Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Лунев, Точные константы в неравенствах для промежуточных производных в n -мерном пространстве, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 476–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6637>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:21:37

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Точные константы в неравенствах для промежуточных производных в n -мерном пространстве

А. А. Лунёв

1. Введение. Всюду в заметке $H^m(\mathbb{R}^n)$ – соболевское пространство. Напомним, что $H^m(\mathbb{R}^n)$, $n, m \in \mathbb{N}$, состоит из квадратично интегрируемых функций таких, что их обобщенные производные до порядка m включительно принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Класс эквивалентных норм в $H^m(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|f\| = \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} := \left(\int \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha |D^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Числа a_α – неотрицательные, а при $\alpha = (0, \dots, 0)$, $\alpha = (m, 0, \dots, 0)$, $\alpha = (0, m, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\alpha = (0, \dots, 0, m)$ – положительные.

Наиболее распространенная среди норм вида (1) задается равенством

$$\|f\|^2 = \|f\|_{L_2}^2 + \sum_{j=1}^n \|D_j^m f\|_{L_2}^2. \quad (2)$$

Согласно теореме вложения (см. [1]) при $|\beta| < m - n/2$ справедливы неравенства типа Колмогорова

$$|D^\beta f(0)| \leq A_{m,n,\beta,a} \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}. \quad (3)$$

Здесь $a = \{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$ – вектор констант в определении (1).

Целью заметки является вычисление точных, т.е. наименьших возможных, констант в этих неравенствах.

Известные результаты о константах в неравенствах для промежуточных производных в различных случаях содержатся, например, в монографиях [2], [3; § 2.4]. В одномерном случае точные константы в неравенстве (3) для нормы (2) нашел Тайков [4] (см. также [3; п. 2.4.4]). Именно, он получил простую явную формулу

$$A_{m,k}^* = \left(2m \sin \left(\frac{k+1/2}{m} \pi \right) \right)^{-1/2},$$

где $A_{m,k}^*$ – наименьшая константа в неравенстве

$$|f^{(k)}(0)| \leq A_{m,k}^* \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|f(x)|^2 + |f^{(m)}(x)|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Основным результатом заметки является следующая

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, что $|\beta| < m - n/2$, наименьшая константа $A_{m,n,\beta,a}$ в неравенстве (3) дается формулой

$$A_{m,n,\beta,a} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\xi^{2\beta}}{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha}} d\xi. \quad (4)$$

Основой доказательства теоремы 1 является теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

В трех наиболее естественных случаях задания нормы (1) константу $A_{m,n,\beta,a}$ удастся вычислить явно. Один из них (следствие 1) соответствует норме (2).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $|\beta| < m - n/2$ и вектор $a = \{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$ определяется равенством

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha} = 1 + \sum_{j=1}^n \xi_j^{2m}. \quad (5)$$

Тогда

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma((\beta_j + 1/2)/m)}{m^n \Gamma((|\beta| + n/2)/m)} \cdot \frac{\pi}{\sin((|\beta| + n/2)/m\pi)}. \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $|\beta| < m - n/2$ и вектор $a = \{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$ определяется равенством

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha} = 1 + |\xi|^{2m} = 1 + \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^m. \quad (7)$$

Тогда

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(\beta_j + 1/2)}{\Gamma(|\beta| + n/2)} \cdot \frac{\pi}{m \sin((|\beta| + n/2)/m\pi)}. \quad (8)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $|\beta| < m - n/2$ и вектор $a = \{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$ определяется равенством

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha} = (1 + |\xi|^2)^m. \quad (9)$$

Тогда

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \prod_{j=1}^n \Gamma(\beta_j + 1/2) \cdot \frac{\Gamma(m - |\beta| - n/2)}{(m - 1)!}. \quad (10)$$

2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в пространстве $H^m(\mathbb{R}^n)$ линейный функционал $L_\beta(f) := D^\beta f(0)$. Тогда искомая константа $A_{m,n,\beta,a}$ является, очевидно, нормой этого функционала. Так как пространство $H^m(\mathbb{R}^n)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g) = (f, g)_{H^m(\mathbb{R}^n)} := \int \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx, \quad (11)$$

по теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $g_\beta \in H^m(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$L_\beta(f) = (f, g_\beta), \quad f \in H^m(\mathbb{R}^n), \quad (12)$$

и $\|L_\beta\| = \|g_\beta\|$. Используя равенство (12), получаем

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \|L_\beta\|^2 = \|g_\beta\|^2 = (g_\beta, g_\beta) = L_\beta(g_\beta) = D^\beta g_\beta(0). \quad (13)$$

Найдем функцию $g(x) = g_\beta(x)$, реализующую функционал $L_\beta(f)$ согласно (12). Из (12), учитывая определение $L_\beta(f)$ и равенство (11), получаем

$$D^\beta f(0) = \int \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx = \int \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f(x) D^\alpha h(x) dx, \quad (14)$$

где $h(x) = \overline{g(x)}$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$T(D) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^{2\alpha}. \quad (15)$$

Как известно (см. [5]), всякий линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение медленного роста, и это решение дается формулой

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(2\pi)^n} F \left[\operatorname{reg} \frac{1}{T(i\xi)} \right]. \quad (16)$$

Здесь $\operatorname{reg}(1/T(i\xi))$ – какое-либо решение уравнения $T(i\xi)X = 1$ в классе $\mathcal{S}'$ обобщенных функций медленного роста, а $F[u]$ – преобразование Фурье обобщенной функции $u \in \mathcal{S}'$.

Напомним, что *фундаментальным решением оператора $T(D)$* называется обобщенная функция $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая в $\mathbb{R}^n$ уравнению $T(D)\mathcal{E} = \delta$, в котором δ – дельта-функция Дирака.

Докажем, что $h = (-1)^{|\beta|} D^\beta \mathcal{E}$. Для этого достаточно показать, что (14) выполняется для всех $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Докажем вначале (14) для функций $f \in C_0^{2m}(\mathbb{R}^n)$. Интегрируя в (14) по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f(x) D^\alpha h(x) dx &= \int \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^{\alpha+\beta} f(x) D^\alpha \mathcal{E}(x) dx \\ &= \int \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^{2\alpha} \mathcal{E}(x) \right) D^\beta f(x) dx \\ &= (\delta, D^\beta f) = D^\beta f(0). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (14) проверено для $f \in C_0^{2m}(\mathbb{R}^n)$. Так как $C_0^{2m}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^m(\mathbb{R}^n)$, равенство (14) распространяется по непрерывности на все $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Итак, функция

$$g(x) = \overline{(-1)^{|\beta|} D^\beta \mathcal{E}(x)} \quad (17)$$

реализует функционал $L_\beta(f)$ согласно (12).

Поэтому из (13) и (17) вытекает соотношение

$$A_{m,n,\beta}^2 = D^\beta g_\beta(0) = \overline{(-1)^{|\beta|} (D^{2\beta} \mathcal{E})(0)} = (-1)^{|\beta|} (D^{2\beta} \mathcal{E})(0). \quad (18)$$

Заметим, что в силу условий на коэффициенты a_α функция $1/T(i\xi) \in L_1$. Поэтому, учитывая действие преобразования Фурье на функции из L_1 , получаем из (16) выражение для $\mathcal{E}(\cdot)$:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{e^{-i(\xi,x)}}{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha}} d\xi. \quad (19)$$

Дифференцируя (19) по x , приходим к равенству

$$D_x^{2\beta} \mathcal{E}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{D_x^{2\beta} e^{-i(\xi,x)}}{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha}} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{(-1)^{|\beta|} \xi^{2\beta} e^{-i(\xi,x)}}{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^{2\alpha}} d\xi. \quad (20)$$

При $|\beta| < m - n/2$ интеграл в (20) равномерно сходящийся и, значит, дифференцирование под знаком интеграла в (19) законно. Из (18) и (20) вытекает формула (4).

3. Доказательство следствия 1. Из (4) и (5) вытекает соотношение

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\xi^{2\beta}}{1 + \sum_{k=1}^n \xi_k^{2m}} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot 2^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\xi^{2\beta}}{1 + \sum_{k=1}^n \xi_k^{2m}} d\xi. \quad (21)$$

Складывая формулы [6; 4.635.1] и [6; 4.635.2] при $q_j = 1$, $p_j = 2\beta_j + 1$, $\alpha_j = 2m$, $1 \leq j \leq n$, и $f(x) = 1/(1+x)$, приходим к равенству

$$2^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\xi^{2\beta}}{1 + \sum_{k=1}^n \xi_k^{2m}} d\xi = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma((\beta_j + 1/2)/m)}{m^n \Gamma((|\beta| + n/2)/m)} \int_0^\infty \frac{t^{(|\beta| + n/2)/m - 1}}{1 + t} dt. \quad (22)$$

Но, как хорошо известно (см., например, [6; 3.222.2]),

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1. \quad (23)$$

Объединяя (21), (22) и (23) при $p = (|\beta| + n/2)/m$, приходим к формуле (6).

4. Доказательство следствия 2. Используя те же формулы из [6], что и при доказательстве следствия 1, но при $q_j = 1$, $p_j = 2\beta_j + 1$, $\alpha_j = 2$, $1 \leq j \leq n$, и $f(x) = 1/(1+x^m)$, приходим к равенству

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(\beta_j + 1/2)}{\Gamma(|\beta| + n/2)} \int_0^\infty \frac{t^{|\beta| + n/2 - 1}}{1 + t^m} dt. \quad (24)$$

Заметим, что с учетом (23)

$$\int_0^\infty \frac{t^{pm-1}}{1+t^m} dt = \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{1}{m} \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1. \quad (25)$$

Объединяя (24) и (25) при $p = (|\beta| + n/2)/m$, приходим к формуле (8).

5. Доказательство следствия 3. Используя те же формулы из [6], что и при доказательстве следствия 1, но при $q_j = 1$, $p_j = 2\beta_j + 1$, $\alpha_j = 2$, $1 \leq j \leq n$, и $f(x) = 1/(1+x)^m$, получаем

$$A_{m,n,\beta,a}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(\beta_j + 1/2)}{\Gamma(|\beta| + n/2)} \int_0^\infty \frac{t^{|\beta| + n/2 - 1}}{(1+t)^m} dt. \quad (26)$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty \frac{t^{|\beta| + n/2 - 1}}{(1+t)^m} dt = B\left(|\beta| + \frac{n}{2}, m - |\beta| - \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma(|\beta| + n/2) \Gamma(m - |\beta| - n/2)}{(m-1)!}. \quad (27)$$

Объединяя (26) и (27), приходим к формуле (10).

Автор выражает глубокую благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи и совет использовать теорему Рисса. Автор также признателен М. М. Маламуду и Л. Л. Оридоре за ряд полезных замечаний и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988. [2] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003. [3] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976. [4] Л. В. Тайков, *Матем. заметки*, 4:2 (1968), 233–238. [5] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981. [6] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Физматгиз, М., 1963.