Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 323–329

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 02:47:59

УДК 517.5

О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$

С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная

В пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$, построены наилучшие линейные методы приближения изучавшихся Л. В. Тайковым классов аналитических в единичном круге функций $W^r H_q \Phi$, $r \in \mathbb{N}$, у которых усредненные модули непрерывности второго порядка угловых граничных значений r -х производных мажорируются заданной функцией Φ , удовлетворяющей определенным ограничениям.

Библиография: 8 названий.

1. Введем необходимые обозначения и понятия. Пусть $U_\rho \stackrel{\text{df}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, где $0 < \rho \leq 1$, $U_1 = U$; $A(U_\rho)$ – множество функций, аналитических в круге U_ρ ; H_q , $q \geq 1$, – пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых

$$\|f\|_q = \|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f, \rho),$$

где

$$M_q(f, \rho) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right\}^{1/q}.$$

Известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $0 \leq t < 2\pi$. Полагаем

$$H_{q,\rho} \stackrel{\text{df}}{=} \{f \in A(U_\rho) : \|f(z)\|_{q,\rho} = \|f(\rho z)\|_q < \infty\}, \quad H_{q,1} \equiv H_q,$$

и для $r \in \mathbb{N}$

$$H_q^r \stackrel{\text{df}}{=} \{f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q\}, \quad f^{(r)}(z) = \frac{d^r f(z)}{dz^r}.$$

Для функции $f \in H_q$ запишем модуль непрерывности второго порядка

$$\omega_2(f, 2x)_q = \sup\{\|f(e^{i(\cdot+t)}) - 2f(e^{i(\cdot)}) + f(e^{i(\cdot-t)})\|_q : |t| \leq x\}, \quad x > 0.$$

Всюду далее $\Phi(t)$ – положительная неубывающая выпуклая вниз при $t > 0$ функция такая, что $\lim\{\Phi(t) : t \rightarrow 0\} = \Phi(0) = 0$. Используя Φ в качестве мажоранты, рассмотрим содержащиеся в работе Тайкова [1] классы аналитических в круге U функций

$$W^r H_q \Phi \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ f \in H_q^r : \frac{k}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(r)}, 2x)_q dx \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2k}\right) \forall k \in \mathbb{N} \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$. Из результатов [1], в частности, следует, что если мажоранта $\Phi(t)$ при $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - 2 \frac{\sin(\lambda\pi/2)}{\pi\lambda} & \text{при } 0 < \lambda \leq 2, \\ 2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) & \text{при } \lambda \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

то для любого натурального числа $n > r$ при $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства

$$b_n(W^r H_q \Phi, H_q) = d_n(W^r H_q \Phi, H_q) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \quad (2)$$

В (2) b_n и d_n — соответственно бернштейновский и колмогоровский n -поперечники, а $\alpha_{n,r} \stackrel{\text{df}}{=} n(n-1) \cdots (n-r+1)$. В [1] показано, что ограничению (1) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t) = t^{2/(\pi-2)}$.

2. Для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$, принадлежащей множеству $A(U)$, запишем следующий линейный полиномиальный оператор:

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \left[\beta_{k,r} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k(f) z^k, \quad (3)$$

где $n > r$,

$$\beta_{k,r} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{2(n-r)}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-r))} (1 - \sin(n-r)x) \cos(k-r)x \, dx, \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть f — произвольная функция из класса $W^r H_q \Phi$, $0 < \rho \leq 1$, n — любое натуральное число, большее r . Тогда справедливо неравенство

$$\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \quad (4)$$

Если мажорирующая функция Φ при $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению (1), то неравенство (4) нелучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0 \in W^r H_q \Phi$, обращающая его в равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{K}_{r,n,\rho}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\alpha_{n,r}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\rho^{j-n}}{\alpha_{j,r}} \cos(j-n)t. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться в том, что числовая последовательность $\{\rho^j / \alpha_{n+j,r}\}_{j=0}^{\infty}$ является выпуклой вниз и ее общий член стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Тогда в силу [2; с. 294] $\mathcal{K}_{r,n,\rho}$ является неотрицательной и интегрируемой функцией. Обозначим

$$\mathcal{L}_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} \left(1 - \frac{\rho^{2(n-k)} \alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \right) c_k(f) z^k.$$

Воспользовавшись [3; с. 184–185], для произвольного элемента $f \in W^r H_q \Phi$ запишем следующее равенство:

$$f(\rho z) - \mathcal{L}_{n-1,r,\rho}(f, \rho z) = \frac{\rho^n z^r}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(ze^{-it}) e^{i(n-r)t} \mathcal{K}_{r,n,\rho}(t) dt, \quad z \in U, \quad (6)$$

которое проверяется непосредственным образом путем разложения производной $f^{(r)}$ в ряд Тейлора и последующим почленным интегрированием подынтегрального выражения с учетом вида ядра (5).

Для получения оценки сверху величины наилучшей полиномиальной аппроксимации элемента $f \in H_q^r$ в [1; с. 288] в качестве промежуточного приближения использовалась специальным образом построенная функция, которая в нашем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f^{(r)}, z) &= \frac{n-r}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-r))} (f^{(r)}(ze^{ix}) + f^{(r)}(ze^{-ix}))(1 - \sin(n-r)x) dx \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} \beta_{k,r} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad z \in U. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, что $\mathcal{F}(f^{(r)})$ является элементом пространства Харди H_q . Полагая для $f \in H_q$

$$V_{n-r-1,2}(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-r-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right) c_k(f) z^k$$

и учитывая (7), запишем

$$V_{n-r-1,2}(\mathcal{F}(f^{(r)}), z) = \sum_{k=0}^{n-r-1} \beta_{k+r,r} \alpha_{k+r,r} c_{k+r}(f) \left(1 - \left(\frac{k}{2(n-r)-k}\right)^2\right) z^k. \quad (8)$$

Обозначим производную s -го ($s \in \mathbb{N}$) порядка функции φ по аргументу t комплексного числа $z = \rho \exp(it)$ символом $\varphi_a^{(s)}$. При этом

$$\varphi_a^{(1)}(z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial t} = \frac{d\varphi(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \varphi^{(1)}(z) zi,$$

а $\varphi_a^{(s)}(z) = \{\varphi_a^{(s-1)}(z)\}_a^{(1)}$, $s \geq 2$. Полагаем

$$H_{q,a}^s \stackrel{\text{df}}{=} \{\varphi \in A(U) : \varphi_a^{(s)} \in H_q\}.$$

Если $\varphi \in H_{q,a}^2$, то, как следует, например, из [4; с. 32] для произвольного $z \in U$ справедливо равенство

$$\varphi(z) - V_{n-r-1,2}(\varphi, z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_a^{(2)}(ze^{-it}) e^{i(n-r)t} G_{2,n-r}(t) dt,$$

где

$$G_{2,n-r}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2(n-r)^2} + \sum_{k=n-r+1}^{\infty} \frac{\cos(k-n+r)t}{k^2}$$

есть неотрицательная интегрируемая функция [2; с. 294]. При этом в силу обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\|\varphi - V_{n-r-1,2}(\varphi)\|_q \leq \frac{1}{(n-r)^2} \|\varphi_a^{(2)}\|_q. \quad (9)$$

Построим для функции $f \in W^r H_q \Phi$ линейный полиномиальный оператор

$$\Omega_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=r}^{n-1} \beta_{k,r} \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} \rho^{2(n-k)} \left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-k-r}\right)^2\right) c_k(f) z^k.$$

Учитывая соотношения (5) и (8), можно убедиться в справедливости формулы

$$\Omega_{n-1,r,\rho}(f, \rho z) = \frac{\rho^n z^r}{\pi} \int_0^{2\pi} V_{n-r-1,2}(\mathcal{F}(f^{(r)}), ze^{-it}) e^{i(n-r)t} \mathcal{K}_{r,n,\rho}(t) dt. \quad (10)$$

Полагая

$$\Lambda_{n-1,r,\rho}(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{L}_{n-1,r,\rho}(f, z) + \Omega_{n-1,r,\rho}(f, z)$$

и используя (6) и (10), получим для любого $z \in U$ и $0 < \rho \leq 1$ следующее равенство:

$$\begin{aligned} f(\rho z) - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f, \rho z) \\ = \frac{\rho^n z^r}{\pi} \int_0^{2\pi} (f^{(r)}(ze^{-it}) - V_{n-r-1,2}(\mathcal{F}(f^{(r)}), ze^{-it})) e^{i(n-r)t} \mathcal{K}_{r,n,\rho}(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \{ \|f^{(r)} - \mathcal{F}(f^{(r)})\|_q + \|\mathcal{F}(f^{(r)}) - V_{n-r-1,2}(\mathcal{F}(f^{(r)}))\|_q \}. \quad (11)$$

Применяя еще раз вышеназванное неравенство, оценим первое слагаемое в фигурных скобках соотношения (11):

$$\begin{aligned} \|f^{(r)} - \mathcal{F}(f^{(r)})\|_q \\ = \frac{n-r}{\pi-2} \left\| \int_0^{\pi/(2(n-r))} (f^{(r)}(ze^{ix}) - 2f^{(r)}(z) + f^{(r)}(ze^{-ix}))(1 - \sin(n-r)x) dx \right\|_q \\ \leq \frac{n-r}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-r))} \omega_2(f^{(r)}, 2x)_q (1 - \sin(n-r)x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку норма в H_q реализуется на угловых граничных значениях функции, полагая $z = e^{it}$, обозначим $F(t \pm x) \stackrel{\text{df}}{=} f^{(r)}(ze^{\pm ix})$. Приступая к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (11), аналогично [1; с. 289] и [5; с. 343] считаем, что $f^{(r)}$, а значит, и F , есть алгебраический полином P_m некоторой степени m , поскольку совокупность всех полиномов всюду плотна в пространстве H_q . При этом можно одновременно осуществить приближение в H_q и функции и ее производной по аргументу. Исходя из данного соглашения полагаем, что $F^{(s)} \in H_q$, где $s = 1, 2$.

Воспользовавшись (9) и обобщенным неравенством Минковского, получим

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{F}(f^{(r)}) - V_{n-r-1,2}(\mathcal{F}(f^{(r)})) \|_q \\ & \leq \frac{1}{(n-r)^2} \| (\mathcal{F}(f^{(r)}))_a^{(2)} \|_q \\ & = \frac{1}{(n-r)(\pi-2)} \left\| \int_0^{\pi/(2(n-r))} (F^{(2)}(x+t) + F^{(2)}(x-t))(1 - \sin(n-r)x) dx \right\|_q; \end{aligned} \quad (13)$$

произведя в правой части данного соотношения дважды интегрирование по частям, продолжим оценку (13):

$$\begin{aligned} & = \frac{n-r}{\pi-2} \left\| \int_0^{\pi/(2(n-r))} (F(x+t) - 2F(t) + F(t-x)) \sin(n-r)x dx \right\|_q \\ & \leq \frac{n-r}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2(n-r))} \omega_2(f^{(r)}, 2x)_q \sin(n-r)x dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (11)–(14) для произвольной функции $f \in W^r H_q \Phi$ имеем

$$\|f - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f)\|_{q,\rho} \leq \frac{\rho^n(n-r)}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int_0^{\pi/(2(n-r))} \omega_2(f^{(r)}, 2x)_q dx \leq \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

Покажем, что в классе $W^r H_q \Phi$ в случае, когда мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (1), существует функция, для которой неравенство (4) обращается в равенство. Рассмотрим для этого функцию

$$f_0(z) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) z^n$$

и покажем, что f_0 принадлежит классу $W^r H_q \Phi$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного z степени, не превосходящей n . Очевидно, что $f_0 \in \mathcal{P}_n$. Нам понадобится неравенство [6]

$$\|p_n^{(r)}\|_q \leq \alpha_{n,r} \|p_n\|_q, \quad (15)$$

которое имеет место для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ и натурального числа $n > r$, а также неравенство [1]

$$\omega_2(p_n, 2x)_q \leq \Delta_n(x) \|p_n\|_q, \quad (16)$$

где

$$\Delta_n(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 2(1 - \cos nx), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 4, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей рассуждений из [1; с. 292], рассмотрим два случая: $2k \geq n-r$ и $2k \leq n-r$. Пусть, например, $2k \geq n-r$. Тогда в силу (15), (16) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f_0^{(r)}, 2x)_q dx \leq \|f_0^{(r)}\|_q \cdot \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \Delta_{n-r}(x) dx \\ & = \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{2k}{\pi(n-r)} \sin \frac{\pi(n-r)}{2k}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (17) и первое неравенство из ограничения (1), где

$$x = \frac{\pi}{2(n-r)}, \quad \lambda = \frac{n-r}{k}, \quad \lambda x = \frac{\pi}{2k}, \quad (18)$$

имеем

$$\frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f_0^{(r)}, 2x)_q dx \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2k}\right). \quad (19)$$

Пусть теперь $2k \leq n-r$. Используя снова неравенства (15), (16), запишем

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f_0^{(r)}, 2x)_q dx \\ & \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{k}{\pi-2} \left(\int_0^{\pi/(n-r)} \Delta_{n-r}(x) dx + \int_{\pi/(n-r)}^{\pi/(2k)} \Delta_{n-r}(x) dx \right) \\ & = \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot \frac{2\pi}{\pi-2} \left(1 - \frac{k}{n-r} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В силу (18) и второго неравенства из ограничения (1) из (20) для рассматриваемого значения k получаем требуемое соотношение (19). Следовательно, $f_0 \in W^r H_q \Phi$. Поскольку на основании (3) $\Lambda_{n-1,r,\rho}(f_0) \equiv 0$,

$$\|f_0 - \Lambda_{n-1,r,\rho}(f_0)\|_{q,\rho} = \|f_0\|_{q,\rho} = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \quad (21)$$

Теорема доказана.

3. Пусть L_n – подпространство размерности n , принадлежащее $H_{q,\rho}$, и Q – линейный непрерывный оператор из $H_{q,\rho}$ в L_n . Полагаем

$$\mathcal{E}(W^r H_q \Phi, Q, L_n)_{q,\rho} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in W^r H_q \Phi} \|f - Q(f)\|_{q,\rho}.$$

Используя определение линейного n -поперечника (см., например, [7], [8]), запишем указанную экстремальную характеристику для класса $W^r H_q \Phi$:

$$\delta_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) = \inf_{L_n \subset H_{q,\rho}} \inf_{Q: H_{q,\rho} \rightarrow L_n} \mathcal{E}(W^r H_q \Phi, Q, L_n)_{q,\rho}.$$

Если существует линейный непрерывный оператор $\tilde{Q}: H_{q,\rho} \rightarrow \tilde{L}_n$, $\dim \tilde{L}_n = n$, для которого

$$\delta_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) = \mathcal{E}(W^r H_q \Phi, \tilde{Q}, \tilde{L}_n)_{q,\rho},$$

то он является наилучшим линейным методом приближения класса $W^r H_q \Phi$ в пространстве $H_{q,\rho}$. Из (4) и (21) следует, что при выполнении ограничения (1) на мажоранту Φ справедливо соотношение

$$\delta_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) \leq \mathcal{E}(W^r H_q \Phi; \Lambda_{n-1,r,\rho}; \mathcal{P}_n) = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \quad (22)$$

Используя рассуждения [4], можно показать, что при выполнении (1) для $n > r$, $n, r \in \mathbb{N}$, и $1 \leq q \leq \infty$ имеют место равенства

$$b_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) = d_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \quad 0 < \rho \leq 1, \quad (23)$$

где b_n и d_n – соответственно бернштейновский и колмогоровский n -поперечники. В силу неравенств между различными n -поперечниками (см., например, [7], [8]) получаем

$$d_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) \leq \delta_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}), \quad (24)$$

$$b_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) \leq d^n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) \leq \delta_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}), \quad (25)$$

где d^n – гельфандовский n -поперечник.

Понимая под Π_n любой из упомянутых здесь n -поперечников и используя (22)–(25), запишем

$$\Pi_n(W^r H_q \Phi; H_{q,\rho}) = \mathcal{E}(W^r H_q \Phi; \Lambda_{n-1,r,\rho}; \mathcal{P}_n) = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

Следовательно, полиномиальный оператор (3) является наилучшим линейным методом приближения класса $W^r H_q \Phi$ в пространстве $H_{q,\rho}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. В. Тайков, “Поперечники некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **22:2** (1977), 285–295.
- [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. Т. 1, Мир, М., 1965.
- [3] Л. В. Тайков, “О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r ”, *УМН*, **18:4** (1963), 183–189.
- [4] С. Б. Вакарчук, “Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций”, *Матем. заметки*, **57:1** (1995), 30–39.
- [5] Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40:3** (1986), 341–351.
- [6] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1:2** (1967), 155–162.
- [7] В. М. Тихомиров, “Теория приближений”, *Анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **14**, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [8] A. Pinkus, *n -Widths in Approximation Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

С. Б. Вакарчук

Академия таможенной службы Украины

E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступило

18.12.2001

Исправленный вариант

08.10.2008

В. И. Забутная

Днепропетровский национальный университет

E-mail: zabutna@mail.ru