Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Поверхностные базисные множества с дико вложенными несущими поверхностями, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 356–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:02:09

Поверхностные базисные множества с дико вложенными несущими поверхностями

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Работа посвящена обсуждению ситуации, когда у “хорошего” диффеоморфизма f трехмерного многообразия имеется дико вложенная инвариантная поверхность M , ограничение на которую диффеоморфизма f , т.е. $g = f|_M: M \rightarrow M$, является “хорошим”.

Библиография: 31 название.

Введение. Известно, что неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f , удовлетворяющего аксиоме А Смейла (А-диффеоморфизма) представляет собой объединение конечного числа попарно непересекающихся инвариантных, замкнутых и транзитивных множеств, которые называются *базисными множествами* (основные определения см. в [1], [2; гл. 1] и [3]). Топологическая структура нетривиальных базисных множеств (т.е., множеств, отличных от периодических орбит) на замкнутых поверхностях достаточно хорошо изучена. Именно, базисное множество топологической размерности 2 на замкнутой поверхности совпадает с самой поверхностью, которая является двумерным тором, а диффеоморфизм f является диффеоморфизмом Аносова. Базисное множество размерности 1 является либо растягивающимся аттрактором, либо сжимающимся репеллером, которое локально гомеоморфно прямому произведению канторова множества на отрезок [4], [5]. Вложение таких базисных множеств в поверхность и их динамика хорошо изучены в работах Гринеса и Плыкина (см. библиографию в обзорах [2; гл. 3], [6]). Нульмерное базисное множество локально гомеоморфно прямому произведению двух канторовых множеств [3]. Вложение и динамика таких множеств изучалась в работах [7]–[12]. Что касается структуры и вложения нетривиальных базисных множеств в многообразия большей размерности, то динамика таких множеств изучена более или менее в коразмерностях 0 и 1, и имеется немного содержательных результатов для других коразмерностей (см. обзор [13]).

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизмы трехмерных замкнутых ориентируемых многообразий M^3 с нетривиальными поверхностными базисными множествами коразмерности 2 и 3. Напомним, что базисное множество называется

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00547а).

поверхностным, если оно принадлежит инвариантной относительно диффеоморфизма замкнутой поверхности, вложенной (необязательно, цилиндрически) в многообразие. Эта поверхность называется *несущей* для поверхностного базисного множества. Отметим, что несущая поверхность, вообще говоря, может быть несвязной.

Изучение нетривиальных поверхностных базисных множеств диффеоморфизмов трехмерных многообразий было инициировано Гринесом. Одним из основных аспектов этого исследования является вопрос о возможных вложениях несущих поверхностей. После решения данного вопроса можно было бы надеяться получить законченные классификационные результаты, пользуясь достаточно продвинутой классификацией базисных множеств на поверхностях. Ясно, что топологическая размерность поверхностного базисного множества не превосходит 2. Базисные поверхностные множества размерности 2 на произвольном 3-многообразии рассматривались в [14], где было доказано, что несущая поверхность гомеоморфна тору, цилиндрически вложенному [15] в 3-многообразие. При этом ограничение диффеоморфизма на несущую поверхность сопряжено автоморфизму Аносова. Отметим однако, что несущая поверхность может быть не гладкой и иметь фрактальную размерность [16].

В данной статье мы показываем, что несущая поверхность поверхностных нетривиальных базисных множеств, топологическая размерность которых не превосходит 1, уже может быть дико вложена, даже если диффеоморфизм удовлетворяет некоторым ограничениям (Ω -устойчивость или структурная устойчивость). Отметим, что формально основные результаты относятся к диффеоморфизмам, которые необязательно являются А-диффеоморфизмами. Однако, как следствие, для А-диффеоморфизмов мы получаем требуемое существование базисных множеств с дико вложенной несущей поверхностью. Перейдем к формулировкам основных результатов. Везде далее 3-мерные многообразия считаются ориентируемыми. Сначала, как следствие основной конструкции, мы получаем следующую теорему, которая имеет самостоятельный интерес и является обобщением основного результата работы [17].

ТЕОРЕМА 1. Пусть f_0 – градиентный диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутой ориентируемой поверхности M_r^2 рода $r \geq 0$. Тогда для любого замкнутого трехмерного многообразия M^3 существует градиентноподобный диффеоморфизм Морса–Смейла $f: M^3 \rightarrow M^3$ со следующими свойствами:

- 1) существует вложенная в M^3 инвариантная поверхность M , гомеоморфная M_r^2 , такая, что ограничение $f|_M$ сопряжено f_0 ;
- 2) M не является цилиндрически вложенной поверхностью (более точно, на M имеется локально неплоская точка, совпадающая со стоком ограничения $f|_M$);
- 3) существует такая окрестность $U(M)$ поверхности M , гомеоморфная $M_r^2 \times (-1, +1)$, что $f(\text{clos } U(M)) \subset U(M)$.

В [17] диффеоморфизм f построен для $M^3 = S^3$, $M_0^2 = S^2$ и диффеоморфизма f_0 вида “север-юг” 2-сферы S^2 (иногда такой диффеоморфизм называют “источник-сток”). Одним из основных результатов статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть g – диффеотопный тождественному диффеоморфизм ориентируемой замкнутой поверхности M_r^2 рода $r \geq 0$. Предположим, что g имеет

хотя бы один изолированный сток. Тогда для любого замкнутого трехмерного многообразия M^3 существует диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$ со следующими свойствами:

- 1) существует вложенная в M^3 поверхность M , гомеоморфная M_r^2 и инвариантная относительно f ;
- 2) ограничение $f|_M$ сопряжено g , при этом неблуждающее множество $NW(f)$ есть объединение неблуждающего множества ограничения $f|_M$ и конечного числа изолированных гиперболических периодических орбит;
- 3) M не является цилиндрически вложенной поверхностью (более точно, на M имеется локально неплоская точка, совпадающая со стоком ограничения $f|_M$);
- 4) существует такая окрестность $U(M)$ поверхности M , гомеоморфная $M_r^2 \times (-1, +1)$, что $f(\text{clos } U(M)) \subset U(M)$.

Более того, если g – Ω -устойчивый, то f – также Ω -устойчивый.

Как следствие, получаем, что существует достаточно большой класс одномерных и нетривиальных нульмерных поверхностных базисных множеств с дико вложенной несущей поверхностью. Этот класс включает, например, аттрактор Плыкина и подкову Смейла (и вообще, любое базисное множество, которое вкладывается в диск).

Для $r = 0$ следующая теорема уточняет теорему 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть g – структурно устойчивый и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм двумерной сферы S^2 . Предположим, что g имеет хотя бы один изолированный сток. Тогда существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f: S^3 \rightarrow S^3$ со следующими свойствами:

- 1) существует вложенная в S^3 поверхность M , гомеоморфная S^2 и инвариантная относительно f ;
- 2) ограничение $f|_M$ сопряжено g , при этом неблуждающее множество $NW(f)$ есть объединение неблуждающего множества ограничения $f|_M$ и конечного числа изолированных гиперболических периодических орбит;
- 3) M не является цилиндрически вложенной поверхностью (на M имеется локально неплоская точка, являющаяся стоком ограничения $f|_M$);
- 4) существует такая окрестность $U(M)$ поверхности M , гомеоморфная $M_r^2 \times (-1, +1)$, что $f(\text{clos } U(M)) \subset U(M)$.

После теоремы 2 естественно рассмотреть вопрос о вложении поверхностей, на которых заданы диффеоморфизмы, не гомотопные тождественному. В следующей теореме утверждается, что такие диффеоморфизмы можно “вложить” в специальные 3-многообразия.

ТЕОРЕМА 4. Пусть g – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм (не обязательно диффеотопный тождественному) ориентируемой замкнутой поверхности M_r^2 рода $r \geq 0$. Предположим, что g имеет хотя бы один изолированный сток. Тогда существуют 3-многообразие M^3 , гомеоморфное прямому произведению $M_r^2 \times S^1$, и диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$ со следующими свойствами:

- 1) существует вложенная в M^3 поверхность M , гомеоморфная M_r^2 и инвариантная относительно f , такая, что ограничение $f|_M$ сопряжено g ;

- 2) M не является цилиндрически вложенной поверхностью (более точно, на M имеется локально неплоская точка, совпадающая со стоком ограничения $f|_M$);
- 3) существует такая окрестность $U(M)$ поверхности M , гомеоморфная $M_r^2 \times (-1, +1)$, что $f(\text{clos } U(M)) \subset U(M)$.

Более того, если g – Ω -устойчивый, то f – также Ω -устойчивый.

Из этой теоремы вытекает существование поверхностных базисных множеств (типа одномерных растягивающихся аттракторов, ДА-аттракторов, просторно расположенных аттракторов Плыкина, и сжимающихся репеллеров), а также просторно расположенных нетривиальных нульмерных базисных множеств с дико вложенной несущей поверхностью.

1. Предварительные сведения.

1.1. Основные понятия теории ДС. Пространство диффеоморфизмов замкнутого многообразия M , наделенное равномерной C^1 топологией, обозначим через $\text{Diff}(M)$. Напомним, что точка $x \in M$ диффеоморфизма $f \in \text{Diff}(M)$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geq N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $NW(f)$. Множество Λ , инвариантное относительно f , называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ df -инвариантных подрасслоений E_Λ^s, E_Λ^u ($\dim E_x^s + \dim E_x^u = \dim M, x \in \Lambda$), и существуют константы $C_s > 0, C_u > 0, 0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^n(v)\| \leq C_s \lambda^n \|v\|, \quad v \in E_\Lambda^s, \quad n > 0, \quad \|df^{-n}(v)\| \leq C_u \lambda^n \|v\|, \quad v \in E_\Lambda^u, \quad n > 0.$$

Гиперболическая структура порождает существование так называемых устойчивых $W^s(x), x \in \Lambda$, и неустойчивых $W^u(x)$ многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях [3]. Диффеоморфизм f называется *А-диффеоморфизмом*, если $NW(f)$ гиперболическое и в $NW(f)$ плотны периодические точки. Согласно спектральной теореме Смейла $NW(f)$ есть конечное объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом, многообразие M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{i=1}^k W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^k W^u(\Omega_i), \quad \text{где} \quad W^{s(u)}(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^{s(u)}(x).$$

Два диффеоморфизма $f, g \in \text{Diff}(M)$ называются (*топологически*) *сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ такой, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset \text{Diff}(M)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f . Известно [18], [19], что f структурно устойчив тогда и только тогда, когда f является А-диффеоморфизмом и для любых точек $x, y \in NW(f)$ многообразия $W^s(x), W^u(y)$ имеют только трансверсальные пересечения.

Два диффеоморфизма $f, g \in \text{Diff}(M)$ называются Ω -сопряженными, если существует гомеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ такой, что $\varphi(NW(f)) = NW(g)$ и $\varphi \circ f|_{NW(f)} = g \circ \varphi|_{NW(f)}$. Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}(M)$ называется Ω -устойчивым, если существует его окрестность $U(f) \subset \text{Diff}(M)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ Ω -сопряжен f . Известно [20], [21], что f Ω -устойчив тогда и только тогда, когда f является А-диффеоморфизмом и нет циклов в графе G Смейла, который определяется следующим образом. Каждому базисному множеству Ω_i поставим в соответствие вершину $v(\Omega_i)$ графа G . Две вершины $v(\Omega_i), v(\Omega_j)$ графа G соединяются ребром, идущем от $v(\Omega_i)$ к $v(\Omega_j)$, тогда и только тогда, когда $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ для некоторых точек $p \in \Omega_i, q \in \Omega_j$.

Структурно устойчивый диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек. Аналогично определяется векторное поле и поток Морса–Смейла. Из работы [22] вытекает, что на любом замкнутом многообразии M существует функция Морса такая, что ее градиент является векторным полем Морса–Смейла без периодических орбит. Следовательно, сдвиг на любое время t вдоль траекторий такого поля является диффеоморфизмом Морса–Смейла. Такой диффеоморфизм называется *градиентным*. Обобщением этого понятия является следующее понятие. Следуя [3], будем называть диффеоморфизм f Морса–Смейла *градиентноподобным*, если из $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$, где $p, q \in NW(f)$, следует $\dim W^s(p) > \dim W^s(q)$.

1.2. Векторное поле Черри–Вильсона. Пусть евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ наделено системой стандартных декартовых координат (x_1, x_2, x_3) . На замкнутом 3-шаре $\mathbb{B}^3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ векторное поле $\vec{v}_B = (x_1, x_2, x_3)$ имеет гиперболический источник в начале координат $O(0, 0, 0)$. На замкнутом цилиндре $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, -1 \leq x_3 \leq 1\}$ векторное поле $(x_1, x_2, -x_3)$ имеет гиперболическое седло O , у которого неустойчивая сепаратриса двумерная, а устойчивая – одномерная. Умножив координаты данного поля на положительную гладкую функцию, можно получить гладкое векторное поле $\vec{v}_C$, перпендикулярное диску $C \cap \{x_3 = \pm 1\}$.

Приклеим к $\mathbb{B}^3$ 1-ручки $C_1, \dots, C_r$ с векторными полями $\vec{v}_{C_1}, \dots, \vec{v}_{C_r}$ соответственно, которые являются копиями поля $\vec{v}_C$ на C . Напомним, что приклеивание 1-ручки $D^2 \times [-1, +1]$ состоит в том, что диски $D^2 \times \{\pm 1\} = C \cap \{x_3 = \pm 1\}$ (так называемые подошвы) отождествляются с некоторыми двумерными дисками на границе шара $\mathbb{B}^3$. Полученное 3-многообразие (шар с r ручками) обозначим через M_r^3 . Так как поле $\vec{v}_C$ перпендикулярно подошвам $C \cap \{x_3 = \pm 1\}$, приклеивание 1-ручек можно произвести таким образом, чтобы векторные поля $\vec{v}_B, \vec{v}_{C_1}, \dots, \vec{v}_{C_r}$ образовали на M_r^3 гладкое векторное поле, которое мы обозначим через $\vec{v}_{M_r^3}$. По построению $\vec{v}_{M_r^3}$ имеет внутри M_r^3 ровно один источник $\mathcal{A}$ и r седел с одномерными устойчивыми сепаратрисами, идущими из $\mathcal{A}$. Поле $\vec{v}_{M_r^3}$ и двумерные неустойчивые сепаратрисы седел трансверсальны границе ∂M_r^3 , и поле $\vec{v}_{M_r^3}$ направлено наружу. Отметим, что граница ∂M_r^3 есть замкнутая ориентируемая поверхность M^2 рода r , рис. 1. Умножив поле $\vec{v}_{M_r^3}$ на некоторую строго положительную гладкую функцию, можно добиться того, чтобы в окрестности границы ∂M_r^3 поле $\vec{v}_{M_r^3}$ было перпендикулярно к ∂M_r^3 и было единичным, $\|\vec{v}|_{\partial M_r^3}\| = 1$.

Пусть $\vec{v}_0$ – произвольное (пока) векторное поле на замкнутой ориентируемой поверхности M^2 , и пусть $\theta: [-1, +1] \rightarrow [0, 1]$ – гладкая функция такая, что $\theta(0) = 1$,

 Рис. 1. Векторное поле $\vec{v}_{M_r^3}$ на M_r

$\theta(\pm 1) = 0$, $\theta'(\pm 1) = 0$, $\theta(-\tau) = \theta(\tau)$. Тогда на $M^2 \times [-1, +1]$ векторное поле $(\theta(\tau)\vec{v}_0, -\tau)$ является гладким полем и имеет притягивающее интегральное многообразие $M^2 \times \{0\}$, где координата $-1 \leq \tau \leq 1$ соответствует второму множителю в произведении $M^2 \times [-1, +1]$.

Приклеим к граничной компоненте $M^2 \times \{-1\}$ многообразия $M^2 \times [-1, +1]$ одну копию многообразия M_r^3 с помощью тождественного диффеоморфизма $M^2 \times \{-1\} \rightarrow M^2$, а к граничной компоненте $M^2 \times \{+1\}$ приклеим вторую копию M_r^3 с помощью диффеоморфизма $M^2 \times \{+1\} \rightarrow M^2$, который мы уточним ниже. Поскольку $\vec{v}_{M_r^3}$ на границе многообразия M_r^3 направлено наружу, а поле $(\theta(\tau)\vec{v}_0, -\tau)$ на границе многообразия $M^2 \times [-1, +1]$ направлено внутрь, причем все поля единичные на границах и перпендикулярны соответствующим границам, то на полученном замкнутом 3-многообразии M^3 векторные поля $\vec{v}_{M_r^3}$ и $(\theta(\tau)\vec{v}_0, -\tau)$ определяют гладкое векторное поле $\vec{v}_{M^3}$. Нетрудно проверить, что $\vec{v}_{M^3}$ имеет интегральное равномерно притягивающее многообразие, которое мы обозначим через $\mathcal{M}^2$ и которое гомеоморфно M^2 . Более того, неблуждающие траектории поля $\vec{v}_{M^3}$ получаются объединением двух гиперболических источников $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, $2r$ гиперболических седел $s_1, \dots, s_r, s'_1, \dots, s'_r$ (единственные неблуждающие траектории двух копий векторного поля $\vec{v}_{M_r^3}$), и неблуждающих траекторий поля $\vec{v}_0$. Отметим, что источники $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ и седла $s_1, \dots, s_r, s'_1, \dots, s'_r$ не лежат на $\mathcal{M}^2$.

Нетрудно видеть, что M^3 представляет собой разбиение Хегора рода r . Уточним теперь склеивающий диффеоморфизм $M^2 \times \{+1\} \rightarrow M^2$. Если $r = 0$, то этот диффеоморфизм будем считать тождественным. Полученное многообразие есть склейка двух шаров вдоль их границ, т.е. 3-сфера, $M^3 = S^3$. Для $r \geq 1$ поверхность M^2 представим в виде 2-сферы, из которой сначала удалены r дисков, а затем приклеены r двумерных торов, каждый с одной дырой (тор с дырой обычно называют ручкой поверхности). Введем на каждом торе каноническим образом параллель и меридиан, тем самым определив на каждой ручке поверхности M^2 параллель и меридиан. Известно, что существует диффеоморфизм тора с дырой, который равен тождественному диффеоморфизму на границе, и переводит параллель в меридиан и наоборот. Поэтому существует диффеоморфизм $\phi: M^2 \rightarrow M^2$, переводящий на каждой ручке M^2 параллель в меридиан и наоборот. Осуществим приклеивание $M^2 \times \{+1\} \rightarrow M^2$ с помощью ϕ . Тогда снова $M^3 = S^3$. Таким образом, во всех случаях мы получаем многообразие S^3 .

В силу построения ограничение $\vec{v}_{S^3}|_{\mathcal{M}^2}$ есть векторное поле $\vec{v}_0$, и $\mathcal{M}^2$ является притягивающим инвариантным множеством для $\vec{v}_{S^3}$, т.е. существует окрестность $U(\mathcal{M}^2)$ множества $\mathcal{M}^2$, гомеоморфная $\mathcal{M}^2 \times (-1, +1)$, такая, что на границе окрестности $U(\mathcal{M}^2)$ поле $\vec{v}_{S^3}$ направлено внутрь $U(\mathcal{M}^2)$. Так как $\mathcal{A}_1$ является гиперболическим источником, у него существует окрестность $U(\mathcal{A}_1)$, гомеоморфная открытому 3-шару с гладкой границей $\partial U(\mathcal{A}_1)$, которая трансверсальна $\vec{v}_{S^3}$ и на которой $\vec{v}_{S^3}$ направлено наружу окрестности $U(\mathcal{A}_1)$. Можно считать, что $U(\mathcal{A}_1)$ не содержит других точек покоя, кроме $\mathcal{A}_1$, и не пересекается с $U(\mathcal{M}^2)$.

Предположим теперь, что $\vec{v}_0$ имеет хотя бы один гиперболический сток, скажем S_0 . Тогда $S_0 \in \mathcal{M}^2$ будет гиперболическим стоком векторного поля $\vec{v}_{M^3}$, поскольку $\mathcal{M}^2$ является равномерно притягивающим интегральным многообразием. Возьмем окрестность $U(S_0)$ стока S_0 , гомеоморфную открытому 3-шару с гладкой границей $\partial U(S_0)$, трансверсальной $\vec{v}_{S^3}$, такую, что в $U(S_0)$ нет других точек покоя, кроме S_0 . Так как $\mathcal{M}^2$ является гладко (и, следовательно, цилиндрически) вложенной поверхностью, для достаточно малой окрестности $U(S_0)$ можно считать, что пересечение $\mathcal{M}^2 \cap U(S_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_*(S_0)$ есть окрестность точки S_0 на $\mathcal{M}^2$, гомеоморфная открытому двумерному диску.

Покажем, что существует положительная полутраектория, начинающаяся на границе $\partial U(\mathcal{A}_1)$ и пересекающая $\partial U(S_0)$. Граница $\partial U(S_0)$ окрестности $U(S_0)$ есть двумерная сфера, пересекающаяся с замкнутым диском $\text{clos } U_*(S_0)$ вдоль замкнутой кривой, скажем C . Эта кривая разбивает $\partial U(S_0)$ на две полусферы, одна из которых, скажем D^+ , лежит в той же компоненте связности множества $S^3 - \mathcal{M}^2$, что и $\mathcal{A}_1$. Так как $\mathcal{M}^2$ является интегральным (инвариантным) многообразием, то нет полутраекторий, начинающихся на $\mathcal{M}^2$ и пересекающих D^+ . Следовательно, множество D^+ могут пересекать только двумерные неустойчивые сепаратрисы седел $s_1, \dots, s_r$ и положительные полутраектории, стартующие с $\partial U(\mathcal{A}_1)$. Каждая двумерная неустойчивая сепаратриса седла s_i , $i = 1, \dots, r$, может пересечь D^+ только по одной замкнутой кривой, поскольку S_0 есть гиперболический сток. Ясно, что такие кривые не могут заполнить все множество D^+ . Поэтому существует положительная полутраектория, начинающаяся на $\partial U(\mathcal{A}_1)$ и пересекающая D^+ . Таким образом, мы доказали существование компактной дуги траектории с концевыми точками на $\partial U(\mathcal{A}_1)$ и $D^+ \subset \partial U(S_0)$.

Как следствие теоремы о непрерывной зависимости полутраекторий от начальных условий получаем, что на $\partial U(\mathcal{A}_1)$ имеется замкнутый двумерный диск D^2 такой, что любая положительная полутраектория, выходящая из D^2 , пересекает $\partial U(S_0)$. В силу трансверсальности $\partial U(S_0)$ к векторному полю пересечение этих положительных полутраекторий с $\partial U(S_0)$ образует двумерный диск на $\partial U(S_0)$. Следовательно, дуги положительных полутраекторий, начинающихся на D^2 и заканчивающихся на $\partial U(S_0)$, образуют замкнутое цилиндрическое тело, гомеоморфное $D^2 \times [0, 1]$ (далее мы будем отождествлять это тело с $D^2 \times [0, 1]$, сохраняя данное обозначение), причем второй множитель соответствует отрезкам полутраекторий.

Множество $S^3 - (U(\mathcal{A}_1) \cup U(S_0))$ является замкнутым шаровым кольцом, гомеоморфным $S^2 \times [0, 1]$. Если удалить из него внутренность цилиндрического тела $D^2 \times [0, 1]$, то получим замкнутое цилиндрическое тело Q_m , которое естественным образом можно отождествить с $\mathbb{B}^2 \times [-10, +10]$. Опуская символ отождествляющего

 Рис. 2. Векторное поле $\vec{V}$ на Q_m , и цилиндр $Q = Q_t \cup Q_m \cup Q_b$

диффеоморфизма, будем считать, что множество $S^3 - (U(\mathcal{A}_1) \cup U(S_0) \cup \text{int}(D^2 \times [0, 1]))$ есть $Q_m = \mathbb{B}^2 \times [-10, +10]$. Ограничение векторного поля $\vec{v}_{S^3}$ на Q_m обладает следующими свойствами:

- 1) $\vec{v}_{S^3}$ трансверсально верхнему и нижнему основаниям $\mathbb{B}^2 \times \{-10\}$, $\mathbb{B}^2 \times \{10\}$, причем на $\mathbb{B}^2 \times \{-10\}$ поле $\vec{v}_{S^3}$ направлено наружу, а на $\mathbb{B}^2 \times \{10\}$ – внутрь тела $\mathbb{B}^2 \times [-10, +10]$;
- 2) отрезки $\{p\} \times [-10, +10]$, $p \in \partial\mathbb{B}^2$, боковой поверхности $\partial\mathbb{B}^2 \times [-10, +10]$ являются отрезками траекторий векторного поля $\vec{v}_{S^3}$.

Не уменьшая общности, можно считать, что на боковой поверхности $\partial\mathbb{B}^2 \times [-10, +10]$ поле $\vec{v}_{S^3}$ имеет вид $(0, 0, -1)$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$, наделенном координатами (x_1, x_2, x_3) , два бесконечных цилиндра

$$Q_t = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 > 10\}, \quad Q_b = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 < -10\}$$

и один конечный цилиндр

$$Q_m = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, -10 \leq x_3 \leq 10\},$$

которые образуют бесконечный цилиндр

$$Q = Q_t \cup Q_m \cup Q_b, \quad Q = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Из вышеприведенных свойств 1), 2) вытекает, что ограничение векторного поля $\vec{v}_{S^3}$ на Q_m можно продолжить до векторного поля $\vec{V} = \vec{V}(\vec{v}_0, M_r^2)$ на $\mathbb{R}^3$ со следующими свойствами:

- вне конечного цилиндра Q_m векторное поле $\vec{V}$ равно $(0, 0, -1)$;
- в конечном цилиндре Q_m поле $\vec{V}$ совпадает с $\vec{v}_{S^3}|_{Q_m}$ (при этом, в Q_m лежат все состояния равновесия поля $\vec{V}$);
- векторное поле $\vec{V}$ имеет интегральную поверхность $\mathcal{M}^2$, принадлежащую объединению $Q_m \cup Q_b$ (отметим, что пересечение $\mathcal{M}^2 \cap Q_b$ гомеоморфно открытому двумерному кольцу), рис. 2.

Рис. 3. Поток “север-юг”

С одной стороны, векторное поле $\vec{V}$ является трехмерным аналогом ячейки из блуждающих траекторий в потоке Черри [23], а с другой стороны – напоминает так называемый капкан Вильсона [24] (поэтому, видимо, естественно было бы назвать $\vec{V}$ векторным полем Черри–Вильсона).

2. Доказательство основных теорем. Напомним, что простейшим потоком Морса–Смейла является так называемый поток “север-юг” на сфере S^n , рис. 3, с двумя гиперболическими состояниями равновесия, одна из которых есть источник, а другая – сток, и других неблуждающих траекторий нет. Динамика такого потока проста: все траектории, отличные от состояний равновесия, являются блуждающими и идут от источника к стоку.

Непосредственным обобщением потока “север-юг” является полярный поток [25]. Напомним, что поток f_{ns}^t Морса–Смейла на n -многообразии M^n называется *полярным*, если его неблуждающее множество состоит из одного источника, одного стока и конечного (возможно, нулевого) числа седел. Так как периодических траекторий полярный поток не имеет, сдвиг на любое время t вдоль траекторий такого поля есть сохраняющий ориентацию и гомотопный тождественному диффеоморфизм Морса–Смейла. Соответствующее векторное поле называется *полярным*. Следующее утверждение можно извлечь из работ [26]–[28].

ЛЕММА 1. *На любом замкнутом многообразии M^n существует функция Морса такая, что ее градиент является полярным векторным полем Морса–Смейла.*

Перед доказательством всех теорем мы приведем основную конструкцию. А именно, мы сначала на произвольном замкнутом 3-многообразии построим диффеоморфизм с дико вложенной замкнутой инвариантной поверхностью. В дальнейшем этот диффеоморфизм конкретизируется в зависимости от свойств его ограничения на инвариантную поверхность.

Согласно лемме 1 на любом замкнутом 3-многообразии M^3 существует полярный поток f_{ns}^t . В силу конечности числа сепаратрис имеется траектория l потока f_{ns}^t , которая идет из источника к стоку. Возьмем произвольную (регулярную) точку $P \in l$, и проведем через P диск без контакта D такой, что ни одна траектория не пересекает его более, чем в одной точке. Обозначим через $\mathcal{T}$ объединение траекторий потока f_{ns}^t , проходящих через D . Нетрудно видеть, что $\mathcal{T}$ диффеоморфно цилиндру $D \times \mathbb{R}$.

 Рис. 4. Трубочатая окрестность $T(l_{AF})$ кривой Артина–Фокса

Рассмотрим цилиндр $Q' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, наделенном координатами (x, y, z) . Так как D диффеоморфно $\mathbb{B}^2$, существует гладкое вложение $\Psi: \mathcal{T} \rightarrow Q' \subset \mathbb{R}^3$ такое, что Ψ осуществляет гладкую сопряженность потока $f_{ns}^t|_{\mathcal{T}}$ с потоком на $Q' = \mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$, задаваемым системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = -1$. Следовательно, сдвиг вдоль траекторий потока $f_{ns}^t|_{\mathcal{T}}$ на любое фиксированное время t является диффеоморфизмом, который сопряжен посредством Ψ жесткому сдвигу вида $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + t)$ на цилиндре $\Psi(\mathcal{T}) = Q'$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим бесконечную кривую l_{AF} Артина–Фокса [29] с трубчатой окрестностью $T(l_{AF})$, диффеоморфной $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$, см. рис. 4, где ось Oz соответствует горизонтальному направлению. Известно (см., например, [15; с. 116]), что l_{AF} и $T(l_{AF})$ можно расположить в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы они были инвариантны относительно сдвига $R: (x, y, z) \mapsto (x, y, z + 1)$ и принадлежали цилиндру $\Psi(\mathcal{T}) = Q'$.

Основная идея конструкции состоит в том, что $T(l_{AF})$ диффеоморфна Q , что позволяет считать, что на $T(l_{AF})$ задано векторное поле $\vec{V}$. Поэтому сдвиг $R|_{T(l_{AF})}$ трубчатой окрестности $T(l_{AF})$ можно заменить сдвигом на некоторое время t_0 вдоль траекторий поля $\vec{V}$ на Q . Тем самым, сдвиг $R|_{Q' - T(l_{AF})}: Q' - T(l_{AF}) \rightarrow Q' - T(l_{AF})$ продолжается на $T(l_{AF})$ диффеоморфизмом, который по существу есть сдвиг вдоль траекторий векторного поля $\vec{V}$ на Q . Полученный таким образом диффеоморфизм цилиндра $\Psi(\mathcal{T}) = Q'$ “возвращается” с помощью Ψ^{-1} на M^3 . В результате мы получаем диффеоморфизм на M^3 с измененной динамикой внутри множества $\mathcal{T}$. Отметим, что несмотря на то, что части построенного диффеоморфизма есть сдвиги вдоль траекторий, полученный диффеоморфизм не является уже сдвигом никакого потока. Далее мы начинаем доказывать, что сдвиг R на границе $T(l_{AF})$ и некоторый сдвиг вдоль траекторий поля $\vec{V}$ на границе цилиндра Q согласуются.

Поскольку трубчатая окрестность $T(l_{AF})$ диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$, которое, в свою очередь, диффеоморфно бесконечному цилиндру Q , существует естественный диффеоморфизм $\Phi: Q \rightarrow T(l_{AF})$, переводящий $\vec{V}$ в некоторое векторное поле $\vec{v}_T$ на $T(l_{AF})$. Подберем вспомогательные соответствия $Q \leftrightarrow \mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$, $T(l_{AF}) \leftrightarrow \mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$ так, чтобы сдвиг R на границе трубчатой окрестности $T(l_{AF})$ соответствовал жесткому сдвигу вдоль траекторий поля $\vec{v}_T$ на границе $\partial T(l_{AF})$ на некоторое фиксированное время, скажем t_0 (эта величина зависит от вложения $T(l_{AF})$ в Q'). Это можно сделать, поскольку $\vec{V}$ и, следовательно, $\vec{v}_T$ не имеют на границах соответствующих областей состояний равновесия и периодических траекторий. Не уменьшая общности, можно считать, что сдвиг вдоль траекторий поля $\vec{v}_T$ на границе $\partial T(l_{AF})$ на время t_0 соответствует ограничению сдвига на единицу времени вдоль траекторий поля $\vec{V}$ на границе цилиндра Q .

Обозначим через $\Theta: T(l_{AF}) \rightarrow T(l_{AF})$ диффеоморфизм, который является сдвигом на время t_0 вдоль траекторий поля $\vec{v}_T$ на $T(l_{AF})$. Так как трубчатая окрестность

$T(l_{AF})$ инвариантна относительно сдвига R , а R на границе $\partial T(l_{AF})$ совпадает со сдвигом вдоль траекторий поля $\vec{v}_T$ на $\partial T(l_{AF})$ на время t_0 , то отображение

$$R_1(x, y, z) = \begin{cases} \Theta(x, y, z) & \text{при } (x, y, z) \in T(l_{AF}), \\ R(x, y, z) & \text{при } (x, y, z) \in Q' - T(l_{AF}), \end{cases}$$

является диффеоморфизмом $Q' \rightarrow Q'$ (т.е. можно сказать, что диффеоморфизм $R: Q' - T(l_{AF}) \rightarrow Q' - T(l_{AF})$ продолжается до диффеоморфизма цилиндра $\Psi(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{R})$ с помощью Θ).

Обозначим через f_{ns}^1 диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока f_{ns}^t . В силу построения отображение $M^3 \rightarrow M^3$, которое на $M^3 - \mathcal{T}$ совпадает с f_{ns}^1 , а на $\mathcal{T}$ — с $\Psi^{-1} \circ R_1 \circ \Psi$, является корректно определенным диффеоморфизмом $f_0: M^3 \rightarrow M^3$, который мы иногда будем обозначать через $f_0(\vec{V}, \vec{v}_0, M_r^2)$. Этот диффеоморфизм является обобщением диффеоморфизмов, построенных в работах [17] и [30].

Поскольку динамика f_0 на $\mathcal{T}$ совпадает с динамикой, определяемой векторным полем $\vec{V}$ на Q , нетрудно видеть, что f_0 имеет инвариантную притягивающую поверхность $\mathcal{M}^2 - S_0$ (мы сохраняем соответствующие обозначения, что не должно привести к путанице). Если пополнить эту поверхность стоком s_* диффеоморфизма f_{ns}^1 , то получим инвариантную притягивающую поверхность $(\mathcal{M}^2 - S_0) \cup s_*$, гомеоморфную $\mathcal{M}^2$. Будем эту инвариантную поверхность снова обозначать через $\mathcal{M}^2$. Из построения вытекает, что $\mathcal{M}^2$ не является цилиндрически вложенной в точке s_* .

Везде далее в доказательствах основных теорем мы будем пользоваться введенными обозначениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Теперь конкретизируем векторное поле $\vec{v}_0$, считая его градиентным векторным полем Морса–Смейла и считая, что оно имеет ровно один источник (обозначаемый через N_0) и ровно один сток (обозначаемый через S_0), и не имеет периодических траекторий. Известно, что такие векторные поля Морса–Смейла существуют на любой замкнутой ориентируемой поверхности (см., например, [22], [31]). Более того, такие градиентные векторные поля без сепаратрисных связей всюду плотны в пространстве градиентных векторных полей в C^1 топологии, и они структурно устойчивы. Пользуясь этим свойством, можем считать, что $\vec{v}_0$ удовлетворяет следующему дополнительному условию. Напомним, что по построению двумерные неустойчивые сепаратрисы $W^u(s_i)$, $W^u(s'_i)$ седел s_i , s'_i соответственно пересекают граничные компоненты $M^2 \times \{-1\}$ и $M^2 \times \{+1\}$ многообразия $M^2 \times [-1, +1]$ по замкнутым кривым. Проекции этих кривых на $M^2 \times \{0\}$ обозначим через c_i и c'_i соответственно. Потребуем, чтобы одномерные устойчивые сепаратрисы седел векторного поля $\vec{v}_0$ были трансверсальны кривым c_i , c'_i для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда $\vec{v}_{M^3}$ будет градиентноподобным векторным полем Морса–Смейла. Поскольку поток f_{ns}^t и векторное поле $\vec{V}$ не имеют периодических траекторий, f_0 является диффеоморфизмом Морса–Смейла. Нетрудно также видеть, что $\mathcal{M}^2$ есть топологическое замыкание двумерной неустойчивой сепаратрисы седла N_0 диффеоморфизма f_0 .

Отметим для дальнейшего, что ограничение f_0 на $\mathcal{M}^2 - s_*$ сопряжено диффеоморфизму, который является сдвигом вдоль траекторий поля $\vec{V}$ на $\mathcal{M}^2 - S_0$. Поэтому $f_0|_{\mathcal{M}^2}$ диффеотопен тождественному.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно теореме Гробмана–Хартмана, гиперболические стоки потоков локально эквивалентны. Более того, из версии этой теоремы для диффеоморфизмов вытекает, что сдвиги на фиксированное время вдоль траекторий локально сопряжены. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что диффеоморфизм g в некоторой окрестности стока S_g совпадает со сдвигом на некоторое время t_0 поля $\vec{v}_0$ в некоторой окрестности точки S_0 .

Отметим, что для поля $\vec{v}_{S^3}$ точка N_0 будет седлом с одномерными устойчивыми сепаратрисами и двумерной неустойчивой сепаратрисой, а S_0 – стоком. Покажем, что ограничение $f_0|_{\mathcal{M}^2}$ диффеоморфизма f_0 на $\mathcal{M}^2$ можно заменить диффеоморфизмом, сопряженным g . Напомним, что по условию теоремы диффеоморфизм g поверхности M^2 имеет источник N_g и сток S_g . В некоторых окрестностях $U(N_g)$, $U(S_g)$ точек N_g , S_g соответственно g является сдвигом на единицу времени потока Морса–Смейла $\vec{v}_0$, у которого N_g и S_g суть источник и сток.

Ограничение $f_0|_{\mathcal{M}^2}$ в некоторой окрестности $U(N_0)$ источника N_0 и некоторой окрестности $U(s_*)$ стока s_* сопряжено с g в $U(N_g)$ и $U(S_g)$ соответственно. Не уменьшая общности, можно считать все окрестности дисками с гладкой границей. Более того, можно считать, что поверхности M^2 , $\mathcal{M}^2$ гомеоморфны, а вне объединений $U(N_0) \cup U(s_*)$, $U(N_g) \cup U(S_g)$ диффеоморфны друг другу. Поэтому на $\mathcal{M}^2$ задан гомеоморфизм g' , сопряженный g и совпадающий с $f_0|_{\mathcal{M}^2}$ на $U(N_0) \cup U(s_*)$. Поскольку g диффеотопен тождественному, то g' гомотопен тождественному, причем существует гомотопия, являющаяся диффеотопией вне $U(N_0) \cup U(s_*)$. Тогда $g' \circ f_0^{-1}|_{\mathcal{M}^2}: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ есть тождественный гомеоморфизм на $U(N_0) \cup U(s_*)$, гомотопный тождественному на $\mathcal{M}^2$. Итак, существует гомотопия $h_t: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}^2$ такая, что $h_0 = \text{id}$, $h_1 = g' \circ f_0^{-1}|_{\mathcal{M}^2}$ и h_t есть тождественный гомеоморфизм на объединении $U(N_0) \cup U(s_*)$. Более того, на $\mathcal{M}^2 - (U(N_0) \cup U(s_*))$ можно считать h_t диффеотопией.

Возьмем окрестность $U'(s_*)$ точки s_* на поверхности $\mathcal{M}^2$ такую, что $U'(s_*) \subset U(s_*)$ и $U'(s_*) \subset f_0|_{\mathcal{M}^2}(U(s_*))$. Ясно, что такая (достаточно малая) окрестность существует. Поверхность $\mathcal{M}^2 - (U(N_0) \cup U'(s_*)) \stackrel{\text{def}}{=} M'_0$ гладко (заведомо, цилиндрически) вложена в S^3 и, следовательно, имеет окрестность, диффеоморфную $M'_0 \times (-4, +4)$. Меньшая поверхность $\mathcal{M}^2 - (U(N_0) \cup U(s_*)) \stackrel{\text{def}}{=} M_0$ имеет окрестность, диффеоморфную $M_0 \times (-4, +4)$. Поскольку $\mathcal{M}^2$ является притягивающей для f_0 и $U'(s_*) \subset f_0|_{\mathcal{M}^2}(U(s_*))$, можно считать, что диффеоморфизм f_0 переводит окрестность $M_0 \times (-4, +4)$ в $M'_0 \times (-4, +4)$, и на множестве $M_0 \times (-4, +4)$ диффеоморфизм f_0 имеет вид $(f_0|_{M_0}, z/2)$, где координата $z \in (-4, +4)$ относится к второму множителю в произведении $M_0 \times (-4, +4)$.

Возьмем гладкую функцию $q: (-4, +4) \rightarrow [0, 1]$ такую, что

$$q|_{[-1, +1]} \equiv 1, \quad q|_{(-4, -3) \cup (3, 4)} \equiv 0,$$

и рассмотрим диффеоморфизм

$$(h_{q(z)} \circ f_0|_{M_0}, z/2): M_0 \times (-4, +4) \rightarrow M'_0 \times (-4, +4), \quad z \in (-4, +4).$$

Тогда в окрестности $M_0 \times (-1, +1)$ поверхности $M_0 \times \{0\}$ диффеоморфизм $(h_{q(z)} \circ f_0|_{M_0}, z/2)$ равен $(h_1 \circ f_0|_{M_0}, z/2) = (g, z/2)$. В частности,

$$(h_{q(z)} \circ f_0|_{M_0}, z/2)|_{z=0} = (h_{q(0)} \circ f_0|_{M_0}, 0) = (h_1 \circ f_0|_{M_0}, 0) = (g, 0).$$

С другой стороны, диффеоморфизм $(h_{q(z)} \circ f_0|_{M_0}, z/2)$ при $z \in (-4, -3) \cup (3, 4)$ совпадает с

$$(h_{q(1)} \circ f_0|_{M_0}, z/2) = (f_0|_{M_0}, z/2) = f_0.$$

Учитывая, что диффеоморфизм $(h_{q(z)} \circ f_0|_{M_0}, z/2)$ на границе множества $M_0 \times (-4, +4)$ также совпадает с f_0 , получаем, что отображение

$$f(p) = \begin{cases} f_0(p) & \text{при } p \notin S^3 - M_0 \times (-4, +4), \\ (h_{q(z)} \circ f_0, z/2)(p) & \text{при } p \in S^3 - M_0 \times (-4, +4), \end{cases}$$

является диффеоморфизмом, удовлетворяющим требованиям теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно построению векторного поля $\vec{V}$ Черри–Вильсона оно не имеет седловых точек покоя вне интегральной поверхности M_0 , которая в данном случае гомеоморфна двумерной сфере. Более того, многообразие M^3 получается из двух трехмерных шаров отождествлением их границ. Поэтому M^3 есть трехмерная сфера, $M^3 = S^3$. Из построения вытекает гиперболичность неблуждающего множества диффеоморфизма f_0 и плотность периодических орбит в неблуждающем множестве. Для доказательства структурной устойчивости осталось проверить трансверсальность пересечения инвариантных многообразий неблуждающих орбит. На M_0 это следует из условия теоремы. Вне M_0 одномерные и двумерные устойчивые многообразия орбит, принадлежащих M_0 , лежат в трехмерных неустойчивых многообразиях стоков. Поэтому вне M_0 также выполняются условия трансверсальности. Из [18] и [19] вытекает, что f_0 структурно устойчив.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Возьмем сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса–Смейла $\eta: S^1 \rightarrow S^1$ окружности $S^1 = [0, 1]/0 \simeq 1$ ровно с одним стоком в 0 и источником в $1/2$. На прямом произведении $M_r^2 \times S^1$ пара (η, g) определяет диффеоморфизм $F: (z, x) \mapsto (g(z), \eta(x))$, где $z \in M_r^2$, $x \in S^1$. Ясно, что поверхность $M_0 = M_r^2 \times \{0\}$ является притягивающей для F , а поверхность $M_{1/2} = M_r^2 \times \{1/2\}$ – отталкивающей. Обозначим через s_* изолированный сток диффеоморфизма g . Он порождает сток $S_* = s_* \times \{0\}$ и седло $C_* = s_* \times \{1/2\}$ диффеоморфизма F . Открытая дуга $(s_* \times S^1) - S_*$ является одномерной неустойчивой сепаратрисой $W^u(C_*)$ седла C_* . Поскольку g и η сохраняют ориентацию, в некоторой окрестности $U_*(S_* \cup W^u(C_*))$ кривой $S_* \cup W^u(C_*)$ ограничение $F|_{S_* \cup W^u(C_*)}$ вкладывается в поток, т.е. $F|_{S_* \cup W^u(C_*)}$ есть сдвиг вдоль траекторий некоторого векторного поля $\vec{v}_*$ на определенное фиксированное время, скажем t_* .

Выберем некоторую окрестность кривой $S_* \cup W^u(C_*)$ внутри $U_*(S_* \cup W^u(C_*))$ и модифицируем в ней поле $\vec{v}_*$ следующим образом. Каждая компонента множества $W^u(C_*) - C_*$ является сепаратрисой седла C_* . Обозначим эти сепаратрисы через l_1 и l_2 . Поместим на каждой из l_1, l_2 по одному источнику α_1, α_2 и одному седлу σ_1, σ_2 соответственно, рис. 5. Неустойчивые сепаратрисы седел σ_1, σ_2 – двумерные, а устойчивые сепаратрисы – одномерные. Неустойчивые многообразия $W^u(\alpha_1), W^u(\alpha_2)$ источников α_1, α_2 суть открытые трехмерные шары, которые локально расположены по разные стороны от M_0 .

Сдвиг вдоль траекторий полученного поля на время t_* приведет к модификации диффеоморфизма F внутри $U_*(S_* \cup W^u(C_*))$. Ясно, что указанную модификацию можно произвести таким образом, что мы получим снова диффеоморфизм. Сохраним для простоты изложения предыдущие обозначения.

 Рис. 5. Модификация векторного поля $\vec{v}_*$

Возьмем два трансверсальных к $\vec{v}_*$ двумерных диска d_1, d_2 таких, что $d_i \subset W^u(\alpha_i)$, $i = 1, 2$, и d_1, d_2 лежат локально по разные стороны от M_0 . Тогда, подправив, если необходимо, d_1 и d_2 , можно построить замкнутый двумерный цилиндр C со следующими свойствами:

- 1) пересечение $C \cap M_0$ есть замкнутая простая кривая, которая ограничивает на M_0 диск D_0 и разбивает C ;
- 2) d_1, d_2 являются основаниями цилиндра C ;
- 3) отрицательные полутраектории поля $\vec{v}_*$, начинающиеся на границах дисков d_1 и d_2 , образуют (бесконечные) цилиндрические поверхности T_1, T_2 , которые ограничивают совместно с боковой поверхностью $C - (d_1 \cup d_2)$ цилиндра C цилиндрическую поверхность, скажем Δ ;
- 4) объединение $\Delta \cup (\alpha_1 \cup \alpha_2)$ гомеоморфно 2-сфере, ограничивающей область $B \subset M^3$, которая гомеоморфна открытому 3-шару;
- 5) боковая поверхность $C - (d_1 \cup d_2)$ цилиндра C трансверсальна полю $\vec{v}_*$, причем траектории поля $\vec{v}_*$ входят внутрь B , рис. 6, (а).

Пусть f_{ns}^t – поток вида “север-юг” на 2-сфере S^2 , порождаемый векторным полем $\vec{V}_{ns}$, с одним источником N_0 и стоком S_0 . Согласно теореме 1 существует градиентноподобный диффеоморфизм Морса–Смейла $f: S^3 \rightarrow S^3$ и вложение $S^2 \subset S^3$ такие, что S^2 инвариантна относительно f и ограничение $f|_{S^2}$ есть сдвиг вдоль траекторий потока f_{ns}^t на некоторое время. Более того, S^2 дико вложена в точке S_0 (этот результат также следует из [17] и [30]). Из построения вытекает, что f имеет два источника α'_1, α'_2 , сток S_0 и седло N_0 , причем в окрестности седла N_0 и его одномерных устойчивых сепаратрис диффеоморфизм f вкладывается в поток, который мы обозначим через g^t . Полностью аналогично случаю с векторным полем $\vec{v}_*$ построим замкнутый цилиндр C' , окружающий N_0 , такой, что основания C' суть диски d'_1, d'_2 , лежащие локально по разные стороны от S^2 , а боковая поверхность $C' - (d'_1 \cup d'_2)$ цилиндра C' трансверсальна потоку g^t , причем траектории g^t выходят из C' . Отрицательные полутраектории потока g^t , начинающиеся на границах дисков d'_1 и d'_2 , образуют (бесконечные) цилиндрические поверхности T'_1, T'_2 , которые ограничивают совместно с боковой поверхностью цилиндра C' цилиндрическую поверхность Δ' . Поскольку α -предельные множества полутраектории потока g^t , начинающиеся на границах дисков d'_1 и d'_2 , суть источники α'_1 и α'_2 , то объединение $\Delta \cup (\alpha'_1 \cup \alpha'_2)$ гомеоморфно 2-сфере, ограничивающей область $B' \subset M^3$, которая гомеоморфна открытому 3-шару, рис. 6, (b).

Обозначим через ϑ ограничение диффеоморфизма F^{-1} на $T_1 \cup T_2$, $\vartheta = F^{-1}|_{T_1 \cup T_2}$. Аналогичным образом обозначим через ϑ' ограничение диффеоморфизма f^{-1} на $T'_1 \cup T'_2$, $\vartheta' = f^{-1}|_{T'_1 \cup T'_2}$. Поскольку ϑ и ϑ' являются сдвигами вдоль траекторий пото-

Рис. 6. Цилиндрические поверхности Δ (a) и Δ' (b)

ков, существует гомеоморфизм $h: T_1 \cup T_2 \rightarrow T'_1 \cup T'_2$, осуществляющий сопряженность ϑ и ϑ' , $\vartheta \circ h = h \circ \vartheta'$. Так как в окрестности цилиндра C диффеоморфизм F есть сдвиг вдоль траекторий поля $\vec{v}_*$, дуги этих траекторий совместно с цилиндрами C и $F(C)$ ограничивают тело, гомеоморфное полноторию. Аналогично, цилиндры C' и $f(C')$ и дуги траекторий потока g^t также ограничивают тело, гомеоморфное полноторию. Поэтому h можно продолжить на C до гомеоморфизма $\Delta \rightarrow \Delta'$ (обозначим его снова через h) так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $h(C \cap M_0) = C' \cap S^2$;
- 2) диффеоморфизмы F и f определяют гомеоморфизм f_0 (топологического) многообразия $(M^3 - B) \bigcup_h (S^3 - B')$, которое получается отождествлением границ многообразий $M^3 - B$, $S^3 - B'$ соответственно с помощью h ;
- 3) $h(\alpha_1) = \alpha'_1$, $h(\alpha_2) = \alpha'_2$.

Многообразие $(M^3 - B) \bigcup_h (S^3 - B')$ везде, кроме точек α_i , $i = 1, 2$, наделяется структурой гладкого многообразия, которая индуцируется гладкими структурами многообразий $M^3 - B$, $S^3 - B'$. Более того, из конструкции вытекает, что можно так определить f_0 , чтобы f_0 являлся диффеоморфизмом везде, кроме точек α_i , $i = 1, 2$, которые суть источники гомеоморфизма f_0 . Поэтому можно “сгладить” $M = (M^3 - B) \bigcup_h (S^3 - B')$ так, чтобы M стало гладким многообразием, а f_0 – диффеоморфизмом.

Из условия 1) вытекает, что f_0 имеет притягивающую инвариантную поверхность $(M_0 - D_0)_h \cup (S^2 - D'_0)$, где D'_0 – диск на S^2 , ограниченный кривой $S^2 \cap C'$. Ясно, что $(M_0 - D_0)_h \cup (S^2 - D'_0)$ гомеоморфна M_0 , на которой имеется точка неплоского вложения.

Покажем, что M гомеоморфно M^3 . Обозначим границы $\partial(M^3 - B)$, $\partial(S^3 - B')$ через S_1 , S'_1 соответственно. Поскольку $\Delta \bigcup (\alpha_1 \cup \alpha_2) = S_1$, то S_1 есть 2-сфера. Аналогично, S'_1 есть также 2-сфера. Отметим, что S_1 цилиндрически вложена. Поэтому в $M^3 - B$ имеется цилиндрически вложенная 2-сфера S_2 , ограничивающая совместно с S_1 замкнутое трехмерное кольцо K_{12} , гомеоморфное $[0, 1] \times \mathbb{B}^2$. Возьмем в B' цилиндрически вложенную 2-сферу S'_2 . Будем считать, что диффеоморфизм $f: S^3 \rightarrow S^3$, который мы использовали, построен на основе кривой Артина–Фокса. Известно [29] (все необходимые результаты, касающиеся вложений, можно найти также в монографии [15]), что замыкание открытого 3-шара B' есть замкнутый

3-шар $B' \cup S'_1$. Поэтому сферы S'_1, S'_2 ограничивают в $B' \cup S'_1$ замкнутое трехмерное кольцо K'_{12} , гомеоморфное $[0, 1] \times \mathbb{B}^2$. Отсюда вытекает, что приклеивание множества $S^3 - B'$ к $M^3 - B$ можно представить сначала как приклеивание к $M^3 - B$ замкнутого трехмерного кольца, а затем приклеивание множества $(B' - K_{12}) \cup S'_2$.

Так как S'_2 цилиндрически вложена в B' , $(B' - K_{12}) \cup S'_2$ есть замкнутый 3-шар. Отсюда вытекает, что M гомеоморфно M^3 .

Поскольку поверхность $(M_0 - D_0)_h \cup (S^2 - D'_0)$ притягивающая, если g — Ω -устойчивый, то f — также Ω -устойчивый.

Авторы благодарят Д. В. Аносова и В. З. Гринеса за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы* — 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 156–178; “Гладкие динамические системы. Гл. 2. Элементарная теория”, *Динамические системы* — 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 178–204.
- [2] Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, А. В. Сафонов, В. В. Солодов, А. Н. Старков, А. М. Степин, С. В. Шлячков, “Динамические системы с гиперболическим поведением”, *Динамические системы* — 9, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 5–242.
- [3] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:1 (1967), 747–817; рус. пер.: С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1 (1970), 113–185.
- [4] Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 301–312.
- [5] R. F. Williams, “Expanding attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 169–203.
- [6] Р. В. Плыкин, “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6 (1984), 75–113.
- [7] В. З. Гринес, Х. Х. Калай, *Топологическая классификация базисных множеств без пар сопряженных точек A-диффеоморфизмов на поверхностях*, деп. в ВИНТИ 1137-B88.
- [8] C. Bonatti, R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des surfaces*, With the collaboration of E. Jeandenans, Astérisque, **250**, Soc. Math. France, Paris, 1998.
- [9] R. Bowen, J. Franks, “Homology for zero-dimensional nonwandering sets”, *Ann. of Math. (2)*, **106**:1 (1977), 73–92.
- [10] J. M. Franks, “Constructing structurally stable diffeomorphisms”, *Ann. of Math. (2)*, **105**:2 (1977), 343–359.
- [11] J. M. Franks, *Homology and Dynamical Systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
- [12] R. F. Williams, “Classification of subshifts of finite type”, *Ann. of Math. (2)*, **98**:1 (1973), 120–153; “Errata to “Classification of subshifts of finite type”, *Ann. of Math. (2)*, **99**:2 (1974), 380–381.
- [13] V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, “Expanding attractors”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **11**:2 (2006), 225–246.
- [14] В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. В. Жужома, “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 813–826.
- [15] Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство*, Тр. МИАН, **81**, Наука, М., 1966.

- [16] J. Kaplan, J. Mallet-Paret, J. Yorke, “The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **4**:2 (1984), 261–281.
- [17] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [18] R. Mañé, “A proof of the C^1 stability conjecture”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **66** (1988), 161–210.
- [19] C. Robinson, “Structural stability of C^1 diffeomorphisms”, *J. Differential Equations*, **22**:1 (1976), 28–73.
- [20] M. Hirsch, J. Palis, C. Pugh, M. Shub, “Neighborhoods of hyperbolic sets”, *Invent. Math.*, **9**:2 (1970), 121–134.
- [21] J. Palis, “On the C^1 Ω -stability conjecture”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **66** (1988), 211–215.
- [22] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.
- [23] T. M. Cherry, “Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **44**:3 (1938), 175–215.
- [24] F. W. Wilson jr., “On the minimal sets of non-singular vector fields”, *Ann. of Math.* (2), **84**:3 (1966), 529–536.
- [25] G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**:2 (1975), 155–183.
- [26] S. Smale, “The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 373–375.
- [27] S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math.* (2), **74**:1 (1961), 199–206.
- [28] S. Smale, “Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four”, *Ann. of Math.* (2), **74**:2 (1961), 391–406.
- [29] R. H. Fox, E. Artin, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space”, *Ann. of Math.* (2), **49**:4 (1948), 979–990.
- [30] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [31] Дж. Милнор, *Теория Морса*, Мир, М., 1965.

Е. В. Жужома

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило

28.10.2008

В. С. Медведев

Институт прикладной математики и кибернетики при

Нижегородском государственном университете

им. Н. И. Лобачевского

E-mail: medvedev@uic.nnov.ru