Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Костенко, Об индексе дефекта квадратичных самосопряженных операторных пучков, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 315–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:50:31

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА КВАДРАТИЧНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

А. С. Костенко

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство.

В книге Копачевского, Крейна и Нго Зуй Кана [1] при изучении задачи о конвекции в сосуде, частично заполненном жидкостью, исследуются спектральные свойства пучка Крейна, т.е. пучка вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B + \varepsilon K - I. \quad (1)$$

В [1] предполагалось, что A и B – компактные неотрицательные операторы, $K = K^*$ – компактный оператор в H , а ε – положительный параметр.

Напомним, что точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* пучка L , если найдется ненулевой вектор $x_0 \in H$ такой, что $L(\lambda_0)x_0 = 0$.

В [1] показано, что собственные значения пучка L , которые отвечают нормальным движениям вида $\exp(-\lambda x)$, находятся в правой полуплоскости, если $\varepsilon < 1/\|K\|$.

В случае, когда $\varepsilon > 1/\|K\|$, оператор $I - \varepsilon K$ может иметь конечное число κ отрицательных собственных значений. В этом случае спектр задачи уже не обязательно лежит в правой полуплоскости $\mathbb{C}_r$. А именно, оказывается, что в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l$ может возникать не более конечного числа собственных значений. Этот факт означает неустойчивость нормальных колебаний.

Напомним, что количество собственных значений пучка L , расположенных в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l$, называется *индексом неустойчивости* пучка L и обозначается $\kappa_-(L)$.

В статье Копачевского и Пивоварчика [2] было получено достаточное условие неустойчивости нормальных конвективных движений, т.е. указано число ε_2 , определяемое операторами A , B , K (причем $\text{Ker } B \neq \{0\}$), такое, что при $\varepsilon > \varepsilon_2$ индекс неустойчивости $\kappa_-(L) > 0$.

В работах Шкалика [3] и [4] исследовался операторный пучок вида

$$L(\lambda) = F\lambda^2 + (D + iG)\lambda + T,$$

где F , D , G , T – операторы в гильбертовом пространстве H , для которых выполнены следующие условия: $F = F^*$ ограничен и ограниченно обратим, $T = T^*$ ограниченно обратим, D и G – симметрические плотно определенные операторы, а T ограничен, причем $D \geq 0$. Для таких пучков в [3] и [4] при некоторых дополнительных условиях на операторы F и T получены оценки сверху для индекса неустойчивости $\kappa_-(L)$.

Наиболее близкой к настоящей статье является работа Сухочёвой [5]. Именно, в ней найдены достаточные условия на коэффициенты матричных пучков вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B - C, \quad (2)$$

обеспечивающие равенство $\kappa_-(L) = 2\kappa$. Здесь A , B , C – эрмитовы матрицы, действующие в пространстве $H = \mathbb{C}^n$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad A > 0, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \varepsilon_i^A, \quad \varepsilon_i^A \geq 0, \quad (3)$$

$$B = \|b_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad B > 0, \quad b_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}| + \varepsilon_i^B, \quad \varepsilon_i^B \geq 0, \quad (4)$$

$$C = J_\kappa = \text{diag}(I_{n-\kappa}, -I_\kappa). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть эрмитовы матрицы A , B и C удовлетворяют условиям (3), (4), (5) и определяют матричный пучок вида (2). Если спектр пучка $L_d(\lambda)$ содержится в угле

$$\Phi = \bigcap_{i=1}^n \{\Psi_i : |\text{tg } \Psi_i| \leq 2(\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B)^{1/2}\}, \quad (6)$$

то 2κ собственных значений пучка L лежат в открытой левой полуплоскости, а $2(n-\kappa)$ – в открытой правой полуплоскости.

Здесь L_d – диагональ пучка L :

$$L_d(\lambda) = \lambda \text{diag } A + \frac{1}{\lambda} \text{diag } B - J_\kappa,$$

где $\text{diag } A$ – это матрица, полученная из матрицы A “обнулением” ее внедиагональных элементов.

Будем придерживаться следующих обозначений: $\mathbb{C}_l$ (соответственно $\mathbb{C}_r$) – открытая левая (соответственно правая) полуплоскость; $\kappa_-(A)$ (соответственно $\kappa_-(L)$) – количество собственных значений оператора A (соответственно пучка L), находящихся в $\mathbb{C}_l$.

В настоящей работе находятся простые достаточные условия, обеспечивающие равенство $\kappa_-(L) = 2\kappa$, а также э-дихотомичность пучка вида (2). При этом наш подход отличен от подходов, применявшихся в перечисленных работах [1], [2], [4] и [5].

Для доказательства основного результата нам понадобится следующее обобщение критерия Сильвестра (см., например, [6]):

ЛЕММА 1. Пусть $A = A^*$ – ограниченный оператор в $H = H_1 \oplus H_2$, имеющий следующее блочное представление:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

причем $A_{ij} = A_{ji}^*$. Предположим, что операторы $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) оператор A_{11} обратим и $\kappa_-(A_{11}) = m$;
- 2) $\kappa_-(A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12}) = n$.

Тогда $\kappa_-(A) = m + n$.

Напомним (см. [7]), что оператор (пучок) называют *э-дихотомическим*, если его спектр не пересекается с мнимой осью.

Следующая теорема – основной результат заметки.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A , B и C – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H , а L – квадратичный пучок вида

$$L(\lambda) = \lambda^2 A - \lambda C + B. \quad (7)$$

Пусть также операторы A , B положительно определены, а C обратим и $\kappa_-(C) = \kappa$. Если оператор

$$R_0 := CA^{-1}C - B \quad (8)$$

положительно определен, то пучок L является *э-дихотомическим* и $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор A положительно определен, то $\sigma(L) = \sigma(\tilde{L})$, где $\tilde{L}(\lambda)$ – пучок, имеющий вид

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda CA^{-1} + BA^{-1}. \quad (9)$$

Легко видеть, что линейризатор пучка $\tilde{L}(\lambda)$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ BA^{-1} & CA^{-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

причем $\sigma(\tilde{L}) = \sigma(T)$.

По теореме Ляпунова [7] для доказательства равенства $\kappa_-(L) = 2\kappa$ и *э-дихотомичности* пучка L достаточно указать оператор $W = W^*$ такой, что $\kappa_-(W) = 2\kappa$ и оператор $\operatorname{Re}(WT)$ положительно определен.

Покажем, что оператор

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A^{-1}CA^{-1} & \frac{1}{2}A^{-1} \\ \frac{1}{2}A^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

обладает требуемыми свойствами.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \kappa_-\left(\frac{1}{2}A^{-1}CA^{-1}\right) &= \kappa_-\left(\frac{1}{2}C\right) = \kappa, \\ \kappa_-\left(C^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}\left(\frac{1}{2}A^{-1}CA^{-1}\right)^{-1}\frac{1}{2}A^{-1}\right) &= \kappa_-(C) = \kappa. \end{aligned}$$

По лемме 1 $\kappa_-(W) = 2\kappa$.

Далее, из (10) и (11) вытекает равенство

$$2 \operatorname{Re}(WT) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A^{-1}BA^{-1} & \frac{1}{2}A^{-1}BC^{-1} \\ \frac{1}{2}C^{-1}BA^{-1} & \frac{1}{2}A^{-1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Покажем, что оператор $\operatorname{Re}(WT)$ положительно определен. Так как $A^{-1}BA^{-1} \gg 0$, то в силу критерия Сильвестра достаточно показать, что оператор $\tilde{R}_0 := A^{-1} - C^{-1}BC^{-1}$ положительно определен. Но это условие эквивалентно условию положительной определенности оператора R_0 вида (8).

Таким образом, по теореме Ляпунова $\kappa_-(T) = 2\kappa$ и, следовательно, $\kappa_-(L) = \kappa_-(\tilde{L}) = \kappa_-(T) = 2\kappa$.

В следующей теореме мы покажем, что в теореме 2 можно отказаться от условия положительной определенности оператора A , заменив подходящим образом условие положительной определенности оператора R_0 вида (8).

ТЕОРЕМА 3. Пусть A, B, C – самосопряженные операторы, определяющие пучок вида (7), удовлетворяют следующим условиям: A неотрицателен ($A > 0$), B положительно определен, а C ограниченно обратим и $\kappa_-(C) = \kappa$. Если операторы

$$R_\varepsilon := C(A + \varepsilon I)^{-1}C - B, \quad \varepsilon > 0, \quad (13)$$

положительно определены для всех $\varepsilon > 0$, то пучок L является э-дихотомическим и $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Докажем вначале э-дихотомичность пучка L .

Легко видеть, что $\sigma(L) = \sigma(\tilde{L})$, где

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 B^{-1/2} A B^{-1/2} - \lambda B^{-1/2} C B^{-1/2} + I. \quad (14)$$

Таким образом, можно рассматривать квадратичный пучок вида

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 \tilde{A} - \lambda \tilde{C} + I, \quad (15)$$

где $\tilde{A} = B^{-1/2} A B^{-1/2}$, $\tilde{C} = B^{-1/2} C B^{-1/2}$.

Покажем, что у этого пучка нет спектра на мнимой оси. Пусть λ – собственное значение пучка L и f – соответствующий собственный вектор.

Легко видеть, что достаточно малая окрестность нуля не содержит точек спектра пучка $\tilde{L}(\lambda)$.

Тогда

$$\begin{aligned} (\tilde{L}(\lambda)f, f) &= \lambda^2 (\tilde{A}^2 f, f) - \lambda (\tilde{C}f, f) + (f, f) = 0, \\ (\tilde{L}(\lambda)f, \tilde{A}f) &= \lambda^2 (\tilde{A}^2 f, f) - \lambda (\tilde{C}f, \tilde{A}f) + (f, \tilde{A}f) = 0, \\ (\tilde{C}f, \tilde{L}(\lambda)f) &= \lambda^2 (\tilde{C}f, \tilde{A}f) - \lambda (\tilde{C}^2 f, f) + (\tilde{C}f, f) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть теперь $\lambda = ia$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда из первого уравнения следует, что $(\tilde{C}f, f) = 0$ и $a^2 = (f, f) / (\tilde{A}f, f)$.

Далее, домножив второе уравнение на λ и прибавив к нему третье, получим

$$a^2 (\tilde{A}^2 f, f) + (\tilde{C}^2 f, f) = (\tilde{A}f, f). \quad (17)$$

Подставив вместо a^2 найденное значение, получим

$$\frac{(f, f)(\tilde{A}^2 f, f) - (\tilde{A}f, f)^2}{(\tilde{A}f, f)} + (\tilde{C}^2 f, f) = 0. \quad (18)$$

Так как оператор $\tilde{A}$ неотрицателен, то согласно неравенству Коши–Буняковского первое слагаемое в (18) неотрицательно. Так как оператор C обратим, то C^2 положительно определен. Поэтому равенство (18) возможно лишь при $f = 0$.

Легко показывается, что пучок $\tilde{L}(\lambda)$ не имеет непрерывного спектра на мнимой оси. Действительно, пусть $\lambda_0 = ia$, $a \in \mathbb{R}$, принадлежит непрерывному спектру пучка L . Тогда найдется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\|f_n\| = 1$ и $\|(L(ia)f_n)\| < 1/n$.

Далее, заменив в (16) f на f_n и повторив предыдущие выкладки, придем к неравенству

$$\left| \frac{(f_n, f_n)(\tilde{A}^2 f_n, f_n) - (\tilde{A}f_n, f_n)^2}{(\tilde{A}f_n, f_n) + (\tilde{C}^2 f_n, f_n)} \right| < \frac{M}{n}, \quad (19)$$

в котором M – некоторая положительная константа, не зависящая от n . Так как оператор $A > 0$, то первое слагаемое неотрицательно. Далее, так как оператор $\tilde{C}$ обратим, то C^2 положительно определен, т.е. существует $\delta > 0$ такое, что $(C^2 f, f) > \delta(f, f)$ для всех $f \in H$. Поэтому неравенство (19) невозможно при больших n . Таким образом, спектр пучка не пересекается с мнимой осью.

ii) Рассмотрим пучок

$$L_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2(A + \varepsilon I) - \lambda C + B. \quad (20)$$

Для пучка $\tilde{L}_\varepsilon(\lambda) = \lambda^2(A + \varepsilon I)B^{-1} - \lambda CB^{-1} + I$ линеаризатор имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} CB^{-1} & -(A + \varepsilon I)B^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Так как оператор B обратим, то, $\sigma(L_\varepsilon) = \sigma(\tilde{L}_\varepsilon) = \sigma(T_\varepsilon)$.

Из положительной определенности оператора R_ε и теоремы 2 вытекают равенство $\kappa_-(T_\varepsilon) = 2\kappa$ и э-дихотомичность пучков L_ε при всех $\varepsilon > 0$.

Так как операторы T_ε сходятся равномерно к T_0 при ε , стремящемся к 0, и являются э-дихотомическими, то из теоремы о непрерывности конечной системы изолированных собственных значений (см. [8, с. 270]) вытекает равенство $\kappa_-(L) = \kappa_-(\tilde{L}_0) = \kappa_-(T_0) = 2\kappa$, доказывающее второе утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $C^* = C$ ограниченно обратим, $A = A^* > 0$, $B = B^* > \delta I$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, — операторы, действующие в гильбертовом пространстве H . Если $\kappa_-(C) = \kappa$ и

$$\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C^{-1}\|^2 < 1, \quad (22)$$

то $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что положительная определенность оператора R_0 вида (8) эквивалентна неравенству

$$\|B^{1/2}C^{-1}A^{1/2}\| < 1. \quad (23)$$

Но это неравенство вытекает из оценки (22).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда оператор A положительно определен, а B неотрицателен, теорема 1 остается справедливой, но только с одним изменением: пучок L перестает быть э-дихотомическим (так как $L(0) = B$, а этот оператор не обратим). В этом легко убедиться, если рассмотреть следующий пучок:

$$\tilde{L}(\lambda) := \lambda^2 B - \lambda C + A. \quad (24)$$

Если число $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{L})$, то $1/\lambda_0 \in \sigma(\tilde{L})$. Применим теорему 3 к пучку $\tilde{L}$. Так как оператор C обратим и оператор R_0 положительно определен, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$A^{-1} - C^{-1}(B + \varepsilon I)C^{-1} \gg 0, \quad (25)$$

а значит,

$$C(B + \varepsilon I)^{-1}C - A \gg 0. \quad (26)$$

Таким образом, $\kappa_-(\tilde{L}) = 2\kappa$. Если $\lambda \in \mathbb{C}_l$ (соответственно $\mathbb{C}_+$), то и $1/\lambda \in \mathbb{C}_-$ (соответственно $\mathbb{C}_+$). Из вышесказанного вытекает, что $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$H = \mathbb{C}^2, \quad B = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad J = \text{diag}(1, -1), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\|A\| = 1.5$, $\|B\| = 0.5$ следовательно $\|A\| \|B\| < 1$. Таким образом, применяя следствие 1, получим $\kappa_-(L) = 2$.

Проверим условия теоремы 1. Имеем $\sigma(L_d) = \{(1 \pm i)/2; (-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$; $\Phi = \{\varphi: |\text{tg } \varphi| < \sqrt{2/3}\}$.

Легко видеть, что теорема 1 из [5] неприменима, так как $(1 + i)/2 \notin \Phi$.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$H = \mathbb{C}^2, \quad B = I, \quad J = \text{diag}(1, -1), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 \\ 0.1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\det(A) = 8.9$ и

$$R_0 = \begin{pmatrix} \frac{-5.9}{8.9} & \frac{1}{89} \\ \frac{1}{89} & \frac{-5.9}{8.9} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор R_0 не является положительно определенным, т.е. теорема 2 неприменима.

Проверим условия теоремы 1. Имеем $\sigma(L_d) = \{(1 \pm i\sqrt{11})/6; (-1 \pm i\sqrt{11})/6\}$; $\Phi = \{\varphi : |\operatorname{tg} \varphi| < \sqrt{11.6}\}$.

Легко видеть, что $\sigma(L_d) \subset \Phi$, значит, по теореме 1 $\kappa_-(L) = 2$.

Приведенные примеры показывают, что теорема 2 не покрывает теорему 1. В то же время она справедлива для операторных (а не только матричных) пучков, а ее условия в отличие от условий теоремы 1 являются унитарно инвариантными.

Отметим еще, что условия теоремы 1 означают “близость” матриц A и B к диагональным матрицам и не являются унитарно инвариантными.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Маламуду за руководство работой, а также С. М. Маламуду и Л. Л. Оридороге за многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.
2. Копачевский Н. Д., Пивоварчик В. Н. // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. № 1. С. 101–118.
3. Шкаликов А. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 195–196.
4. Shkalikov A. A. // Operator Theory Advances Appl. V. 87: Birkhäuser Verlag, 1996. P. 258–285.
5. Сухочёва Л. И. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 381–390.
6. Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 2. С. 215–233.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.