagger \mathbf{A}_j \mathbf{X} \mathbf{A}_j^* \mathbf{A}_j^{\dagger*} &= \mathbf{A}_j^\dagger \mathbf{B}_j \mathbf{B}_j^* \mathbf{A}_j^{\dagger*}, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2.1)$$

имеют обычное эрмитово неотрицательно определенное решение;

- $\mathcal{R}(\mathbf{B}_i) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_i)$, $i = 1, 2$, и матричные уравнения $\mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^* \mathbf{A}_i^{\dagger*} = \mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^* \mathbf{A}_i^{\dagger*}$, $i = 1, 2$, имеют эрмитово неотрицательно определенное матричное решение.

Следует заметить, что вышеприведенные частные эквивалентности не только представляют интерес с математической точки зрения, но и являются технически значимыми для построения краткого регулярного альтернативного варианта (см. теорему 2.2) теоремы 2.1. Действительно, можно показать, что условие $\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$ в теореме 2.1 эквивалентно условию

$$(\mathbf{I}_{p_2} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^* \perp}) \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* (\mathbf{I}_{p_2} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^* \perp}) = (\mathbf{I}_{p_2} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^* \perp}) \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^* \mathbf{A}_1^{\dagger*} \mathbf{A}_2^* (\mathbf{I}_{p_2} - \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^* \perp}),$$

если используется обозначение комплексной ортогональной проекции, где $\mathbf{A}^\perp$ – матрица максимального ранга такая, что $\mathbf{A}^* \mathbf{A}^\perp = \mathbf{0}$. Заметим, что $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$ – это соответствующим образом выбранная матрица $\mathbf{A}^\perp$. Таким образом, трудно и даже почти невозможно провести прямое упрощение и регуляризацию условий в теореме 2.1 (см. также замечание 2.1).

Пусть $\mathbf{H}$ – произвольная, но фиксированная матрица, столбцы которой являются базисными векторами пространства $\mathcal{R}(\mathbf{A}_1^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_2^*)$, т.е. $\mathcal{R}(\mathbf{H}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}_1^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_2^*)$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. При заданных $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_{p_i, n}$ матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^{\geq}$, удовлетворяющая уравнению (1.2), существует тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- $\mathcal{R}(\mathbf{B}_i) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_i)$, $i = 1, 2$;
- $\mathbf{H}^* \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^* \mathbf{A}_1^{\dagger*} \mathbf{H} = \mathbf{H}^* \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \mathbf{A}_2^{\dagger*} \mathbf{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 (при $i = 1$ и $j = 2$ в первом утверждении или непосредственно из третьего утверждения) и первой части теоремы 2.1 следует, что матричные уравнения (1.2) имеют общее эрмитово неотрицательно определенное решение тогда и только тогда, когда условие пункта (а) и уравнение (2.2), приведенное ниже, выполняются одновременно:

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^* \perp}) (\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*} \mathbf{T}_1 \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*} - \mathbf{T}_2) (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^* \perp}) = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{T}_i = \mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^* \mathbf{A}_i^{\dagger*}$, $i = 1, 2$. Заметим, что $\mathcal{R}(\mathbf{T}_i) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_i^*)$ или, что эквивалентно, $\mathbf{P}_{\mathbf{A}_i^*} \mathbf{T}_i = \mathbf{T}_i$. Теперь для доказательства теоремы достаточно доказать эквивалентность (2.2) $\Leftrightarrow$ (b) при условии (а). Из того, что (см., например, [6])

$$\mathcal{R}(\mathbf{F}^* (\mathbf{F}\mathbf{Z})^\perp) = \mathcal{R}(\mathbf{F}^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{Z}^\perp) \quad (2.3)$$

для заданных комплексных матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{Z}$ подходящих порядков, следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^\perp) &= \mathcal{R}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{R}[(\mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^\perp], \\ \mathcal{R}(\mathbf{B}^* \mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^\perp) &= \mathcal{R}(\mathbf{B}^* \mathbf{B}) \cap \mathcal{R}[(\mathbf{A}^{\perp})^\perp] = \mathcal{R}(\mathbf{B}^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}^*). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(\mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^* [\mathbf{B}(\mathbf{B}^* \mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^\perp] = (\mathbf{B}^* \mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^* (\mathbf{B}^* \mathbf{B} \mathbf{A}^{\perp})^\perp = \mathbf{0},$$

откуда при учете выражения $\text{rk}(\mathbf{B}(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^{*\perp})^\perp) = \text{rk}(\mathbf{B}^*\mathbf{B}(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^{*\perp})^\perp)$ и стандартной формулы для ранга матрицы $\text{rk}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{*\perp}) = \text{rk}(\mathbf{B}^*, \mathbf{A}^*) - \text{rk}(\mathbf{A}^*)$ следует, что

$$\mathbf{P}_{\mathbf{B}\mathbf{A}^{*\perp}} + \mathbf{P}_{\mathbf{B}(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^{*\perp})^\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{B}}. \quad (2.4)$$

Подставляя $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}$ в (2.4), получим

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}\mathbf{A}_1^{*\perp}})\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}} + \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}\mathbf{A}_1^{*\perp})^\perp})\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*} = \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}\mathbf{A}_1^{*\perp})^\perp} = \mathbf{P}_0,$$

а именно, так как матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}$ эрмитова и идемпотентна, следовательно, (2.2) эквивалентно выражению $\mathbf{P}_0(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2)\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$. Снова, полагая $\mathbf{Z} = \mathbf{A}_1^{*\perp}$ и $\mathbf{F} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}$, из (2.3) получим

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_0) = \mathcal{R}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}) \cap \mathcal{R}[(\mathbf{A}_1^{*\perp})^\perp] = \mathcal{R}(\mathbf{A}_1^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_2^*),$$

что означает, что $\mathbf{P}_0$ является комплексной ортогональной проекцией на $\mathcal{R}(\mathbf{A}_1^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_2^*)$. Следовательно, далее из (2.2) следует условие пункта (b) при условии предварительного умножения $\mathbf{P}_0(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2)\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$ на $\mathbf{H}^*$ и последующего умножения на $\mathbf{H}$, и обратно. Таким образом, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Представление (b), приведенное в теореме 2.2, является весьма важным и интересным. Тому есть следующие две причины.

- *Упрощение.* Внимательно читая доказательство теоремы 2.2, можно заметить, что матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}$ (обладающая свойствами эрмитовости и идемпотентности) может быть полезна при построении краткого альтернативного варианта первой части теоремы 2.1, тогда как матрица $\mathbf{A}_2$ (не обладающая этими свойствами) бесполезна. Заметим, что матрица $\mathbf{H}$ может быть построена из ступенчатой матрицы, которая далее получается с помощью последующего умножения матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^* & \mathbf{A}_2^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^* \end{pmatrix}$$

на ряд первичных матриц. Кроме того, следует заметить, что для любой произвольной, но фиксированной матрицы $\mathbf{A}_i^-$, равенство $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_i^-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^*(\mathbf{A}_i^-)^*\mathbf{H} = \mathbf{H}^*\mathbf{A}_i^\dagger\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^*\mathbf{A}_i^{*\dagger}\mathbf{H}$ выполняется в терминах соотношения $\mathcal{R}(\mathbf{H}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}_1) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_2) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_i)$, т.е., условие пункта (b) можно заменить равенством

$$\mathbf{H}^*\mathbf{A}_1^-\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*(\mathbf{A}_1^-)^*\mathbf{H} = \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2^-\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*(\mathbf{A}_2^-)^*\mathbf{H}$$

для любых произвольных, но фиксированных $\mathbf{A}_1^-$ и $\mathbf{A}_2^-$ в этой постановке, так как матрица $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_i^-\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^*(\mathbf{A}_i^-)^*\mathbf{H}$ инвариантна относительно выбора соответствующей обобщенной обратной матрицы. Отсюда бы следовало, что условие пункта (b) можно проверить (только) с помощью предварительного преобразования, дающего матрицу $\mathbf{A}_i^-$.

- *Регулярность.* Регулярность представления (b) очень привлекательна и может использоваться для дальнейшего обобщения, т.е., для изучения уравнения (1.3) относительно так называемой эрмитовой неотрицательно определенной разрешимости. Однако же Жанг [1] не дал представления для $\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$ в виде (b).

3. Результаты, полученные для матричных уравнений: общий случай и гипотеза. Как мы видели, поиск необходимых и достаточных условий для того, чтобы уравнения (1.3) имели общее эрмитово неотрицательно определенное решение, представляет значительный интерес с математической точки зрения. Мы сначала приведем результат о необходимых условиях, который непосредственно следует из теоремы 2.2, а затем выскажем следующую гипотезу относительно необходимых и достаточных условий.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть заданы $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_{p_i, n}$. Если существует матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^{\geq}$ такая, что $\mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^* = \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^*$ для любых $i = 1, 2, \dots, q$, то следующие условия должны обязательно выполняться одновременно:

- (a) $\mathcal{R}(\mathbf{B}_i) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_i)$, $i = 1, 2, \dots, q$;
- (b) $\mathbf{H}_{ij}^* \mathbf{T}_i \mathbf{H}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}^* \mathbf{T}_j \mathbf{H}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, q$, где $\mathbf{T}_i = \mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^* \mathbf{A}_i^\dagger$, и $\mathbf{H}_{ij}$ – произвольная, но фиксированная матрица, столбцы которой являются базисными векторами пространства $\mathcal{R}(\mathbf{A}_i^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_j^*)$.

Следующая лемма аналогична лемме 2.1.

ЛЕММА 3.1. При заданных $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_{p_i, n}$ нижеследующие утверждения эквивалентны:

- существует матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^{\geq}$, удовлетворяющая условию (1.3);
- $\mathcal{R}(\mathbf{B}_i) \subset \mathcal{R}(\mathbf{A}_i)$ при $i = 1, 2, \dots, q$, и матричные уравнения

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}_i^*} \mathbf{X} \mathbf{P}_{\mathbf{A}_i^*} = \mathbf{A}_i^\dagger \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^* \mathbf{A}_i^\dagger, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (3.1)$$

имеют эрмитовы неотрицательно определенные матричные решения.

Пусть теперь $\mathbf{H}_{i_1 \dots i_k}$ – произвольная, но фиксированная матрица, столбцы которой являются базисными векторами пространства $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{R}(\mathbf{A}_{i_j}^*)$ для любых $k = 1, 2, \dots, q$. Предположим, что условия (a) и (b), представленные в теореме 3.1, являются необходимыми (что верно) и еще достаточными для уравнения (1.3).

ГИПОТЕЗА 3.1. При заданных $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i \in \mathbb{C}_{p_i, n}$ матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_n^{\geq}$ такая, что $\mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{A}_i^* = \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^*$ для любых $i = 1, 2, \dots, q$, существует тогда и только тогда, когда условие (a), приведенное в теореме 3.1, и условие (b*), данное ниже, выполняются одновременно:

$$(b^*) \quad \mathbf{H}_{i_1 \dots i_k}^* \mathbf{T}_{i_j} \mathbf{H}_{i_1 \dots i_k} = \mathbf{H}_{i_1 \dots i_k}^* \mathbf{T}_i \mathbf{H}_{i_1 \dots i_k}, \quad j, l = 1, 2, \dots, k, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Фактически, (b*) сводится к (b) благодаря импликациям

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij}^* \mathbf{T}_i \mathbf{H}_{ij} &= \mathbf{H}_{ij}^* \mathbf{T}_j \mathbf{H}_{ij} \\ \mathbf{H}_{jk}^* \mathbf{T}_j \mathbf{H}_{jk} &= \mathbf{H}_{jk}^* \mathbf{T}_k \mathbf{H}_{jk} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_{ijk}^* \mathbf{T}_i \mathbf{H}_{ijk} = \mathbf{H}_{ijk}^* \mathbf{T}_j \mathbf{H}_{ijk} = \mathbf{H}_{ijk}^* \mathbf{T}_k \mathbf{H}_{ijk} \\ \mathbf{H}_{ki}^* \mathbf{T}_k \mathbf{H}_{ki} &= \mathbf{H}_{ki}^* \mathbf{T}_i \mathbf{H}_{ki} \end{aligned}$$

при любых i, j, k и благодаря еще некоторым более простым импликациям.

Теперь рассмотрим случай $q = 3$ для уравнения (1.3). Подставляя

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{A}_3^*} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{A}_3^*} = \mathbf{P}_{\mathbf{A}_1^*}, \quad \mathbf{P}_{\mathbf{A}_3^*} = \mathbf{P}_{(\mathbf{A}_1^*, \mathbf{A}_2^*)} = \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}_1^*) + \mathcal{R}(\mathbf{A}_2^*)}, \\ \mathbf{P}_{\mathbf{A}_3^*} &= \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2^*} \mathbf{A}_1^*)^\perp} = \mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}_1^*) \cap \mathcal{R}(\mathbf{A}_2^*)} \end{aligned}$$

соответственно в (3.1) при $q = 3$, легко видеть, что гипотеза 3.1 выполняется в четырех частных ситуациях, рассмотренных выше. Однако гипотеза 3.1 требует дальнейшего изучения.

Авторы выражают благодарность рецензентам за ценные замечания, которые способствовали улучшению текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] X. Zhang, “The general common Hermitian nonnegative-definite solution to the matrix equations $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{BB}^*$ and $\mathbf{CXC}^* = \mathbf{DD}^*$ with applications in statistics”, *J. Multivariate Anal.*, **93**:2 (2005), 257–266.
- [2] D. M. Young, J. W. Seaman jr., L. M. Meaux, “Independence distribution preserving covariance structures for the multivariate linear model”, *J. Multivariate Anal.*, **68**:2 (1999), 165–175.
- [3] D. Hua, P. Lancaster, “Linear matrix equations from an inverse problem of vibration theory”, *Linear Algebra Appl.*, **246** (1996), 31–47.
- [4] J. Groß, “A note on the general Hermitian solution to $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{B}$ ”, *Bull. Malaysian Math. Soc.* (2), **21**:2 (1998), 57–62.
- [5] J. Groß, “Nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $\mathbf{AXA}^* = \mathbf{B}$ – revisited”, *Linear Algebra Appl.*, **321**:1–3 (2000), 123–129.
- [6] J. Groß, “A note on the concepts of linear and quadratic sufficiency”, *J. Statist. Plann. Inference*, **70**:1 (1998), 69–76.

Ху-Кинг Лиу

Хуайяньский технологический институт, Хуайянь, Китай

E-mail: liuxuqing688@gmail.com

Поступило

22.04.2007

Жиан-Йинг Ронг

Хуайяньский колледж информационных технологий,

Хуайянь, Китай

E-mail: rjy98@163.com