Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Самойлов, О полилинейных компонентах первичных подмногообразий многообразия $\text{Var}(M_{1,1})$, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 919–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:25:45

О полилинейных компонентах первичных подмногообразий многообразия $\text{Var}(M_{1,1})$

Л. М. Самойлов

Пусть $M_{1,1}$ – матричная супералгебра над бесконечным полем положительной характеристики $p \neq 2$. В работе описаны полилинейные тождества первичных подмногообразий многообразия $\text{Var } M_{1,1}$. Показано, что множество полилинейных тождеств произвольного первичного подмногообразия многообразия $\text{Var } M_{1,1}$ или совпадает с множеством полилинейных тождеств алгебры $M_{1,1}$, или порождается тождеством $[x, y, z] = 0$, или порождается тождеством $[x, y] = 0$.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В работе рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над бесконечным полем F положительной характеристики $p \neq 2$.

Будем придерживаться следующих обозначений: M_n – алгебра матриц порядка n над полем F ; G – алгебра Грассмана счетного ранга с единицей с $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой $G = G_0 \oplus G_1$, где G_0 и G_1 – подпространства алгебры G , порожденные всеми словами четной и нечетной длины соответственно. Для $n, k \geq 0$ рассмотрим в алгебре $M_{n+k}(G) = M_{n+k} \otimes G$ подмножество $M_{n,k}$, состоящее из блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A и D – квадратные матрицы размера $n \times n$ и $k \times k$ соответственно с элементами из G_0 , а B и C – прямоугольные матрицы размера $n \times k$ и $k \times n$ соответственно с элементами из G_1 . Легко проверить, что $M_{n,k}$ является подалгеброй алгебры $M_n(G)$. Алгебры $M_{n,k}$ называются *матричными супералгебрами*.

Кемером была выяснена фундаментальная роль алгебр $M_n(G)$ и $M_{n,k}$ в теории многообразий ассоциативных алгебр. А именно, в [1] было доказано, что каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики порождается алгеброй $M_n(G)$ или $M_{n,k}$, $n \geq k$ (идеалы тождеств алгебр $M_{n,0}$ и M_n над полем характеристики 0 совпадают). Напомним, что нетривиальный T -идеал Γ называется *T -первичным*, если из включения $\Gamma_1 \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ следует, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ или $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Многообразие называется *первичным*, если идеал тождеств этого многообразия T -первичен.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00739).

Задача описания первичных многообразий над бесконечными полями положительной характеристики является важной нерешенной проблемой в теории PI -алгебр. Обозначим через P множество всех полилинейных полиномов свободной ассоциативной алгебры счетного ранга $F\langle X \rangle$. Если Γ – T -идеал, то множество $\Gamma \cap P$ называется *полилинейной компонентой* T -идеала Γ , а также соответствующего ему многообразия. В работах Кемера [2] и [3] были описаны полилинейные компоненты первичных подмногообразий многообразия $\text{Var}(M_2)$. Оказалось, что над полями положительной характеристики существует бесконечная серия первичных подмногообразий многообразия $\text{Var}(M_2)$, не имеющая аналогов над полями нулевой характеристики (см. подробности в [3]).

В настоящей работе описываются полилинейные компоненты первичных подмногообразий многообразия $\text{Var}(M_{1,1})$ при $p \neq 2$. В отличие от подмногообразий $\text{Var}(M_2)$, полилинейные компоненты первичных подмногообразий $\text{Var}(M_{1,1})$ оказались устроены аналогично случаю нулевой характеристики основного поля.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \neq 2$, U – T -первичный T -идеал, $T[M_{1,1}] \subseteq U$. Тогда $U \cap P$ совпадает или с $T[M_{1,1}] \cap P$, или с $\{[x, y, z] = 0\}^T \cap P$, или с $\{[x, y] = 0\}^T \cap P$.

Легко видеть, что теорема 1 является прямым следствием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \neq 2$, U – произвольный T -идеал со свойствами $T[M_{1,1}] \subset U$, $T[M_{1,1}] \cap P \neq U \cap P$. Тогда для некоторого m

$$[x_1, y_1, z_1][x_2, y_2, z_2] \cdots [x_m, y_m, z_m] \in U.$$

Мы опускаем несложный вывод теоремы 1 из теоремы 2.

Над полем нулевой характеристики Кемер доказал следующую теорему о нильпотентности T -полупервичных T -идеалов (см. [1]). Пусть U – нетривиальный T -идеал, N – пересечение всех T -первичных T -идеалов, содержащих U ; тогда идеал N нильпотентен по модулю U . В терминах многообразий это утверждение формулируется так: любое многообразие V раскладывается в V -произведение нильпотентного многообразия и наибольшего полупервичного многообразия, содержащегося в V . Вопрос о том, верно ли (на полиоднородном или полилинейном уровне) аналогичное утверждение над полем положительной характеристики, является открытым.

Теорема 2 показывает, что при $p \neq 2$ это утверждение справедливо на полилинейном уровне для произвольного нетривиального подмногообразия многообразия $\text{Var}(M_{1,1})$. В самом деле, пусть W – наибольшее полупервичное подмногообразие многообразия V . Из теоремы 1 следует, что полилинейная компонента многообразия W совпадает или с $T[M_{1,1}] \cap P$, или с $\{[x, y, z] = 0\}^T \cap P$, или с $\{[x, y] = 0\}^T \cap P$. В первом случае полилинейные компоненты многообразий V и W равны, в частности, множество $T[W] \cap P$ нильпотентно по модулю $T[V]$. Во втором случае из теоремы 2 следует, что множество $T[W] \cap P = \{[x, y, z] = 0\}^T \cap P$ нильпотентно по модулю $T[V]$. В третьем случае из теоремы 2 можно вывести, что V удовлетворяет тождеству $[x_1, y_1] \cdots [x_l, y_l] = 0$ для некоторого l . Отсюда вытекает, что множество $T[W] \cap P = \{[x, y] = 0\}^T \cap P$ нильпотентно по модулю $T[V]$.

Сделаем теперь одно замечание о полилинейных компонентах T -первичных T -идеалов. Пусть U – такой T -идеал, что для произвольных полилинейных полиномов $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(y_1, \dots, y_n)$ от непересекающихся наборов переменных из включения $fg \in U$ следует, что $f \in U$ или $g \in U$. Тогда найдется такой T -первичный T -идеал Γ ,

что $U \cap P = \Gamma \cap P$. В самом деле, множество всех T -идеалов, полилинейные компоненты которых равны $U \cap P$, удовлетворяет условиям леммы Цорна. Поэтому среди таких T -идеалов найдется максимальный T -идеал Γ . Легко понять, что идеал Γ будет T -первичным.

2. Слабые тождества первичных многообразий. Для произвольного T -идеала Γ положим

$$\Gamma' = \{f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle \mid f([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]) \in \Gamma\}.$$

Элементы из Γ' называются *слабыми тождествами* T -идеала Γ .

Полином $h = h(x_1, \dots, x_n)$ называется *центральный полиномом* для T -идеала Γ , если $h \notin \Gamma$, но $[h, y] \in \Gamma$. Белов доказал в [4], что каждый T -первичный T -идеал обладает полилинейными центральными полиномами. В той же работе Белов установил, что T -первичный T -идеал является *устойчивым*, т.е. множество его полилинейных тождеств замкнуто относительно операторов отражения $\sum \alpha_{a_i, b_i} a_i x b_i \rightarrow \sum \alpha_{a_i, b_i} b_i x a_i$ для всех x . Хорошо известно, что для устойчивого T -идеала Γ наличие полилинейных центральных полиномов эквивалентно наличию таких слабых тождеств $f \in \Gamma' \cap P$, что $f \notin \Gamma$. Таким образом, если T -идеал Γ является T -первичным, то $\Gamma' \cap P \neq \Gamma \cap P$.

Следующая теорема показывает, что полилинейные компоненты первичных многообразий однозначно определяются полилинейными слабыми тождествами.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ_1, Γ_2 – T -первичные T -идеалы и $\Gamma'_1 \cap P = \Gamma'_2 \cap P$. Тогда $\Gamma_1 \cap P = \Gamma_2 \cap P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что если $[x, y, z] \notin \Gamma_1$, то для T -идеала Γ_1 существует такой полилинейный центральный полином h , что $h \in \{[x, y, z] = 0\}^T$. В самом деле, пусть $g(x_1, \dots, x_n)$ – произвольный полилинейный центральный полином для Γ_1 . Допустим, что $g([x, y, z]t, x_2, \dots, x_n) \in \Gamma_1$. Запишем $g(x_1, \dots, x_n) = \sum \alpha_{a_i, b_i} a_i x_1 b_i$. Тогда $\sum \alpha_{a_i, b_i} a_i [x, y, z]tb_i \in \Gamma_1$. Применяя оператор отражения относительно переменной t получаем, что $\sum \alpha_{a_i, b_i} (b_i t a_i [x, y, z]) \in \Gamma_1$, т.е.

$$\left(\sum \alpha_{a_i, b_i} b_i t a_i \right) [x, y, z] \in \Gamma_1.$$

Так как $[x, y, z] \notin \Gamma_1$, то $\sum \alpha_{a_i, b_i} b_i t a_i \in \Gamma_1$. Еще раз применяя оператор отражения относительно переменной t , получаем, что $g = \sum \alpha_{a_i, b_i} a_i t b_i \in \Gamma_1$, что противоречит выбору полинома g .

Итак, $h = g([x, y, z]t, x_2, \dots, x_n) \notin \Gamma_1$. Ясно, что $h \in \{[x, y, z] = 0\}^T$, $[h, y] \in \Gamma_1$ и $h \notin \Gamma_1$, т.е. полином h является искомым.

2) Рассмотрим основной случай в доказательстве теоремы, когда $[x, y, z] \notin \Gamma_j$, $j = 1, 2$. Покажем, что если $f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_2 \cap P$, то $f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_1$. Для этого прежде всего заметим, что для всех $a_i \in \{x_i, x_i y_i\}$, $i = 1, \dots, n$, выполнено $f(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma_2 \cap P \subseteq \Gamma'_1$. Поэтому для всех $b_i \in \{[x_i, y_i], [x_i, y_i][z_i, t_i]\}$, $i = 1, \dots, n$, имеет место включение

$$f(b_1, \dots, b_n) \in \Gamma_1. \quad (1)$$

Докажем, что если

$$f(b_1, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \Gamma_1$$

при всех $b_i \in \{[x_i, y_i], [x_i, y_i][z_i, t_i]\}$, $i = 1, \dots, k$, то

$$f(b_1, \dots, b_{k-1}, x_k, \dots, x_n) \in \Gamma_1$$

при всех $b_i \in \{[x_i, y_i], [x_i, y_i][z_i, t_i]\}$, $i = 1, \dots, k-1$. Тогда из этого индукционного утверждения и (1) немедленно будет следовать, что $f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_1$.

Зафиксируем произвольные полиномы $b_i \in \{[x_i, y_i], [x_i, y_i][z_i, t_i]\}$, $i = 1, \dots, k-1$, и обозначим для краткости

$$f(x_k) = f(b_1, \dots, b_{k-1}, x_k, \dots, x_n).$$

Так как $f([x_k, y_k]) \in \Gamma_1$, то

$$f([x_k z_k, y_k]) = f(x_k [z_k, y_k]) + f([x_k, y_k] z_k) \in \Gamma_1.$$

Подставляя $z_k = [z_k, t_k]$ и учитывая, что $f([x_k, y_k][z_k, t_k]) \in \Gamma_1$, получаем, что

$$f(x_k \cdot [z_k, t_k, y_k]) \in \Gamma_1.$$

Из этого включения следует, что если $g \in \{[x, y, z] = 0\}^T$, то $f(x_k \cdot g) \in \Gamma_1$. Возьмем теперь в качестве полинома g центральный полином $h(u_1, \dots, u_r) \in \{[x, y, z] = 0\}^T$ для T -идеала Γ_1 . При этом выберем переменные $u_1, \dots, u_r$ так, чтобы полином $f(x_k)$ не зависел от этих переменных. Существование такого центрального полинома доказано в пункте 1). Получим, что

$$0 \equiv f(x_k \cdot h(u_1, \dots, u_r)) \equiv f(x_k) \cdot h(u_1, \dots, u_r) \pmod{\Gamma_1}.$$

Так как $h(u_1, \dots, u_r) \notin \Gamma_1$, то из T -первичности T -идеала Γ_1 следует, что $f(x_k) \in \Gamma_1$, что и требовалось доказать.

Аналогично обосновывается включение $\Gamma_1 \cap P \subseteq \Gamma_2$.

3) Пусть теперь $[x, y, z] \in \Gamma_1$ или $[x, y, z] \in \Gamma_2$. Без ограничения общности будем считать, что $[x, y, z] \in \Gamma_2$. Тогда $[a, b] \in \Gamma'_2$, и из равенства $\Gamma'_1 \cap P = \Gamma'_2 \cap P$ получаем, что $[a, b] \in \Gamma'_1$, т.е. $[[x, y], [z, t]] \in \Gamma_1$. Несложно показать, что

$$[x_1, y_1, z_1][x_2, y_2, z_2] \in \{[[x, y], [z, t]] = 0\}^T,$$

поэтому $[x, y, z] \in \Gamma_1$.

Легко видеть, что для $j = 1, 2$ или $\Gamma_j \cap P = \{[x, y, z] = 0\}^T \cap P$, или $\Gamma_j \cap P = \{[x, y] = 0\}^T \cap P$. Так как

$$(\{[x, y, z] = 0\}^T)' \cap P \neq (\{[x, y] = 0\}^T)' \cap P,$$

то должно выполняться равенство $\Gamma_1 \cap P = \Gamma_2 \cap P$. Теорема доказана.

Отметим, что для многообразий, не являющихся первичными, теорема 3 неверна. В качестве примера рассмотрим унитарно замкнутые T -идеалы

$$\Gamma_1 = \{[x, y][z, t] = 0\}^T, \quad \Gamma_2 = \{[x, y][z, t] = 0, [x, y, z] = 0\}^T.$$

Очевидно, что $\Gamma'_1 = \Gamma'_2 = \{xy = 0\}^T$, но $\Gamma_1 \cap P \neq \Gamma_2 \cap P$.

3. Значения центральных полиномов на алгебре $M_{1,1}$. Обозначим $\Gamma = T[M_{1,1}]$. Хорошо известно, что алгебра $M_{1,1}$ удовлетворяет тождеству

$$[[[x, y], [z, t]], v] = 0, \quad (2)$$

причем $[[x, y], [z, t]] \notin T[M_{1,1}]$. Иначе говоря, полином $[[x, y], [z, t]]$ является центральным для алгебры $M_{1,1}$.

Будем обозначать через E единицу алгебры $M_{1,1}$. Следующая лемма доказывается путем прямых вычислений.

ЛЕММА 1. 1) Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_{1,1}$. Тогда значение выражения $[[A_1, A_2], [B_1, B_2]]$ представимо в виде

$$[[A_1, A_2], [B_1, B_2]] = (a'b'' + a''b')E, \quad a', a'', b', b'' \in G_1,$$

причем элементы a' и a'' являются функциями от элементов матриц A_1 и A_2 , а элементы b' и b'' являются функциями от элементов матриц B_1 и B_2 .

2) Для произвольных $a', a'', b', b'' \in G_1$ найдутся такие матрицы $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_{1,1}$, что

$$[[A_1, A_2], [B_1, B_2]] = (a'b'' + a''b')E.$$

Напомним, что полилинейный полином $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ называется *собственным*, если $f|_{x_i=1} = 0$ в $F\langle X \rangle$ при $i = 1, \dots, n$. Заметим, что все слабые полилинейные тождества из Γ' следуют (как слабые тождества) из собственных слабых полилинейных тождеств алгебры $M_{1,1}$. Действительно, пусть $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma' \cap P$. Используя базис Шпехта, представим полином $\bar{f}$ в виде

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}_0(x_1, \dots, x_n) + \bar{f}_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n,$$

где полином $\bar{f}_0$ является собственным по переменной x_n . Тогда

$$\bar{f}_0([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]) + \bar{f}_1([x_1, y_1], \dots, [x_{n-1}, y_{n-1}])[x_n, y_n] \in \Gamma. \quad (3)$$

Подставляя в (3) $x_n = [x'_n, x''_n]$, $y_n = [y'_n, y''_n]$ и учитывая, что полином $[[x'_n, x''_n], [y'_n, y''_n]]$ является центральным для алгебры $M_{1,1}$, получаем

$$\bar{f}_1([x_1, y_1], \dots, [x_{n-1}, y_{n-1}])[[x'_n, x''_n], [y'_n, y''_n]] \in \Gamma.$$

Так как идеал Γ является T -первичным и $[[x'_n, x''_n], [y'_n, y''_n]] \notin \Gamma$, то

$$\bar{f}_1([x_1, y_1], \dots, [x_{n-1}, y_{n-1}]) \in \Gamma.$$

Из этого включения и (3) следует, что $\bar{f}_0([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]) \in \Gamma$. Итак,

$$\bar{f}_0(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma, \quad \bar{f}_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Gamma.$$

Слабое тождество $\bar{f} = 0$ является следствием слабых тождеств $\bar{f}_0 = 0$ и $\bar{f}_1 = 0$ алгебры $M_{1,1}$. Так как слабое тождество $\bar{f}_1 = 0$ зависит от меньшего числа переменных, чем $\bar{f} = 0$, то из индукционных соображений по числу переменных можно считать, что $\bar{f}_1 = 0$ является следствием собственных слабых полилинейных тождеств алгебры $M_{1,1}$. Аналогично, слабое тождество $\bar{f}_0 = 0$ может не являться собственным по

строого меньшему числу переменных, чем $\bar{f} = 0$. Поэтому из индукционных соображений так же можно считать, что $\bar{f}_0 = 0$ является следствием собственных слабых полилинейных тождеств алгебры $M_{1,1}$. В итоге слабое тождество $\bar{f} = 0$ следует из собственных слабых полилинейных тождеств алгебры $M_{1,1}$.

Пусть U – произвольный T -первичный T -идеал со свойствами $\Gamma \subset U$, $\Gamma \cap P \neq U \cap P$.

По теореме 3 имеем $(U' \cap P) \setminus (\Gamma' \cap P) \neq \emptyset$, поэтому из доказанного выше следует, что множество $(U' \cap P) \setminus (\Gamma' \cap P)$ содержит собственное полилинейное слабое тождество $\bar{f} = 0$. Из (2) вытекает, что алгебра $M_{1,1}$ удовлетворяет слабому тождеству $[x, y, z] = 0$. Поэтому, раскладывая $\bar{f} = 0$ по базису Шпехта, получаем, что полином $\bar{f}$ представляется в виде

$$\bar{f} \equiv \sum_{\pi \in S_{2n}} \alpha_{\pi} [x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}] \cdots [x_{\pi(2n-1)}, x_{\pi(2n)}] \pmod{\Gamma'}. \quad (4)$$

В частности, тождество $\bar{f} = 0$ зависит от четного числа переменных.

Обозначим $\bar{x}_i = [x'_i, x''_i]$, $i = 1, 2, \dots$. Подстановку $x'_i = x'_j$, $x''_i = x''_j$ будем для краткости обозначать $\bar{x}_i = \bar{x}_j$. Аналогично, если $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ – произвольные матрицы, то подстановку $x'_i = A'_i$, $x''_i = A''_i$ будем обозначать $\bar{x}_i = \bar{A}_i$. Таким образом, $\bar{A}_i = [A'_i, A''_i]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть полином $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ *2-полиномом*, если степени полинома $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = g(x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$ по всем переменным равны 2 и полином g является линейной комбинацией слагаемых

$$[\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}] \cdots [\bar{x}_{i_{2n-1}}, \bar{x}_{i_{2n}}], \quad i_1, \dots, i_{2n} \in \{1, \dots, n\}.$$

Отметим, что произведение нескольких 2-полиномов, зависящих от непересекающихся наборов переменных, является 2-полиномом. Следующая лемма является основным техническим утверждением работы.

ЛЕММА 2. *Множество $U \setminus \Gamma$ содержит 2-полином $h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, в котором n кратно 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на несколько шагов.

1) Посчитаем значение полинома

$$[\bar{x}_{\pi(1)}, \bar{x}_{\pi(2)}] \cdots [\bar{x}_{\pi(2n-1)}, \bar{x}_{\pi(2n)}], \quad \pi \in S_{2n}, \quad (5)$$

при подстановке $\bar{x}_i = \bar{A}_i$, где $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ – произвольные матрицы. По лемме 1 это значение равно

$$(a'_{\pi(1)} a''_{\pi(2)} + a''_{\pi(1)} a'_{\pi(2)}) \cdots (a'_{\pi(2n-1)} a''_{\pi(2n)} + a''_{\pi(2n-1)} a'_{\pi(2n)}) E, \quad (6)$$

где $a'_i, a''_i \in G_1$. При этом для произвольных $a'_i, a''_i \in G_1$ найдутся такие матрицы $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$, что значение полинома (5) при рассматриваемой подстановке будет равно (6).

Пусть $M \subset \{1, \dots, 2n\}$, $|M| = n$, $\bar{M} = \{1, \dots, 2n\} \setminus M$. Обозначим

$$\omega_M = \prod_{i \in M} a'_i \cdot \prod_{j \in \bar{M}} a''_j \cdot E, \quad (7)$$

где для определенности считаем, что в каждом из произведений $\prod a'_i$ и $\prod a''_j$ индексы у элементов a'_i и a''_j идут в порядке возрастания. С учетом того, что элементы пространства G_1 антикоммутируют между собой, (6) можно представить в виде линейной комбинации слагаемых ω_M . Отсюда следует, что значение полинома

$$h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2n}) = \sum_{\pi \in S_{2n}} \alpha_\pi [\bar{x}_{\pi(1)}, \bar{x}_{\pi(2)}] \cdots [\bar{x}_{\pi(2n-1)}, \bar{x}_{\pi(2n)}] \quad (8)$$

при произвольной подстановке $\bar{x}_i = \bar{A}_i$, где $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$, будет равно $\sum_M \beta_M \omega_M$ для некоторых $\beta_M \in F$. При этом коэффициенты β_M не зависят от матриц $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$, а элементы $a'_i, a''_i \in G_1$ можно сделать любыми наперед заданными за счет выбора матриц A'_i, A''_i .

2) Пусть $0 \leq 2s \leq 2n$, $r = n - s$. Рассмотрим полином

$$\tilde{h}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2s}, \bar{x}_{2s+1}, \dots, \bar{x}_{2s+r}) = h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2s}, \bar{x}_{2s+1}, \dots, \bar{x}_{2s+r}, \dots, \bar{x}_{2s+1}, \dots, \bar{x}_{2s+r}). \quad (9)$$

Выясним, чему равно значение полинома $\tilde{h}$ при подстановке $\bar{x}_i = \bar{A}_i$, $i = 1, \dots, 2s+r$, где $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ – произвольные матрицы.

Для этого положим в (6) $a'_{2s+i+r} = a'_{2s+i}$, $a''_{2s+i+r} = a''_{2s+i}$, $i = 1, \dots, r$. Для произвольных $a, b_1, \dots, b_k \in G_1$ выполняется равенство $ab_1 \cdots b_k a = 0$. Поэтому если в произведении (6) после подстановки $a'_{2s+i+r} = a'_{2s+i}$, $a''_{2s+i+r} = a''_{2s+i}$ встретятся два одинаковых элемента a'_k или a''_k , то результат будет равен нулю. Пусть

$$\mathcal{N} = \{N \subset \{1, \dots, 2s\} \mid |N| = s\}.$$

Для $N \in \mathcal{N}$ положим $\bar{N} = \{1, \dots, 2s\} \setminus N$ (если $s = 0$, то $\mathcal{N} = \{\emptyset\}$, $\bar{\emptyset} = \emptyset$). Обозначим

$$\nu_N = \prod_{i \in N} a'_i \cdot \prod_{j \in \bar{N}} a''_j \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E,$$

где для определенности считаем, что в каждом из произведений $\prod a'_i$ и $\prod a''_j$ индексы у элементов a'_i и a''_j идут в порядке возрастания. Из вышесказанного следует, что значение полинома $\tilde{h}$ при подстановке $\bar{x}_i = \bar{A}_i$ будет равно $\sum_N \gamma_N \nu_N$ для некоторых $\gamma_N \in F$. При этом коэффициенты γ_N не зависят от матриц A'_i, A''_i , а элементы $a'_i, a''_i \in G_1$ могут принимать произвольные значения.

В частности, при $s = 0$ получаем, что значение любого 2-полинома $\tilde{h}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ равно $\prod_{k=1}^n (a'_k a''_k) \cdot E$.

3) Полином (9) является тождеством алгебры $M_{1,1}$ тогда и только тогда, когда при любом выборе $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ будет выполнено равенство $\sum_N \gamma_N \nu_N = 0$. Это равносильно тому, что $\gamma_N = 0$ при всех $N \in \mathcal{N}$. В самом деле, предположим от противного, что $\gamma_{N_0} \neq 0$ для некоторого $N_0 \in \mathcal{N}$. Можно выбрать матрицы $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ так, чтобы $a'_i = 0$ при $i \in \{1, \dots, 2s\} \setminus N_0$, $a''_i = 0$ при $i \in \{1, \dots, 2s\} \setminus \bar{N}_0$ и произведение ν_{N_0} не равнялось бы нулю. При такой подстановке при $N \neq N_0$ все элементы ν_N будут равны нулю. Поэтому значение полинома $\tilde{h}$ будет равно $\gamma_{N_0} \nu_{N_0} \neq 0$ – противоречие.

4) Допустим, что $\tilde{h} \in U \setminus \Gamma$, $2s \geq 2$, $\tilde{h}(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{2s+r}) = \sum_N \gamma_N \nu_N$. Тогда по пункту 3) имеем $\gamma_{N_0} \neq 0$ для некоторого $N_0 \in \mathcal{N}$. Переименовывая в случае необходимости переменные, без ограничения общности можно считать, что

$$N_0 = \{1, 3, 4, \dots, s+1\}, \quad \bar{N}_0 = \{2, s+2, s+3, \dots, 2s\}.$$

Рассмотрим два полинома

$$h_1 = \tilde{h}(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{2s}, \dots, \bar{x}_{2s+r}), \quad h_2 = \tilde{h}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{2s}, \dots, \bar{x}_{2s+r})[\bar{x}_1, \bar{x}_2].$$

Ясно, что $h_1, h_2 \in U$. Докажем, что или $h_1 \notin \Gamma$, или $h_2 \notin \Gamma$.

Для этого разобьем множество $\mathcal{N}$ на четыре подмножества:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \{N \in \mathcal{N} \mid 1 \in N, 2 \in \bar{N}\}, & \mathcal{N}_2 &= \{N \in \mathcal{N} \mid 1 \in \bar{N}, 2 \in N\}, \\ \mathcal{N}_3 &= \{N \in \mathcal{N} \mid 1 \in N, 2 \in N\}, & \mathcal{N}_4 &= \{N \in \mathcal{N} \mid 1 \in \bar{N}, 2 \in \bar{N}\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{M} = \{M \subset \{3, 4, \dots, 2s\} \mid |M| = s-1\}.$$

Если $M \in \mathcal{M}$, то обозначим $\bar{M} = \{3, 4, \dots, 2s\} \setminus M$.

а) Допустим, что $h_1 \in \Gamma$.

Если $N \in \mathcal{N}_3$ или если $N \in \mathcal{N}_4$, то $\nu_N|_{a'_2=a'_1, a''_2=a''_1} = 0$.

Если $N \in \mathcal{N}_1$, то

$$\begin{aligned} & \nu_N|_{a'_2=a'_1, a''_2=a''_1} \\ &= \left(a'_1 \cdot \left(\prod_{i \in N \setminus \{1\}} a'_i \right) \cdot a''_2 \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{2\}} a''_j \right) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E \right) \Big|_{a'_2=a'_1, a''_2=a''_1} \\ &= (-1)^{3(s-1)} \left(\prod_{i \in N \setminus \{1\}} a'_i \right) \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{2\}} a''_j \right) \cdot (a'_1 a''_1) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E. \end{aligned}$$

Если $N \in \mathcal{N}_2$, то

$$\begin{aligned} & \nu_N|_{a'_2=a'_1, a''_2=a''_1} \\ &= \left(a'_2 \cdot \left(\prod_{i \in N \setminus \{2\}} a'_i \right) \cdot a''_1 \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{1\}} a''_j \right) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E \right) \Big|_{a'_2=a'_1, a''_2=a''_1} \\ &= (-1)^{3(s-1)} \left(\prod_{i \in N \setminus \{2\}} a'_i \right) \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{1\}} a''_j \right) \cdot (a'_1 a''_1) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E. \end{aligned}$$

Из вышенаписанных формул следует, что

$$\begin{aligned} h_1|_{\bar{x}_i=\bar{A}_i} &= \tilde{h}(\bar{A}_1, \bar{A}_1, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_{2s}, \dots, \bar{A}_{2s+r}) \\ &= (-1)^{3(s-1)} \sum_{M \in \mathcal{M}} (\gamma_{M \cup \{1\}} + \gamma_{M \cup \{2\}}) \\ &\quad \times \left(\prod_{i \in M} a'_i \right) \cdot \left(\prod_{j \in \bar{M}} a''_j \right) \cdot (a'_1 a''_1) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично пункту 3), получаем, что $h_1 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\gamma_{M \cup \{1\}} + \gamma_{M \cup \{2\}} = 0$ для всех $M \in \mathcal{M}$. В частности, при $M = \{3, 4, \dots, s+1\}$ должно выполняться

$$\gamma_{\{1,3,4,\dots,s+1\}} + \gamma_{\{2,3,4,\dots,s+1\}} = 0. \quad (10)$$

б) Допустим, что $h_2 \in \Gamma$.

Если $N \in \mathcal{N}_3$ или если $N \in \mathcal{N}_4$, то $\nu_N \cdot (a'_1 a''_2 + a''_1 a'_2) = 0$.

Если $N \in \mathcal{N}_1$, то

$$\begin{aligned} & \nu_N \cdot (a'_1 a''_2 + a''_1 a'_2) \\ &= \left(a'_1 \cdot \left(\prod_{i \in N \setminus \{1\}} a'_i \right) \cdot a''_2 \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{2\}} a''_j \right) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E \right) \cdot (a'_1 a''_2 + a''_1 a'_2) \\ &= (-1)^{3(s-1)+2} \left(\prod_{i \in N \setminus \{1\}} a'_i \right) \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{2\}} a''_j \right) \cdot (a'_1 a''_1) \cdot (a'_2 a''_2) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E. \end{aligned}$$

Если $N \in \mathcal{N}_2$, то

$$\begin{aligned} & \nu_N \cdot (a'_1 a''_2 + a''_1 a'_2) \\ &= \left(a'_2 \cdot \left(\prod_{i \in N \setminus \{2\}} a'_i \right) \cdot a''_1 \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{1\}} a''_j \right) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E \right) \cdot (a'_1 a''_2 + a''_1 a'_2) \\ &= (-1)^{3(s-1)+3} \left(\prod_{i \in N \setminus \{1\}} a'_i \right) \cdot \left(\prod_{j \in \bar{N} \setminus \{2\}} a''_j \right) \cdot (a'_1 a''_1) \cdot (a'_2 a''_2) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E. \end{aligned}$$

Из вышенаписанных формул следует, что

$$\begin{aligned} h_2|_{\bar{x}_i = \bar{A}_i} &= \tilde{h}(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_{2s}, \dots, \bar{A}_{2s+r})[\bar{A}_1, \bar{A}_2] \\ &= (-1)^{3(s-1)+2} \sum_{M \in \mathcal{M}} (\gamma_{M \cup \{1\}} - \gamma_{M \cup \{2\}}) \cdot \left(\prod_{i \in M} a'_i \right) \cdot \left(\prod_{j \in \bar{M}} a''_j \right) \\ &\quad \times (a'_1 a''_1) \cdot (a'_2 a''_2) \cdot \prod_{k=2s+1}^{2s+r} (a'_k a''_k) \cdot E. \end{aligned}$$

Снова рассуждая аналогично пункту 3), получаем, что $h_2 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\gamma_{M \cup \{1\}} - \gamma_{M \cup \{2\}} = 0$ для всех $M \in \mathcal{M}$. В частности, при $M = \{3, 4, \dots, s+1\}$ должно выполняться

$$\gamma_{\{1,3,4,\dots,s+1\}} - \gamma_{\{2,3,4,\dots,s+1\}} = 0. \quad (11)$$

в) Из (10) и (11) следует, что $2\gamma_{N_0} = 0$, откуда $\gamma_{N_0} = 0$. Это противоречит условию $\gamma_{N_0} \neq 0$.

Итак, или $h_1 \notin \Gamma$, или $h_2 \notin \Gamma$. Если $h_1 \notin \Gamma$, то положим $\tilde{h}' = h_1$, а если $h_2 \notin \Gamma$, то положим $\tilde{h}' = h_2$. Тогда $\tilde{h}' \in U \setminus \Gamma$, причем полином $\tilde{h}'$ имеет вид (9), но с другими значениями n, s, r . При этом полином $\tilde{h}'$ полилинеен по строго меньшему числу переменных, чем полином $\tilde{h}$. Тем самым, мы можем уменьшать значение параметра s .

5) Из (4) следует, что множество $U \setminus \Gamma$ содержит полилинейный полином

$$\sum_{\pi \in S_{2n}} \alpha_\pi [\bar{x}_{\pi(1)}, \bar{x}_{\pi(2)}] \cdots [\bar{x}_{\pi(2n-1)}, \bar{x}_{\pi(2n)}].$$

Применим к этому полиному несколько раз конструкцию из пункта 4). Получим в итоге 2-полином $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, принадлежащий множеству $U \setminus \Gamma$.

6) Если n четно, то лемма доказана. Если n нечетно, то рассмотрим 2-полином

$$h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot g(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n).$$

Ясно, что $h \in U$. Так как T -идеал Γ является T -первичным, то $h \notin \Gamma$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть U – произвольный T -идеал со свойствами $T[M_{1,1}] \cap P \neq U \cap P$, $T[M_{1,1}] \subset U$. Тогда для некоторого n

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2]^2 \cdots [\bar{x}_{2n-1}, \bar{x}_{2n}]^2 \in U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 множество $U \setminus \Gamma$ содержит некоторый 2-полином $h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2n})$.

Пусть $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ – произвольные матрицы. В пункте 2) доказательства леммы 2 мы видели, что для некоторого $\beta \in F$, не зависящего от A'_i, A''_i , имеет место равенство

$$h(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{2n}) = \beta \prod_{i=1}^{2n} (a'_i a''_i).$$

Так как

$$[\bar{A}_i, \bar{A}_j]^2 = (a'_i a''_j + a''_i a'_j)^2 = 2a'_i a''_j a''_i a'_j = 2(a'_i a''_i)(a'_j a''_j),$$

то

$$[\bar{A}_1, \bar{A}_2]^2 \cdots [\bar{A}_{2n-1}, \bar{A}_{2n}]^2 = 2^n \prod_{i=1}^{2n} (a'_i a''_i).$$

Положим $\alpha = \beta/2^n$, тогда

$$h(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{2n}) = \alpha [\bar{A}_1, \bar{A}_2]^2 \cdots [\bar{A}_{2n-1}, \bar{A}_{2n}]^2.$$

Так как матрицы $A'_i, A''_i \in M_{1,1}$ произвольны, то последнее равенство в точности означает, что

$$h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2n}) \equiv \alpha [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^2 \cdots [\bar{x}_{2n-1}, \bar{x}_{2n}]^2 \pmod{\Gamma}.$$

Поскольку $h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2n}) \notin \Gamma$, имеем $\alpha \neq 0$. Так как $\Gamma \subset U$ и $h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2n}) \in U$, то

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2]^2 \cdots [\bar{x}_{2n-1}, \bar{x}_{2n}]^2 \in U.$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Очевидно, что теорема 2 сразу же вытекает из леммы 3 и следующей леммы.

ЛЕММА 4. Если характеристика поля F не равна 2, то T -идеал

$$\{[[x, y], [z, t], v] = 0, [[x, y], [z, t]]^2 = 0\}^T$$

содержит тождество

$$[x_1, y_1, z_1] \cdots [x_{17}, y_{17}, z_{17}] = 0.$$

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству леммы 4. Но сначала сделаем одно замечание. Так как $[[x, y], [z, t]]^2 \notin T[M_{1,1}]$, то из полной классификации первичных многообразий над полем нулевой характеристики (см. введение) и теоремы Кемера о нильпотентности T -полупервичных T -идеалов в нулевой характеристике (также см. введение) следует, что если $\text{char } F = 0$, то для некоторого числа n

$$[x_1, y_1, z_1] \cdots [x_n, y_n, z_n] \in \{[[x, y], [z, t]]^2 = 0\}^T.$$

Ясно, что тогда это включение будет выполнено над полями характеристики $p > 0$ для всех *достаточно больших* p . Тем самым, лемма 4 (в формулировке надо заметить число 17 на число n) верна для всех достаточно больших p .

К сожалению, эти рассуждения не проходят для *произвольной* характеристики $p \neq 2$. Поэтому мы вынуждены доказывать лемму 4 при помощи достаточно длинных прямых вычислений. Эти вычисления содержатся в пяти вспомогательных леммах. При их доказательстве многократно используется хорошо известный факт: если V – произвольный T -идеал над бесконечным полем и выполнено $f(x_1, \dots, x_n)g(y_1, \dots, y_m) \in V$, то $f(x_1, \dots, x_n)zg(y_1, \dots, y_m) \in V$.

ЛЕММА 5. *Над полем произвольной характеристики выполнено включение*

$$[x_1, y_1, z_1][x_2, y_2, z_2][x_3, y_3, z_3] \in V = \{[[a, b], [x, y, z]] = 0\}^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем подстановку $b = uv$ в тождество $[[x, y, z], [a, b]] = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv u[[x, y, z], [a, v]] + [x, y, z, u][a, v] + [a, u][x, y, z, v] + [[x, y, z], [a, u]]v \\ &\equiv [x, y, z, u][a, v] + [a, u][x, y, z, v] \pmod{V}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $u = [b, c]$ и умножая на (-1) , получаем

$$[b, c, a][x, y, z, v] \in V.$$

В [5; лемма 3] было показано, что над произвольным полем

$$[x_2, y_2, z_2][x_3, y_3, z_3] \in \{[x, y, z, v] = 0\}^T.$$

Из двух последних включений немедленно следует доказательство леммы.

ЛЕММА 6. *Если характеристика поля F не равна 2, то полином*

$$[c, [z, t]][b, [z, t]] \cdot [[b_1, b_2], [d_1, d_2, d_3]] \cdot [[a_1, a_2], [c_1, c_2, c_3]]$$

лежит в T -идеале

$$V = \{[[x, y], [z, t], v] = 0, [[x, y], [z, t]]^2 = 0\}^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеаризуя тождество $[[x, y], [z, t]]^2 = 0$ по переменной x , используя тождество (2) и сокращая на 2, получаем

$$[[a, y], [z, t]][[b, y], [z, t]] \equiv 0 \pmod{V}.$$

Линеаризуем это тождество по переменной y :

$$[[a, y_1], [z, t]][[b, y_2], [z, t]] + [[a, y_2], [z, t]][[b, y_1], [z, t]] \equiv 0 \pmod{V}. \quad (12)$$

Подставим в (12) $a = [a_1, a_2]$, $y_1 = [x, y]$ и заметим, что первое слагаемое в (12) после такой подстановки будет принадлежать V . Следовательно,

$$[[a_1, a_2, y_2], [z, t]][[b, [x, y]], [z, t]] \equiv 0 \pmod{V}.$$

Умножая это равенство на (-1) и переименовывая переменные, получаем

$$[[a_1, a_2, a_3], [z, t]][[b_1, b_2, b_3], [z, t]] \equiv 0 \pmod{V}. \quad (13)$$

Обозначим для краткости $\bar{z} = [z, t]$, $\bar{a} = [a_1, a_2]$, $S = [b_1, b_2, b_3, \bar{z}]$. Подставим в (13) $a_3 = cb$. Получим

$$0 \equiv c[\bar{a}, b, \bar{z}]S + [c, \bar{z}][\bar{a}, b]S + [\bar{a}, c][b, \bar{z}]S + [\bar{a}, c, \bar{z}]bS \pmod{V}. \quad (14)$$

По (13) первое слагаемое в (14) лежит в V . Так как $[b, S] \in V$, то снова по (13) последнее слагаемое в (14) лежит в V . Таким образом,

$$0 \equiv [c, \bar{z}][\bar{a}, b]S + [\bar{a}, c][b, \bar{z}]S \pmod{V}. \quad (15)$$

Подставим в (15) $b = [c_1, c_2, c_3]$. Из (13) следует, что после этой подстановки последнее слагаемое в (15) будет лежать в V . Учитывая, что S является центральным элементом по модулю V , получаем

$$0 \equiv [c, \bar{z}][b_1, b_2, b_3, \bar{z}] \cdot [\bar{a}, [c_1, c_2, c_3]] \pmod{V}. \quad (16)$$

Теперь обозначим $P = [c, \bar{z}]$, $Q = [\bar{a}, [c_1, c_2, c_3]]$. Аналогично, подставляя в (16) $b_3 = bd$, имеем

$$0 \equiv Pb[b_1, b_2, d, \bar{z}]Q + P[b, \bar{z}][b_1, b_2, d]Q + P[b_1, b_2, b][d, \bar{z}]Q + P[b_1, b_2, b, \bar{z}]dQ \pmod{V}. \quad (17)$$

Из (16) следует, что последнее слагаемое в (17) лежит в V . Так как по тождеству (2) b коммутирует с $[b_1, b_2, d, \bar{z}]$ по модулю V , то из (16) так же следует, что первое слагаемое в (17) лежит в V . Следовательно,

$$0 \equiv P[b, \bar{z}][b_1, b_2, d]Q + P[b_1, b_2, b][d, \bar{z}]Q \pmod{V}. \quad (18)$$

Подставим в (18) $d = [d_1, d_2, d_3]$. Элемент $[d_1, d_2, d_3, \bar{z}]$ является центральным по модулю V и по (16) $P[[d_1, d_2, d_3], T]fQ \equiv 0 \pmod{V}$ для любого $f \in F\langle X \rangle \cup \{1\}$. Поэтому при такой подстановке последнее слагаемое в (18) будет лежать в V . Таким образом, возвращаясь к старым обозначениям, получаем из (18)

$$0 \equiv [c, \bar{z}][b, \bar{z}] \cdot [[b_1, b_2], [d_1, d_2, d_3]] \cdot [[a_1, a_2], [c_1, c_2, c_3]] \pmod{V},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7. *Над полем произвольной характеристики полином*

$$[[x_1, x_2], [v_1, v_2, v_3]]([\bar{a}, u][\bar{c}, v] + [\bar{c}, u][\bar{a}, v])[y_1, y_2], [u_1, u_2, u_3]]$$

лежит в T -идеале

$$V = \{[[x, y], [z, t], v] = 0, [x, y, a][x, y, b] = 0\}^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеаризуем тождество $[x, y, a][x, y, b] = 0$ по переменным x и y :

$$0 \equiv [x_1, y_1, a][x_2, y_2, b] + [x_2, y_2, a][x_1, y_1, b] \\ + [x_1, y_2, a][x_2, y_1, b] + [x_2, y_1, a][x_1, y_2, b] \pmod{V}.$$

Подставим в полученный полином $x_1 = [x_1, x_2]$, $y_1 = [y_1, y_2]$, $x_2 = y_3$, $y_2 = x_3$. Заметим, что результаты такой подстановки в первое и второе слагаемое по тождеству (2) будут лежать в V . Умножая на (-1) , получаем

$$0 \equiv [x_1, x_2, x_3, a][y_1, y_2, y_3, b] + [y_1, y_2, y_3, a][x_1, x_2, x_3, b] \pmod{V}.$$

Подставим сюда $a = \bar{a}$, $b = \bar{c}$ и воспользуемся тождеством (2):

$$0 \equiv [x_1, x_2, x_3, \bar{a}][y_1, y_2, y_3, \bar{c}] + [x_1, x_2, x_3, \bar{c}][y_1, y_2, y_3, \bar{a}] \pmod{V}. \quad (19)$$

Обозначим для краткости $S = [y_1, y_2, y_3, \bar{c}]$, $T = [y_1, y_2, y_3, \bar{a}]$, $\bar{x} = [x_1, x_2]$ и сделаем в (19) подстановку $x_3 = uv$:

$$0 \equiv u[\bar{x}, v, \bar{a}]S + [u, \bar{a}][\bar{x}, v]S + [\bar{x}, u][v, \bar{a}]S + [\bar{x}, u, \bar{a}]vS \\ + u[\bar{x}, v, \bar{c}]T + [u, \bar{c}][\bar{x}, v]T + [\bar{x}, u][v, \bar{c}]T + [\bar{x}, u, \bar{c}]vT \pmod{V}. \quad (20)$$

Заметим, что в (20) сумма первого и пятого слагаемого лежит в V по (19). Кроме того, элементы $[\bar{x}, u, \bar{a}]$ и $[\bar{x}, u, \bar{c}]$ являются центральными по модулю V . Поэтому снова по (19) сумма четвертого и восьмого слагаемого в (20) лежит в V . Далее, подставим в (20) $v = [v_1, v_2, v_3]$. Результат этой подстановки в сумму третьего и седьмого слагаемого в (20) будет лежать в V по тождеству (19). Таким образом,

$$0 \equiv [u, \bar{a}][\bar{x}, [v_1, v_2, v_3]]S + [u, \bar{c}][\bar{x}, [v_1, v_2, v_3]]T \pmod{V}.$$

Учитывая, что полином $[\bar{x}, [v_1, v_2, v_3]]$ является центральным по модулю V , получаем

$$0 \equiv [[x_1, x_2], [v_1, v_2, v_3]]([u, \bar{a}][y_1, y_2, y_3, \bar{c}] + [u, \bar{c}][y_1, y_2, y_3, \bar{a}]) \pmod{V}. \quad (21)$$

Выражение в правой части (21) отличается от (19) тем, что мы “заменяли” коммутатор $[x_1, x_2, x_3]$ на переменную u , но при этом появился (центральный по модулю V) множитель $[[x_1, x_2], [v_1, v_2, v_3]]$. Прделаем теперь совершенно аналогичные преобразования по “замене” в (21) коммутатора $[y_1, y_2, y_3]$ на переменную v с образованием еще одного множителя $[[y_1, y_2], [u_1, u_2, u_3]]$. В итоге получим

$$[[x_1, x_2], [v_1, v_2, v_3]]([\bar{a}, u][\bar{c}, v] + [\bar{c}, u][\bar{a}, v])[y_1, y_2], [u_1, u_2, u_3]] \in V,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 8. *Над полем произвольной характеристики полином*

$$[\bar{c}, \bar{x}] \cdot ([\bar{u}, \bar{v}][a, b] - [\bar{u}, b][\bar{v}, a])$$

лежит в T -идеале

$$V = \{[[x, y], [z, t], v] = 0, [\bar{a}, u][\bar{c}, v] + [\bar{c}, u][\bar{a}, v] = 0\}^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По модулю V выполняются тождества

$$[\bar{a}, x][\bar{c}, y] + [\bar{c}, x][\bar{a}, y] \equiv 0, \quad (22)$$

$$[\bar{a}, \bar{c}]f \equiv f[\bar{a}, \bar{c}], \quad f \in F\langle X \rangle \cup \{1\}. \quad (23)$$

Сделаем подстановку $b = ub$ в тождество

$$[a, b, \bar{x}][\bar{c}, y] + [\bar{c}, \bar{x}][a, b, y] \equiv 0 \pmod{V}$$

и преобразуем:

$$\begin{aligned} 0 \equiv & u[a, b, \bar{x}][\bar{c}, y] + [u, \bar{x}][a, b][\bar{c}, y] + [a, u][b, \bar{x}][\bar{c}, y] + [a, u, \bar{x}]b[\bar{c}, y] \\ & + [\bar{c}, \bar{x}]u[a, b, y] + [\bar{c}, \bar{x}][u, y][a, b] + [\bar{c}, \bar{x}][a, u][b, y] + [\bar{c}, \bar{x}][a, u, y]b \pmod{V}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставим в (24) $u = a$. При этом третье, четвертое, седьмое и восьмое слагаемые в (24) станут нулевыми. Далее, элемент $[\bar{c}, \bar{x}]$ будет центральным по модулю V по тождеству (23), поэтому сумма первого и пятого слагаемого в (24) будет лежать в V по (22). Таким образом,

$$0 \equiv [a, \bar{x}][a, b][\bar{c}, y] + [\bar{c}, \bar{x}][a, y][a, b] \pmod{V}.$$

Подставляя в это тождество $b = v$, $y = b$ и линеаризуя по переменной a , получаем

$$0 \equiv [u, \bar{x}][a, v][\bar{c}, b] + [a, \bar{x}][u, v][\bar{c}, b] + [\bar{c}, \bar{x}][u, b][a, v] + [\bar{c}, \bar{x}][a, b][u, v] \pmod{V}.$$

Теперь подставим $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$:

$$0 \equiv [\bar{u}, \bar{x}][a, \bar{v}][\bar{c}, b] + [a, \bar{x}][\bar{u}, \bar{v}][\bar{c}, b] + [\bar{c}, \bar{x}][\bar{u}, b][a, \bar{v}] + [\bar{c}, \bar{x}][a, b][\bar{u}, \bar{v}] \pmod{V}. \quad (25)$$

Выделим в первом и втором слагаемом в (25) множитель $[\bar{c}, \bar{x}]$ по модулю V следующим образом:

$$\begin{aligned} [\bar{u}, \bar{x}][a, \bar{v}][\bar{c}, b] &\stackrel{(23)}{\equiv} [a, \bar{v}][\bar{u}, \bar{x}][\bar{c}, b] \stackrel{(22)}{\equiv} -[a, \bar{v}][\bar{c}, \bar{x}][\bar{u}, b] \stackrel{(23)}{\equiv} -[\bar{c}, \bar{x}][a, \bar{v}][\bar{u}, b], \\ [a, \bar{x}][\bar{u}, \bar{v}][\bar{c}, b] &= [\bar{x}, a][\bar{v}, \bar{u}][\bar{c}, b] \stackrel{(22)}{\equiv} -[\bar{v}, a][\bar{x}, \bar{u}][\bar{c}, b] \\ &= [\bar{v}, a][\bar{u}, \bar{x}][\bar{c}, b] \stackrel{(22)}{\equiv} -[\bar{v}, a][\bar{c}, \bar{x}][\bar{u}, b] \stackrel{(23)}{\equiv} -[\bar{c}, \bar{x}][\bar{v}, a][\bar{u}, b]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные равенства в (25) и вынося $[\bar{c}, \bar{x}]$ за скобку, имеем

$$0 \equiv [\bar{c}, \bar{x}](-[a, \bar{v}][\bar{u}, b] - [\bar{v}, a][\bar{u}, b] + [\bar{u}, b][a, \bar{v}] + [a, b][\bar{u}, \bar{v}]) \pmod{V},$$

$$0 \equiv [\bar{c}, \bar{x}] \cdot ([\bar{u}, \bar{v}][a, b] - [\bar{u}, b][\bar{v}, a]) \pmod{V},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 9. Над полем произвольной характеристики полином

$$[\bar{u}, \bar{v}] \cdot [a, x, y]$$

лежит в T -идеале

$$V = \{[x, y], [z, t], v = 0, [\bar{u}, \bar{v}][a, b] - [\bar{u}, b][\bar{v}, a]\}^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в тождество

$$[\bar{u}, b][\bar{v}, a] \equiv [\bar{u}, \bar{v}][a, b] \pmod{V} \quad (26)$$

$b = xy$, получаем с использованием (23) тождество по модулю V

$$x[\bar{u}, y][\bar{v}, a] + [\bar{u}, x]y[\bar{v}, a] \equiv x[\bar{u}, \bar{v}][a, y] + [\bar{u}, \bar{v}][a, x]y.$$

Отсюда с учетом (26) имеем по модулю V

$$[\bar{u}, x]y[\bar{v}, a] \equiv [\bar{u}, \bar{v}][a, x]y. \quad (27)$$

Совершенно аналогично устанавливается, что по модулю V

$$[\bar{u}, x]y[\bar{v}, a] \equiv [\bar{u}, \bar{v}]y[a, x]. \quad (28)$$

Вычитая из тождества (27) тождество (28), получаем $[\bar{u}, \bar{v}][a, x, y] \in V$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Применяя последовательно леммы 6, 7, 8, 9 получаем, что по модулю T -идеала

$$W = \{[[x, y], [z, t], v] = 0, [[x, y], [z, t]]^2 = 0\}^T$$

выполнено тождество

$$f_1 \cdot [[u_1, u_2], [u_3, u_4]] \cdot [[v_1, v_2], [v_3, v_4]] \cdot [x, y, z] \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \equiv 0,$$

где обозначено $f_i = [[a_i, b_i], [c_i, d_i, e_i]]$. Из леммы 5 и включения

$$[a, b, c][d, e, f] \in \{[[u_1, u_2], [u_3, u_4]]\}^T$$

следует, что

$$[x_1, y_1, z_1] \cdots [x_{17}, y_{17}, z_{17}] \in W.$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras*, Transl. Math. Monogr., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [2] A. Kemer, “Remarks on the prime varieties”, *Israel J. Math.*, **96** (1996), 341–356.
- [3] A. Kemer, “Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $\text{Var}(M_2(F))$ ”, *Algebr. Represent. Theory*, **4**:1 (2001), 87–104.
- [4] А. Я. Белов, “Ассоциативных PI -алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:6 (2003), 1239–1254.
- [5] В. Н. Латышев, “О конечной порожденности T -идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **6**:6 (1965), 1432–1434.

Л. М. Самойлов

Ульяновский государственный университет

E-mail: samoilov_l@rambler.ru

Поступило

18.02.2009