Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, О. К. Шибанов, Время до объединения всех частиц при равновероятных размещениях по последовательности слоев ячеек, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 373–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 06:48:41

Время до объединения всех частиц при равновероятных размещениях по последовательности слоев ячеек

А. М. Зубков, О. К. Шибанов

Изучается схема равновероятных размещений частиц по последовательности слоев ячеек с объединением частиц, попадающих в одну и ту же ячейку. Приведены условия, при которых с положительной вероятностью в каждом слое существуют не объединенные частицы. Доказана предельная теорема для времени ожидания до объединения всех частиц в случае, когда число ячеек в каждом слое равно числу исходных частиц.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Рассматривается процесс размещения частиц по слоям ячеек следующего вида. На первом этапе n_0 исходных частиц независимо и равновероятно размещаются по n_1 ячейкам первого слоя. Частицы, попадающие в одну и ту же ячейку первого слоя, объединяются в одну новую частицу; при этом в первом слое получается случайное число ψ_1 объединенных частиц (равное числу ячеек первого слоя, занятых исходными частицами). В общем случае на $(k+1)$ -м этапе ψ_k объединенных частиц, находящихся в n_k ячейках k -го слоя, независимо (друг от друга и от предыстории) и равновероятно размещаются по n_{k+1} ячейкам $(k+1)$ -го слоя; частицы, попадающие в одну и ту же ячейку $(k+1)$ -го слоя, объединяются, и ψ_{k+1} — число непустых ячеек $(k+1)$ -го слоя. При сделанных предположениях последовательность $\psi_0, \psi_1, \dots$ образует цепь Маркова с невозрастающими траекториями.

Многоступенчатые схемы размещения частиц были введены в [1]. В статьях [2], [3] доказаны пуассоновские предельные теоремы для двухэтапного размещения частиц по ячейкам, а в [4] приведена формулировка центральной предельной теоремы в двухэтапной схеме размещения. В [5] для схемы двухэтапного размещения получена производящая функция числа ячеек второго слоя, содержащих ровно r исходных частиц, в случае $n_0 = n_1 = n_2$.

ТЕОРЕМА 1. Если $n_* = \min_{k \geq 0} n_k \geq 2$, то

$$P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k > 1\right\} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty.$$

Рассмотрим далее случай, когда все слои имеют один и тот же размер, т.е. $n_0 = n_1 = n_2 = \dots = n$. В силу теоремы 1 тогда с вероятностью 1 все n исходных

Работа выполнена при поддержке программы Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики.”

частиц объединяются за конечное число этапов, т.е. первый момент τ_n , когда все частицы объединяются в одну, имеет собственное распределение. Заметим, что при $n_0 = n_1 = \dots = n$ возможна другая естественная интерпретация этой величины. Если $S = \{1, \dots, n\}$ и $f_1, f_2, \dots$ – независимые равновероятные отображения $S \rightarrow S$, то

$$\tau_n = \min\{T : |f_T(f_{T-1}(\dots f_1(S)\dots))| = 1\}$$

– минимальное число итераций случайных отображений S в себя, при котором образом S оказывается одноэлементное множество.

ТЕОРЕМА 2. При $n \rightarrow \infty$ распределения случайных величин $\zeta_n = \tau_n/n$ сходятся к распределению суммы $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$, где случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и

$$\mathbf{P}\{\xi_j \leq x\} = 1 - e^{-xj(j+1)/2}, \quad x \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $\mathbf{E}\xi_j = 2/(j(j+1))$, то ξ имеет конечное математическое ожидание:

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j(j+1)} = 2.$$

В п. 2 статьи доказывается теорема 1, а в п. 3 – теорема 2.

2. Условия полного объединения частиц. Пусть выполнены условия теоремы 1. Положим $t_* = \min\{k \geq 1 : n_k = n_*\}$.

Последовательность ψ_k образует (неоднородную по времени) цепь Маркова с невозрастающими траекториями. Легко проверить, что при любых $k, m > 0$

$$\mathbf{P}\{\psi_{k+1} = m \mid \psi_k = m\} = \frac{n_{k+1}^{[m]}}{n_{k+1}^m}, \quad \text{если } n_{k+1} \geq m, \quad (1)$$

где $n^{[m]} = n(n-1)\dots(n-m+1)$; кроме того,

$$\mathbf{P}\{\psi_k = n_* \text{ для всех } k \geq t_*\} = \mathbf{P}\{\psi_{t_*} = n_*\} \mathbf{P}\{\psi_k = n_* \text{ для всех } k > t_* \mid \psi_{t_*} = n_*\}, \quad (2)$$

и первый сомножитель в правой части положителен.

ЛЕММА 1. При $n_* \geq 2$ и любых таких $t \geq 1$ и $h \geq 2$, что $n_k \geq h$ при всех $k \geq t$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}\{\psi_k = h \text{ для всех } k > t \mid \psi_t = h\} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу марковости последовательности $\{\psi_n\}$

$$\mathbf{P}\{\psi_k = h \text{ для всех } k \geq t \mid \psi_t = h\} = \prod_{k=t}^{\infty} \mathbf{P}\{\psi_{k+1} = h \mid \psi_k = h\} = \prod_{k=t}^{\infty} \frac{n_{k+1}^{[h]}}{n_{k+1}^h}.$$

Сходимость бесконечного произведения к ненулевому значению эквивалентна сходимости ряда из логарифмов сомножителей:

$$\sum_{k=t}^{\infty} \ln \left(\frac{n_k(n_k-1)\dots(n_k-h+1)}{n_k^h} \right). \quad (3)$$

Так как при $h \geq 2$

$$\frac{(n_k - h + 1)^h}{n_k^h} \leq \frac{n_k(n_k - 1) \cdots (n_k - h + 1)}{n_k^h} \leq \frac{n_k - 1}{n_k},$$

то

$$h \sum_{k=t}^{\infty} \ln \left(\frac{n_k - h + 1}{n_k} \right) \leq \sum_{k=t}^{\infty} \ln \left(\frac{n_k(n_k - 1) \cdots (n_k - h + 1)}{n_k^h} \right) \leq \sum_{k=t}^{\infty} \ln \left(\frac{n_k - 1}{n_k} \right). \quad (4)$$

При $n_* \geq 2$ ряды в левой и правой частях (4) сходятся или расходятся одновременно с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$, значит, сходимость этого ряда эквивалентна выполнению условия $P\{\psi_k = h \text{ для всех } k \geq t \mid \psi_t = h\} > 0$ при $h \geq 2$. Лемма 1 доказана.

Таким образом, если $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k < \infty$, то

$$P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k > 1\right\} > 0 \geq P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = n_*\right\} > 0.$$

Пусть теперь $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k = \infty$. Так как последовательность $\{\psi_k\}$ не возрастает, то

$$P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k > 1\right\} = \sum_{h=2}^{n_*} P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = h\right\}$$

и при любом $h = 2, \dots, n_*$

$$\begin{aligned} P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = h\right\} &\leq \sum_{t=t_*}^{\infty} P\{\psi_k = h \text{ для всех } k \geq t\} \\ &\leq \sum_{t=t_*}^{\infty} P\{\psi_k = h \text{ для всех } k > t \mid \psi_t = h\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно лемме 1 при $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k = \infty$ все слагаемые в правой части (5) равны 0; следовательно,

$$P\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k > 1\right\} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Предельное распределение момента объединения всех частиц. Доказательство теоремы 2 разбито на несколько лемм. В леммах 2 и 3 получены грубые оценки, из которых следует, что для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что время перехода от n частиц к M частицам больше εn , можно сделать сколь угодно малой для всех достаточно больших n за счет выбора достаточно большого $M = \text{const}$. Затем будет показано, что время пребывания последовательности $\{\psi_n\}$ на любом уровне $k = \text{const}$, деленное на n , сходится по распределению к ξ_k , и что распределения сумм этих нормированных времен сходятся к распределениям сумм соответствующих независимых случайных величин ξ_k .

Положим

$$T(0) = 0, \quad T(j) = \min(t : \psi_t \leq j), \quad \eta_j = T(j) - T(j+1), \quad j = n-1, \dots, 1.$$

Здесь η_j – “время перехода” от $j+1$ объединенных частиц к j объединенным частицам, причем

$$\{\eta_j > 0\} = \{\min(t : \psi_t \leq j) > \min(t : \psi_t \leq j+1)\} = \{\psi_{T(j+1)} = j+1\}.$$

Очевидно, $\tau_n = T(1) = \sum_{j=1}^{n-1} \eta_j$.

В случае, когда каждый слой состоит ровно из n ячеек, (1) принимает вид

$$P\{\psi_{k+1} = m \mid \psi_k = m\} = \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} a_m(n) = a_m, \quad \text{если } 1 \leq m \leq n, \quad (6)$$

поэтому

$$P\{\eta_k > t \mid \eta_k > 0\} = \prod_{j=1}^t P\{\eta_k > j \mid \eta_k > j-1\} = (a_{k+1})^t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$E\eta_k = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\eta_k > t\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\eta_k > 0\} (a_{k+1})^t = \frac{P\{\eta_k > 0\}}{1 - a_{k+1}}. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. Пусть $m_i^{(n)}$ – целая часть числа n/i^2 , $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\sum_{1 \leq i < n^{1/6}} P\{T(m_{i+1}^{(n)}) - T(m_i^{(n)}) > 1\} \leq \frac{1}{n^{1/6}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать через $\mu_0(M, n)$ число пустых ячеек при размещении M частиц по n ячейкам в равновероятной одноэтапной схеме размещения частиц. Событие $\{T(m_{i+1}^{(n)}) - T(m_i^{(n)}) > 1\}$ происходит тогда и только тогда, когда $\psi_{T(m_i^{(n)})+1} > m_{i+1}^{(n)}$, т.е. при первом равновероятном размещении $\psi_{T(m_i^{(n)})} \leq m_i^{(n)}$ частиц по n ячейкам число $\mu_0(\psi_{T(m_i^{(n)})}, n)$ пустых ячеек оказывается не больше $n - m_{i+1}^{(n)} + 1$. Так как при увеличении числа размещаемых частиц число пустых ячеек не увеличивается, то

$$\begin{aligned} P\{T(m_{i+1}^{(n)}) - T(m_i^{(n)}) > 1\} &= P\{\mu_0(\psi_{T(m_i^{(n)})}, n) \leq n - m_{i+1}^{(n)} + 1, \psi_{T(m_i^{(n)})} > m_{i+1}^{(n)}\} \\ &\leq P\{\mu_0(m_i^{(n)}, n) \leq n - m_{i+1}^{(n)} + 1\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оценим вероятность в правой части с помощью неравенства Чебышёва:

$$\begin{aligned} &P\{\mu_0(m_i^{(n)}, n) \leq n - m_{i+1}^{(n)} + 1\} \\ &= P\{E\mu_0(m_i^{(n)}, n) - \mu_0(m_i^{(n)}, n) \geq E\mu_0(m_i^{(n)}, n) - n + m_{i+1}^{(n)} - 1\} \\ &\leq \frac{D\mu_0(m_i^{(n)}, n)}{(E\mu_0(m_i^{(n)}, n) - n + m_{i+1}^{(n)} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы оценить числитель, воспользуемся точными формулами из [6; с. 12–13] и неравенством $(1-2x) \leq (1-x)^2$:

$$\begin{aligned} D\mu_0(M, n) &= n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^M + n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^M - n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2M} \\ &\leq n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^M - n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^M = \sum_{k=0}^{M-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{M-k-1} \leq M. \end{aligned}$$

Далее, из неравенств

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \leq e^{-m/n} \leq 1 - \frac{m}{n} + \frac{m^2}{2n^2}, \quad m, n \geq 0, \quad \frac{n}{i^2} - 1 < m_i^{(n)} \leq \frac{n}{i^2},$$

и

$$\frac{1}{i^2} - \frac{1}{2i^4} = \frac{2i^2 - 1}{2i^4} > \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{i(i+1)^2}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mu_0(m_i^{(n)}, n) &= n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m_i^{(n)}} \leq n - m_i^{(n)} + \frac{(m_i^{(n)})^2}{2n} \leq n - \frac{n}{i^2} + \frac{n}{2i^4} + 1 \\ &\leq n - \frac{n}{(i+1)^2} - \frac{n}{i(i+1)^2} + 1 < n - m_{i+1}^{(n)} + 1 - \frac{n}{i(i+1)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, можно переписать неравенство (10) так:

$$\mathbb{P}\{\mu_0(m_i^{(n)}, n) \leq n - m_{i+1}^{(n)} + 1\} \leq \frac{n/i^2}{(n/i(i+1)^2)^2} = \frac{(i+1)^4}{n}.$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$\sum_{1 \leq k < n^{1/6}} \mathbb{P}\{T(m_{k+1}^{(n)}) - T(m_k^{(n)}) > 1\} \leq \sum_{1 \leq k < n^{1/6}} \frac{(i+1)^4}{n} < \frac{1}{n^{1/6}}.$$

Лемма 2 доказана.

В силу леммы 2

$$\mathbb{P}\{T(m_{1+[n^{1/6}]}^{(n)}) - T(n) > n^{1/6}\} \rightarrow 0,$$

т.е. время перехода от n исходных частиц к $m_{1+[n^{1/6}]}^{(n)} \leq n^{2/3}$ объединенным частицам не больше $n^{1/6}$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3. Для любого фиксированного M при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(T(M) - T(m_{1+[n^{1/6}]}^{(n)})) \leq \frac{1}{n} \sum_{s=M}^{[n^{2/3}]} \mathbb{E}\eta_s \leq \frac{5}{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (8) следует, что

$$\frac{1}{n} \sum_{s=M}^{[n^{2/3}]} \mathbb{E}\eta_s < \frac{1}{n} \sum_{s=M}^{[n^{2/3}]} \frac{1}{1 - a_{s+1}}.$$

Так как

$$\ln a_{s+1} = \sum_{i=1}^s \ln \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} s(s+1)$$

и $e^{-x} \leq \max\{1/2, 1 - x/2\}$, $x \geq 0$, то

$$1 - a_{s+1} \geq 1 - e^{-s(s+1)/2n} \geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{s(s+1)}{4n}\right\},$$

поэтому

$$\frac{1}{n} \sum_{s=M}^{[n^{2/3}]} \mathbb{E} \eta_s < \sum_{s=M}^{[n^{2/3}]} \max \left\{ \frac{2}{n}, \frac{4}{s(s+1)} \right\} < \frac{2}{n^{1/3}} + \frac{4}{M}.$$

Из этой оценки следует утверждение леммы 3.

В силу лемм 2 и 3 при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=M}^{n-1} \eta_k > \varepsilon \right\} &= \mathbb{P} \{T(M) - T(n) > \varepsilon n\} \\ &< \mathbb{P} \{T(m_{1+[n^{1/6}]})^{(n)} - T(n) > n^{1/6}\} + \mathbb{P} \{T(M) - T(m_{1+[n^{1/6}]}^{(n)}) > \varepsilon n\} \\ &< \frac{1}{n^{1/6}} + \frac{5}{M\varepsilon}, \end{aligned}$$

т.е. за счет выбора M вероятность того, что время перехода от n частиц к M частицам больше εn , можно сделать сколь угодно малой при всех достаточно больших n .

ЛЕММА 4. Если $k < n$, то

$$\mathbb{P} \{ \eta_k = 0 \} \leq \frac{k^2}{3(n-k)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию, сделанному при определении величин η_s ,

$$\{ \eta_k = 0 \} = \{ T(k) = T(k+1) \} = \bigcup_{m > k+1, t > 0} \{ \psi_{t-1} = m, T(k) = t, T(k+1) = t \},$$

и события в правой части попарно не пересекаются. Следовательно,

$$\mathbb{P} \{ \eta_k = 0 \} = \sum_{m > k+1} \sum_{t > 0} \mathbb{P} \{ \psi_{t-1} = m, T(k+1) = t \} \mathbb{P} \{ T(k) = t \mid \psi_{t-1} = m, T(k+1) = t \}. \quad (11)$$

Сумма первых сомножителей по m и t равна 1, поэтому достаточно оценить условные вероятности

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ T(k) = t \mid \psi_{t-1} = m, T(k+1) = t \} &= \mathbb{P} \{ \mu_0(m, n) \geq n - k \mid \mu_0(m, n) \geq n - k - 1 \} \\ &= \mathbb{P} \{ \bar{\mu}_1(m, n) \leq k \mid \bar{\mu}_1(m, n) \leq k + 1 \}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\bar{\mu}_1(m, n)$ – число занятых ячеек при равновероятном размещении m частиц по n ячейкам.

ЛЕММА 5. Если $k < m < n$, то

$$\frac{\mathbb{P} \{ \bar{\mu}_1(m, n) \leq k \}}{\mathbb{P} \{ \bar{\mu}_1(m, n) \leq k + 1 \}} \leq \frac{\mathbb{P} \{ \bar{\mu}_1(m, n) = k \}}{\mathbb{P} \{ \bar{\mu}_1(m, n) = k + 1 \}} \leq \frac{k^2}{3(n-k)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $A_{m,n}$ всех возможных размещений m частиц по n ячейкам состоит из $|A_{m,n}| = n^m$ элементов вида $(x_1, \dots, x_m)$, где x_j – номер ячейки, в которую попала j -я частица. В случае независимых равновероятных размещений каждое из этих размещений имеет вероятность n^{-m} . Обозначим через $A_{m,n}(k)$ множество размещений, для которых число занятых ячеек равно k ; тогда

$$\mathbb{P} \{ \bar{\mu}_1(m, n) = k \} = n^{-m} |A_{m,n}(k)|.$$

Обозначим также через $A_{m,n}^*(k+1)$ множество размещений, для которых число занятых ячеек равно $k+1$ и при этом существует ячейка, в которую попала ровно одна частица; очевидно,

$$A_{m,n}^*(k+1) \subseteq A_{m,n}(k+1). \quad (13)$$

Рассмотрим двудольный граф с множеством вершин $A_{m,n}(k) \cup A_{m,n}^*(k+1)$; в этом графе вершины $(x_1, \dots, x_m) \in A_{m,n}(k)$ и $(x_1^*, \dots, x_m^*) \in A_{m,n}^*(k+1)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда существует такое $j \in \{1, \dots, m\}$, что $x_j \neq x_j^*$, $x_i = x_i^*$ при всех $i \neq j$ и множество $\bigcup_{i \neq j} \{x_i\}$ содержит x_j , но не содержит x_j^* .

Получим двусторонние оценки числа $N_{m,n}(k)$ ребер в этом графе. Так как при $m > k$ для любого размещения $(x_1, \dots, x_m) \in A_{m,n}(k)$ число ячеек, содержащих ровно одну частицу, не может быть больше $k-1$, то число таких j , что $x_j \in \bigcup_{i \neq j} \{x_i\}$, не меньше $m-k+1$, а число пустых ячеек равно $n-k$. Значит, из каждой вершины $(x_1, \dots, x_m) \in A_{m,n}(k)$ выходит не менее $(n-k)(m-k+1)$ ребер, т.е. $N_{m,n}(k)$ не меньше $(n-k)(m-k+1)|A_{m,n}(k)|$. С другой стороны, из любого набора $(x_1^*, \dots, x_m^*) \in A_{m,n}^*(k+1)$ можно получить набор из $A_{m,n}(k)$, выбрав такое $j \in \{1, \dots, m\}$, что $x_j^* \notin \bigcup_{i \neq j} \{x_i^*\}$, и заменив значение x_j^* любым из k элементов множества $\bigcup_{i \neq j} \{x_i^*\}$. Число вариантов таких преобразований не больше k^2 , так как

$$\left| \{j : x_j^* \notin \bigcup_{i \neq j} \{x_i^*\}\} \right| \leq k.$$

Значит, из каждой вершины $(x_1, \dots, x_m) \in A_{m,n}^*(k+1)$ выходит не более k^2 ребер, т.е. $N_{m,n}(k)$ не больше $k^2|A_{m,n}^*(k+1)|$. Из неравенства

$$(n-k)(m-k+1)|A_{m,n}(k)| \leq N_{m,n}(k) \leq k^2|A_{m,n}^*(k+1)|$$

и включения (13) следует, что при $m \geq k+2$

$$\frac{P\{\bar{\mu}_1(m, n) = k\}}{P\{\bar{\mu}_1(m, n) = k+1\}} \leq \frac{k^2}{(n-k)(m-k+1)} \leq \frac{k^2}{3(n-k)}.$$

Правая часть этого неравенства монотонно возрастает по k , поэтому

$$\frac{P\{\bar{\mu}_1(m, n) \leq k\}}{P\{\bar{\mu}_1(m, n) \leq k+1\}} \leq \frac{P\{\bar{\mu}_1(m, n) = 1\} + \dots + P\{\bar{\mu}_1(m, n) = k\}}{P\{\bar{\mu}_1(m, n) = 2\} + \dots + P\{\bar{\mu}_1(m, n) = k+1\}} \leq \frac{k^2}{3(n-k)}.$$

Лемма 5 доказана.

Из (11), (12) и леммы 5 следует утверждение леммы 4.

ЛЕММА 6. Для любого фиксированного k случайная величина η_k/n при $n \rightarrow \infty$ сходится по распределению к случайной величине ξ_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) следует, что при $x > 0$

$$P\{\eta_k \leq nx\} = 1 - P\{\eta_k > 0\}a_{k+1}^{[nx]}.$$

В силу (6) при $n \rightarrow \infty$, $k = \text{const}$

$$a_{k+1}^{[nx]} = \left(\prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n} \right) \right)^{[nx]} = \exp \left(-[nx] \frac{k(k+1)}{2n} (1 + o(1)) \right) \rightarrow e^{-k(k+1)x/2},$$

и $P\{\eta_k > 0\} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, по лемме 4. Значит, при $x > 0$, $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\frac{1}{n}\eta_k \leq x\right\} = P\{\eta_k \leq nx\} \rightarrow 1 - e^{-k(k+1)x/2} = P\{\xi_k \leq x\}.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Для любого фиксированного M случайные величины $(1/n) \sum_{s=1}^M \eta_s$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся по распределению к сумме $\sum_{s=1}^M \xi_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения $\{\eta_j > 0\} = \{\psi_{T(j+1)} = j+1\}$ и того, что $\{\psi_t\}$ – цепь Маркова с невозрастающими траекториями, следует, что для любого j случайная величина η_j при условии $\{\eta_j > 0\}$ не зависит от случайных величин $\eta_{j+1}, \dots, \eta_n$. Значит, для любого $k < n$ случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_M$ независимы на той части вероятностного пространства, на которой все они положительны, т.е. для любых целых $t_1, \dots, t_M > 0$

$$P\{\eta_1 = t_1, \dots, \eta_M = t_M\} = P\{\eta_1 = t_1\} \cdots P\{\eta_s = t_s\}. \quad (14)$$

Поэтому при любых $x_1, \dots, x_M > 0$

$$\begin{aligned} P\{1 \leq \eta_1 \leq nx_1, \dots, 1 \leq \eta_M \leq nx_M\} &= \prod_{j=1}^M P\{1 \leq \eta_j \leq nx_j\} \\ &= \prod_{j=1}^M (P\{\eta_j \leq nx_j\} - P\{\eta_j = 0\}). \end{aligned} \quad (15)$$

Правая часть этого равенства принадлежит интервалу

$$\left(\prod_{j=1}^M P\{\eta_j \leq nx_j\} - \sum_{j=1}^M P\{\eta_j = 0\}, \prod_{j=1}^M P\{\eta_j \leq nx_j\} \right). \quad (16)$$

С другой стороны, для левой части (15) справедливы оценки

$$\begin{aligned} P\{\eta_1 \leq nx_1, \dots, \eta_M \leq nx_M\} &\geq P\{1 \leq \eta_1 \leq nx_1, \dots, 1 \leq \eta_M \leq nx_M\} \\ &= P\left\{\eta_1 \leq nx_1, \dots, \eta_M \leq nx_M\right\} \setminus \left\{\bigcup_{j=1}^M \{\eta_j = 0\}\right\} \\ &\geq P\{\eta_1 \leq nx_1, \dots, \eta_M \leq nx_M\} - \sum_{j=1}^M P\{\eta_j = 0\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (14)–(17) следует, что

$$\left| P\{\eta_1 \leq nx_1, \dots, \eta_M \leq nx_M\} - \prod_{j=1}^M P\{\eta_j \leq nx_j\} \right| \leq \sum_{j=1}^M P\{\eta_j = 0\}.$$

Правая часть этой оценки стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, значит (с учетом леммы 6), совместное распределение $\eta_1/n, \dots, \eta_M/n$ сходится к совместному распределению независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_M$. Отсюда следует утверждение леммы 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В правой части равенства

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^M \eta_k + \frac{1}{n} \sum_{k=M+1}^n \eta_k$$

первое слагаемое при $n \rightarrow \infty$ сходится к $\sum_{k=1}^M \xi_k$ в силу лемм 6 и 7, а для второго в силу лемм 2 и 3 справедлива оценка

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=M+1}^n \eta_k > \varepsilon \right\} < \frac{1}{n^{1/6}} + \frac{5}{M\varepsilon}.$$

Так как ε можно выбирать сколь угодно малым, а M – сколь угодно большим, отсюда следует утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Зубков, О. К. Шибанов, “Многоступенчатые схемы размещения частиц по ячейкам”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **9:1** (2002), 115–116.
- [2] А. М. Зубков, О. К. Шибанов, “Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной равновероятной схемы размещения частиц по ячейкам”, *Дискрет. матем.*, **18:4** (2006), 99–104.
- [3] А. М. Зубков, О. К. Шибанов, “Пуассоновская предельная теорема для двухэтапной полиномиальной схемы размещения частиц по ячейкам”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **14:3** (2007), 422–434.
- [4] О. К. Шибанов, “Предельные теоремы для двухступенчатой схемы размещения частиц по ячейкам”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **10:1** (2003), 253.
- [5] С. В. Агиевич, “Двухэтапные размещения и двойная Q -функция”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **10:1** (2003), 82.
- [6] В. Ф. Колчин, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, *Случайные размещения*, Наука, М., 1976.

А. М. Зубков

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: zubkov@mi.ras.ru

Поступило

12.08.2008

О. К. Шибанов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: oshi@yandex.ru