Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Антонов, Расходящиеся почти всюду подпоследовательности сумм Фурье функций из $\varphi(L) \cap H_1^\omega$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 502–515

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:24:29

Расходящиеся почти всюду подпоследовательности сумм Фурье функций из $\varphi(L) \cap H_1^\omega$

Н. Ю. Антонов

Для лакунарной последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, неубывающей функции $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такой, что $\varphi(u) = o(u \ln \ln u)$ при $u \rightarrow \infty$, и модуля непрерывности, удовлетворяющего условию $(\ln k)^{-1} = O(\omega(n_k^{-1}))$, построен пример функции $F \in \varphi(L) \cap H_1^\omega$ с расходящейся почти всюду подпоследовательностью $\{S_{n_k}(F, x)\}$ последовательности частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции F .

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L) = \varphi(L)_{[0, 2\pi]}$ множество всех измеримых по Лебегу 2π -периодических функций таких, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|) dx < \infty.$$

Для функции $f \in L$ положим

$$\|f\| = \|f\|_L = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt,$$

а через $\omega(f, \delta)_1$ обозначим модуль непрерывности функции f в пространстве L :

$$\omega(f, \delta)_1 = \sup_{|h| \leq \delta} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx.$$

Пусть $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – произвольный модуль непрерывности, т.е. непрерывная неубывающая полуаддитивная и равная нулю в нуле функция. Положим

$$H_1^\omega = \{f \in L : \omega(f, \delta)_1 = O(\omega(\delta))\}.$$

Через $S_n(f, x)$ будем обозначать значение n -й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L$ в точке $x \in [0, 2\pi)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00320), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5120.2006.1) и Фонда содействия отечественной науке.

Согласно классическим результатам Колмогорова существуют интегрируемые по Лебегу 2π -периодические функции, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся почти всюду [1] и даже всюду [2]. С другой стороны, известно, что тригонометрический ряд Фурье любой функции f из L сходится по мере, откуда следует, что у последовательности сумм Фурье $S_n(f, x)$ функции f существует почти всюду сходящаяся подпоследовательность. Тем не менее, не существует возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такой, чтобы для любой $f \in L$ подпоследовательность $S_{n_k}(f, x)$ сходилась бы почти всюду, т.е. для любой возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ найдется функция $f \in L$, у которой подпоследовательность $S_{n_k}(f, x)$ расходится почти всюду [3] (всюду [4]). Конягин [5] усилил результат Тотика [4], показав, что для любой возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ и любой неубывающей функции $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u \ln \ln u)$, $u \rightarrow \infty$, найдется функция $F \in \varphi(L)$ такая, что подпоследовательность $S_{n_k}(F, x)$ неограниченно расходится всюду. Если же подпоследовательность $\{n_k\}$ совпадает со всей последовательностью натуральных чисел, то здесь Конягиным [6] показано, что для каждой функции $\varphi(u) = o(u \sqrt{\ln u / \ln \ln u})$, $u \rightarrow \infty$, существует функция $F \in \varphi(L)$ с неограниченно расходящимся всюду рядом Фурье.

Что касается имеющихся в этом направлении результатов положительного характера, то в случае $n_k = k$ наиболее общий на сегодняшний день результат принадлежит автору [7]: если $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)$, то ряд Фурье функции f сходится почти всюду. В случае, когда последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ обладает свойством лакуарности $\inf_{k \in \mathbb{N}} n_{k+1}/n_k > 1$, достаточным для сходимости почти всюду подпоследовательности $S_{n_k}(f, x)$ является условие $f \in L(\ln^+ L)$. Последний факт, как отмечено в [5], вытекает из [8; гл. 15, теорема 5.11] и [8; гл. 7, теорема 2.8].

Из [9; теорема 2] следует достаточное условие сходимости подпоследовательностей сумм Фурье функций из L в терминах принадлежности этих функций к классам H_1^ω : если для возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ и модуля непрерывности ω справедливо условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(n_k^{-1})}{k} < \infty,$$

то для любой функции $f \in H_1^\omega$ подпоследовательность $S_{n_k}(f, x)$ сходится почти всюду. Автором [10] было установлено, что если для лакуарной последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и модуля непрерывности ω последовательность $(\omega(n_k^{-2}) \ln k)^{-1}$ ограничена, то существует функция $F \in H_1^\omega$ такая, что подпоследовательность $S_{n_k}(F, x)$ расходится почти всюду. Если же $n_k = k$, то нами [11] с помощью основной леммы работы [6] был построен пример функции F с расходящимся почти всюду рядом Фурье и интегральным модулем непрерывности, удовлетворяющим условию $\omega(F, \delta)_1 = O(\sqrt{\ln \ln(1/\delta) / \ln(1/\delta)})$.

Ниже мы будем рассматривать возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, для которых существуют числа $p > 1$ и $\gamma \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\frac{n_{(k+1)^\gamma}}{n_{k^\gamma}} \geq p, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

В настоящей работе получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть для последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ выполнено условие (1.1), $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция такая, что $\varphi(u) = o(u \ln \ln u)$ при $u \rightarrow \infty$, ω – модуль непрерывности, связанный с последовательностью $\{n_k\}$ соотношением

$$\frac{1}{\ln k} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right). \quad (1.2)$$

Тогда существует функция $F \in \varphi(L) \cap H_1^\omega$, у которой подпоследовательность $S_{n_k}(F, x)$ расходится почти всюду.

Отметим, что в работе [5] доказательство основано на методе Хеладзе [12], предусматривающем построение примера с помощью тригонометрических полиномов. В доказательстве теоремы настоящей работы конструкция примера базируется на использовании кусочно-линейных функций.

2. Вспомогательные утверждения. Будем обозначать через $\text{mes } E$ лебегову меру множества E , через $[u]$ – целую часть числа u .

ЛЕММА 1. Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 18, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого натурального числа $m \geq 2$ найдутся множества σ_j , $m+1 \leq j \leq 3m$, такие, что каждое множество σ_j представимо в виде объединения попарно непересекающихся отрезков длины $\pi/(3n_{3m})$,

$$\sigma_j \subset \left[\frac{\pi(3j-1)}{6m}, \frac{\pi j}{2m} \right], \quad \text{mes } \sigma_j \geq \frac{1}{18^{2m}m}, \quad (2.1)$$

и для каждой точки $t \in \sigma_j$ и всех номеров k , $m+1 \leq k \leq 3m$, $k \neq j$,

$$\text{sign}(j-k) \sin n_k t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 2$. Зафиксируем j , $m+1 \leq j \leq 3m$. Покажем, что можно построить набор множеств $\{\sigma^{(k)}\}_{k=m+1}^{3m}$, $\sigma^{(k)} = \sigma_j^{(k)}$, со следующими свойствами:

1) для множеств $\sigma^{(k)}$ выполнены вложения

$$\sigma^{(m+1)} \subset \left[\frac{\pi(3j-1)}{6m}, \frac{\pi j}{2m} \right], \quad \sigma^{(k)} \subset \sigma^{(k-1)}, \quad m+2 \leq k \leq 3m;$$

2) для каждого $k \in \{m+1, \dots, 3m\}$ справедливо представление

$$\sigma^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{s_k} \sigma^{k,i},$$

где $\sigma^{k,i}$, $1 \leq i \leq s_k$, – попарно непересекающиеся отрезки длины $\pi/(3n_k)$ каждый, а

$$s_k \geq \frac{n_k}{18^{k-m}m}; \quad (2.3)$$

3) для каждого $t \in \sigma^{(k)}$

$$\operatorname{sign}(j - k + 0.5) \sin n_k t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть $k = m + 1$. Так как

$$\operatorname{mes} \left[\frac{\pi(3j - 1)}{6m}, \frac{\pi j}{2m} \right] = \frac{\pi}{6m},$$

а множество тех точек t , для которых

$$\operatorname{sign}(j - k + 0.5) \sin n_{m+1} t \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

– это $(2\pi/n_{m+1})$ -периодическое множество, совпадающее на своем периоде с отрезком длины $\pi/(3n_{m+1})$, то в множестве $[\pi(3j - 1)/(6m), \pi j/(2m)]$ будут целиком лежать не менее

$$\left[\frac{\pi}{6m} \left(\frac{2\pi}{n_{m+1}} \right)^{-1} \right] - 1$$

таких отрезков. Отсюда, замечая, что если $m \geq 2$, то $n_{m+1}/m \geq n_3/2 \geq 18^2/2$, для количества s_{m+1} таких отрезков получаем оценку

$$s_{m+1} \geq \left[\frac{\pi}{6m} \left(\frac{2\pi}{n_{m+1}} \right)^{-1} \right] - 1 > \frac{n_{m+1}}{12m} - 2 > \frac{n_{m+1}}{18m} > 1, \quad (2.4)$$

т.е., в частности, множество таких отрезков непусто. Обозначим описанные выше отрезки через $\sigma^{m+1,i}$, $1 \leq i \leq s_{m+1}$. Положим

$$\sigma^{(m+1)} = \bigcup_{i=1}^{s_{m+1}} \sigma^{m+1,i}.$$

В силу (2.4) неравенство (2.3) при $k = m + 1$ имеет место. Таким образом, согласно проведенным построениям множество σ_k при $k = m + 1$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3).

Пусть теперь множества $\sigma^{(m+1)}, \sigma^{(m+2)}, \dots, \sigma^{(k-1)}$, $m + 1 \leq k \leq 3m$, построены. Возьмем $l \in \{1, \dots, s_{k-1}\}$ и рассмотрим отрезок $\sigma^{k-1,l}$. Так как $\operatorname{mes} \sigma^{k-1,l} = \pi/(3n_{k-1})$, а множество тех точек t , для которых

$$\operatorname{sign}(j - k + 0.5) \sin n_k t \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

является $(2\pi/n_k)$ -периодическим множеством, совпадающим на своем периоде с отрезком длины $\pi/(3n_k)$, то в $\sigma^{k-1,l}$ целиком уместится не менее

$$\left[\frac{\pi}{3n_{k-1}} \left(\frac{2\pi}{n_k} \right)^{-1} \right] - 1 \geq 1$$

таких отрезков. Но тогда в объединении всех $\sigma^{k-1,l}$, $1 \leq l \leq s_{k-1}$, т.е. в множестве $\sigma^{(k-1)}$ таких отрезков будет не меньше, чем

$$s_{k-1} \left(\left[\frac{\pi}{3n_{k-1}} \left(\frac{2\pi}{n_k} \right)^{-1} \right] - 1 \right).$$

Отсюда, используя (2.3) с $k - 1$ вместо k , для количества s_k описанных отрезков имеем

$$\begin{aligned} s_k &\geq s_{k-1} \left(\left[\frac{\pi}{3n_{k-1}} \left(\frac{2\pi}{n_k} \right)^{-1} \right] - 1 \right) \\ &> s_{k-1} \left(\frac{n_k}{6n_{k-1}} - 2 \right) \geq \frac{s_{k-1}n_k}{18n_{k-1}} \geq \frac{n_{k-1}}{18^{k-m-1}m} \frac{n_k}{18n_{k-1}} = \frac{n_k}{18^{k-m}m}, \end{aligned}$$

т.е. (2.3) выполняется и для k . Осталось обозначить описанные выше отрезки через $\sigma^{k,i}$, $1 \leq i \leq s_k$, и положить

$$\sigma^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{s_k} \sigma^{k,i}.$$

Таким образом, отрезки $\sigma^{(k)}$, $m+1 \leq k \leq 3m$, построены. Так как

$$\begin{aligned} \sigma^{(3m)} &= \bigcap_{k=m+1}^{3m} \sigma^{(k)} \subset \left[\frac{\pi(3j-1)}{6m}, \frac{\pi j}{2m} \right], \\ \text{mes } \sigma^{(3m)} &= \frac{s_{3m}\pi}{3n_{3m}} \geq \frac{n_{3m}}{18^{2m}m} \frac{\pi}{3n_{3m}} > \frac{1}{18^{2m}m}, \end{aligned}$$

то можно взять в качестве σ_j из формулировки леммы множество $\sigma^{(3m)} = \sigma_j^{(3m)}$. Остается заметить, что если $k \neq j$, то $\text{sign}(j - k + 0.5) = \text{sign}(j - k)$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 18, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого натурального числа $m > e^{800}$ существует функция $f_m \in L$ такая, что

- 1) f_m непрерывна, имеет ограниченную вариацию на периоде $[0, 2\pi)$, и $\|f_m\| = 1$;
- 2) для всех $x \in [0, 2\pi)$ $0 \leq f_m(x) \leq 18^{2m}$;
- 3) для любого $\delta > 0$

$$\omega(f_m, \delta)_1 \leq 36n_{3m}\delta;$$

- 4) для множества

$$G_m = \left\{ x \in [0, 2\pi) : \max_{m+1 \leq k \leq 3m} |S_{n_k}(f_m, x)| > \frac{\ln m}{100} \right\} \setminus \text{supp } f_m,$$

где $\text{supp } f_m = \{x \in [0, 2\pi) : f_m(x) \neq 0\}$ – носитель функции f_m , выполнено

$$\text{mes } G_m \geq \frac{\pi}{36}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m > e^{800}$, множества σ_j , $m+1 \leq j \leq 3m$, – из леммы 1. Обозначим через $\rho(x, E)$ расстояние от точки $x \in [0, 2\pi)$ до множества $E \subset [0, 2\pi)$. Пусть

$$\sigma = \sigma(m) = \bigcup_{k=m+1}^{3m} \sigma_j.$$

Положим

$$f_m(x) = \frac{12n_{3m}\rho(x, [0, 2\pi) \setminus \sigma)}{\pi \operatorname{mes} \sigma}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Определенную на $[0, 2\pi)$ функцию продолжим периодически на всю ось. Поскольку множество σ представляет собой объединение попарно непересекающихся отрезков длины $\pi/(3n_{3m})$ каждый, то, как нетрудно видеть, f_m – непрерывная кусочно-линейная функция с носителем на множестве σ . На каждом из отрезков носителя σ подграфик графика функции f представляет собой треугольник с длиной основания $\pi/(3n_{3m})$ и высотой $2/\operatorname{mes} \sigma$. Отсюда, учитывая оценку (2.1), имеем

$$0 \leq f_m(x) \leq \frac{2}{\operatorname{mes} \sigma} \leq 18^{2m}. \quad (2.5)$$

Далее, вычисляя интеграл по каждому отрезку носителя σ как площадь соответствующего треугольника и замечая, что число отрезков, из которых состоит носитель σ , равно $3n_{3m} \operatorname{mes} \sigma/\pi$, получаем

$$\|f_m\|_L = \int_0^{2\pi} f_m(x) dx = \int_{\sigma} f_m(x) dx = 1. \quad (2.6)$$

Таким образом, условия 1) и 2) леммы имеют место.

Так как вариация функции f_m на каждом из отрезков ее носителя σ в силу (2.5) не превосходит $4/(\operatorname{mes} \sigma)$, то для полной вариации $V(f_m)$ функции f_m на периоде $[0, 2\pi)$ справедлива оценка

$$V(f_m) \leq 4n_{3m}. \quad (2.7)$$

ЛЕММА А (Ульянов, [13]). Пусть f – функция с ограниченным изменением на $[0, 2\pi)$. Тогда

$$\omega(f, \delta)_1 \leq 9V(f)\delta.$$

Из (2.7) и леммы А следует условие 3) леммы.

Нам осталось доказать, что функция f_m удовлетворяет условию 4). Обозначив через $D_n(t)$ ядро Дирихле,

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{2 \sin(t/2)},$$

для $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ имеем

$$\begin{aligned} S_{n_k}(f_m, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_m(t) D_{n_k}(t - x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\sigma} f_m(t) D_{n_k}(t - x) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{j=m+1}^{3m} \int_{\sigma_j} f_m(t) D_{n_k}(t - x) dt; \end{aligned} \quad (2.8)$$

при этом

$$\begin{aligned} D_{n_k}(t - x) &= \frac{\sin((n_k + 1/2)(t - x))}{2 \sin((t - x)/2)} = \frac{1}{2} \sin n_k(t - x) \operatorname{ctg} \left(\frac{t - x}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos n_k(t - x) \\ &\geq \frac{1}{2} \sin n_k(t - x) \operatorname{ctg} \left(\frac{t - x}{2} \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin n_k(t - x) \operatorname{sign} \left(\frac{t - x}{2} \right) \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{t - x}{2} \right) \right| - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пусть $m + 1 \leq k \leq 3m$. Положим

$$\Delta_k = \Delta_{k,m} = \left\{ x \in \left[\frac{\pi(k-1)}{2m}, \frac{\pi(3k-2)}{6m} \right] : \cos n_k x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, |\sin n_k x| \leq \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.10)$$

Нетрудно видеть, что множество Δ_k является пересечением отрезка $[\pi(k-1)/(2m), \pi(3k-2)/(6m)]$ с $(2\pi/n_k)$ -периодическим множеством, совпадающим на периоде $[-\pi/n_k, \pi/n_k]$ с отрезком $[-\pi/6n_k, \pi/6n_k]$. Значит, мера множества Δ_k не меньше, чем длина отрезка $[-\pi/6n_k, \pi/6n_k]$, умноженная на количество периодов вида $[2\pi(l-1/2)/n_k, 2\pi(l+1/2)/n_k]$, $l \in \mathbb{Z}$, целиком содержащихся в отрезке $[\pi(k-1)/(2m), \pi(3k-2)/(6m)]$, т.е.

$$\text{mes } \Delta_k \geq \frac{\pi}{3n_k} \left(\left[\frac{n_k}{12m} \right] - 1 \right) \geq \frac{\pi}{72m}. \quad (2.11)$$

Зафиксируем $x \in \Delta_k$. Тогда для $t \in \sigma_i$, $m + 1 \leq j \leq 3m$, $j \neq k$, с помощью (2.10) и (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\frac{t-x}{2} \right) \sin n_k(t-x) &= \text{sign}(j-k) \sin n_k t \cos n_k x - \text{sign}(j-k) \sin n_k x \cos n_k t \\ &\geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.8), (2.9) и (2.12) для $x \in \Delta_k$ получаем

$$\begin{aligned} S_{n_k}(f_m, x) &\geq \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{j=m+1}^{k-1} + \sum_{j=k+1}^{3m} \right) \int_{\sigma_j} f_m(t) \left(\left| \text{ctg} \frac{t-x}{2} \right| - 4 \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_k} |f_m(t) D_{n_k}(t-x)| dt \\ &\geq \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{j=m+1}^{k-1} + \sum_{j=k+1}^{3m} \right) \int_{\sigma_j} f_m(t) \left| \text{ctg} \frac{t-x}{2} \right| dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_k} f_m(t) \left| \text{ctg} \frac{t-x}{2} \right| dt - \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если $t \in \sigma_k \subset [\pi(3k-1)/(6m), \pi k/(2m)]$, то $t-x \geq \pi/(6m)$, откуда

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_k} f_m(t) \left| \text{ctg} \frac{t-x}{2} \right| dt \leq \frac{1}{\pi} \text{ctg} \frac{\pi}{12m} \int_{\sigma_k} f_m(t) dt \leq \frac{12m}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2m} < \frac{2}{\pi}. \quad (2.14)$$

Пусть теперь $t \in \sigma_j$, $m + 1 \leq j \leq 3m$, $j \neq k$. Тогда, поскольку

$$\sigma_j \subset \left[\frac{\pi(3j-1)}{6m}, \frac{\pi j}{2m} \right], \quad x \in \Delta_k \subset \left[\frac{\pi(k-1)}{2m}, \frac{\pi(3k-2)}{6m} \right],$$

то

$$|t-x| \leq \frac{\pi(|j-k|+1)}{2m}. \quad (2.15)$$

Из (2.13), (2.14) и (2.15) с помощью неравенства $\operatorname{ctg}(u/2) > 1/u$, $0 < u \leq \pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} S_{n_k}(f_m, x) &\geq \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{j=m+1}^{k-1} + \sum_{j=k+1}^{3m} \right) \int_{\sigma_j} f_m(t) \left| \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \right| dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_k} f_m(t) \left| \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \right| dt - \frac{1}{2\pi} \\ &\geq \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{j=m+1}^{k-1} + \sum_{j=k+1}^{3m} \right) \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(|j-k|+1)}{4m} \right) \right| \int_{\sigma_j} f_m(t) dt - \frac{5}{2\pi} \\ &\geq \frac{1}{16\pi m} \sum_{l=1}^m \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(l+1)}{4m} \right) \right| - \frac{5}{2\pi} \geq \frac{1}{16\pi m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{2m}{\pi(l+1)} - \frac{5}{2\pi} \\ &\geq \frac{1}{80} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{(l+1)} - 1 \geq \frac{1}{80} \ln m - 2 \geq \frac{1}{100} \ln m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Положим

$$\Delta^{(m)} = \bigcup_{k=m+1}^{3m} \Delta_{k,m}.$$

В силу (2.11)

$$\operatorname{mes} \Delta^{(m)} \geq \frac{\pi}{36}. \quad (2.17)$$

Из (2.16) и определения множества $\Delta^{(m)}$ получаем, что для $x \in \Delta^{(m)}$

$$\max_{m+1 \leq k \leq 3m} |S_{n_k}(f_m, x)| > \frac{\ln m}{100}. \quad (2.18)$$

Из того факта, что $\Delta^{(m)} \cap \operatorname{supp} f_m = \emptyset$, и в силу (2.18) для множества G_m из условия 4) леммы имеет место вложение $\Delta^{(m)} \subset G_m$. Отсюда и из (2.17) вытекает справедливость условия 4). Лемма 2 доказана.

Пусть далее последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1.1). Обозначим через q натуральное число такое, что

$$p^q \geq 18. \quad (2.19)$$

ЛЕММА 3. Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1.1), число q — условию (2.19). Тогда для каждого $m > e^{800}$ существует функция f_m со следующими свойствами:

- 1) $\|f_m\| = 1$;
- 2) для всех $x \in [0, 2\pi)$ $0 \leq f_m(x) \leq 18^{2m}$;
- 3) для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\omega \left(f_m, \frac{1}{n_k} \right)_1 \leq \frac{36n_{(3qm)}^\gamma}{n_k};$$

- 4) для множества G_m , $\operatorname{mes} G_m \geq \pi/36$, и некоторых номеров μ_m и ν_m , $m < \mu_m < \nu_m$,

$$\max_{\mu_m \leq k, l \leq \nu_m} |S_{n_k}(f_m, x) - S_{n_l}(f_m, x)| \geq \frac{\ln m}{200}, \quad x \in G_m;$$

5) для всех $x \in [0, 2\pi)$

$$\sup_{k, l \geq \nu_m} |S_{n_k}(f_m, x) - S_{n_l}(f_m, x)| \leq \frac{1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда в силу (1.1) и (2.19)

$$\frac{n_{(q(k+1))^\gamma}}{n_{(qk)^\gamma}} = \frac{n_{(qk+1)^\gamma}}{n_{(qk)^\gamma}} \frac{n_{(qk+2)^\gamma}}{n_{(qk+1)^\gamma}} \dots \frac{n_{(q(k+1))^\gamma}}{n_{(q(k+1)-1)^\gamma}} \geq p^q \geq 18,$$

т.е. последовательность $\{n_{(qk)^\gamma}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 2.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m > e^{800}$. Применим лемму 2 к последовательности $\{n_{(qk)^\gamma}\}_{k=1}^{\infty}$. Получим, что существует функция f_m , удовлетворяющая условиям 1)–4) леммы 2. Из условий 1)–3) леммы 2 вытекают соответственно условия 1)–3) настоящей леммы. Далее, так как функция f_m непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то ее ряд Фурье сходится равномерно [14; гл. 1, § 39]. Следовательно, найдется $\nu_m \geq (3qm)^\gamma$ такое, что для всех $k, l \geq \nu_m$

$$|S_{n_k}(f_m, x) - S_{n_l}(f_m, x)| \leq \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (2.20)$$

и

$$\max_{x \in [0, 2\pi) \setminus \text{supp } f_m} |S_{n_{\nu_m}}(f_m, x)| \leq 1. \quad (2.21)$$

Из (2.20) вытекает условие 5) леммы.

Проверим теперь справедливость условия 4). Положим

$$\mu_m = (q(m+1))^\gamma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{\mu_m \leq k, l \leq \nu_m} |S_{n_k}(f_m, x) - S_{n_l}(f_m, x)| &\geq \max_{\mu_m \leq k \leq \nu_m} |S_{n_k}(f_m, x)| - |S_{n_{\nu_m}}(f_m, x)| \\ &\geq \max_{(q(m+1))^\gamma \leq k \leq (3qm)^\gamma} |S_{n_k}(f_m, x)| - |S_{n_{\nu_m}}(f_m, x)| \\ &\geq \max_{m+1 \leq j \leq 3m} |S_{n_{(qj)^\gamma}}(f_m, x)| - |S_{n_{\nu_m}}(f_m, x)|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Взяв $x \in G_m$, из (2.22), условия 4) леммы 2 и (2.21) получаем условие 4) настоящей леммы. Лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы. Сформулируем вначале известные утверждения, необходимые для доказательства. Для 2π -периодического множества $E \subset \mathbb{R}$ обозначим через E^u множество E , сдвинутое на u , и под $\text{mes } E$ здесь будем понимать лебегову меру множества $E \cap [0, 2\pi)$.

ЛЕММА В [8; гл. 13, лемма 1.24]. Пусть задана произвольная последовательность (периодических) множеств $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{mes } G_i = \infty.$$

Тогда существуют такие числа u_i , $i = 1, 2, \dots$, что почти каждая точка принадлежит бесконечному числу множеств $G_i^{u_i}$.

ЛЕММА С (Конягин, [5]). Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ не убывает и удовлетворяет условию

$$\varphi(u) = o(u \ln \ln u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Тогда найдутся число u_1 и выпуклая функция $\tilde{\varphi}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, также удовлетворяющая условию

$$\tilde{\varphi}(u) = o(u \ln \ln u), \quad u \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

и такая, что $\tilde{\varphi}(u) \geq \varphi(u)$ для всех $u \geq u_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Применим лемму С к функции φ из формулировки теоремы. Получим, что найдется выпуклая функция $\tilde{\varphi}$ такая, что

$$\tilde{\varphi}(L) \subset \varphi(L). \quad (3.2)$$

Заметим также, что в силу выпуклости $\tilde{\varphi}$ функция

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\tilde{\varphi}(u)}{u} \quad (3.3)$$

не убывает. Приступим к построению функции F из формулировки теоремы. Используя обозначения из формулировки леммы 3 и (3.3), определим последовательность номеров m_j следующим образом. Выберем номер m_1 так, чтобы

$$m_1 > \max\{m_0, 3q\},$$

в частности, $m_1 > e^{800}$. Пусть номера $m_1, m_2, \dots, m_{i-1}$ уже построены; выберем m_i так, чтобы

$$\ln m_i \geq 2 \ln m_{i-1}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\ln m_i}{\tilde{\psi}(18^{2m_i})} \geq \frac{2 \ln m_{i-1}}{\tilde{\psi}(18^{2m_{i-1}})}, \quad (3.5)$$

$$\frac{n_{(3qm_i)^\gamma}}{\ln m_i} \geq \frac{2n_{(3qm_{i-1})^\gamma}}{\ln m_{i-1}}. \quad (3.6)$$

$$\ln m_i \geq 3200(\nu_{m_{i-1}} + 1). \quad (3.7)$$

Отметим, что выбор m_i в соответствии с (3.5) осуществим, поскольку согласно (3.1) $\tilde{\psi}(18^{2m})/\ln m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Возьмем точки u_i в соответствии с леммой В, примененной к последовательности множеств $\{G_{m_i}\}$ из леммы 3 так, чтобы мера множества $G = \limsup_{i \rightarrow \infty} G_{n_i}^{u_i}$ была равна 2π . Положим

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{m_i}(x + u_i)}{\ln m_i},$$

где f_m — функция из леммы 3.

Из условия 1) леммы 3 и следующей из (3.4) сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\ln m_i}$$

видно, что $F \in L$. Покажем, что $F \in \tilde{\varphi}(L) = L\tilde{\psi}(L)$. Используя для выпуклой функции $\tilde{\varphi}$ неравенство Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(|F(x)|) dx &= \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{m_i}(x+u_i)}{\ln m_i}\right|\right) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\ln m_i} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} 1/\ln m_i} \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{m_i}(x+u_i)}{\ln m_i}\right|\right) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\ln m_i} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(|f_{m_i}(x+u_i)|) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для каждой функции $f_{m_i}(\cdot + u_i)$ в силу условий 1) и 2) леммы 3 и неубывания функции $\tilde{\psi}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(|f_{m_i}(x+u_i)|) dx &= \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(f_{m_i}(x)) dx = \int_0^{2\pi} f_{m_i}(x) \tilde{\psi}(f_{m_i}(x)) dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} f_{m_i}(x) \tilde{\psi}(18^{2m_i}) dx = \tilde{\psi}(18^{2m_i}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Объединяя (3.8), (3.9) и используя (3.5), получаем

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(|F(x)|) dx \leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}(18^{2m_i})/\ln m_i}{\sum_{i=1}^{\infty} 1/\ln m_i} < \infty.$$

Отсюда и из (3.2) заключаем, что $F \in \varphi(L)$.

Покажем теперь, что функция F принадлежит также классу H_1^ω . Пусть $k \geq (3qm_1)^\gamma$. Выберем номер j так, чтобы $(3qm_j)^\gamma \leq k < (3qm_{j+1})^\gamma$, откуда $n_{(3qm_j)^\gamma} \leq n_k < n_{(3qm_{j+1})^\gamma}$. Согласно определению функции F

$$\omega\left(F, \frac{1}{n_k}\right)_1 \leq \sum_{i=1}^j \frac{\omega(f_{m_i}, 1/n_k)_1}{\ln m_i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\omega(f_{m_i}, 1/n_k)_1}{\ln m_i} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (3.10)$$

Оценим каждую из сумм в правой части (3.10). Заметим, что так как $m_j \geq m_1 \geq 3q$, то

$$\ln((3qm_j)^\gamma) \leq \ln(m_j^{2\gamma}) = 2\gamma \ln m_j. \quad (3.11)$$

Используя (3.6), (3.11) и тот факт, что последовательность $\{n_l/\ln l\}_{l=1}^\infty$ не убывает, для $1 \leq i \leq j$ имеем

$$\frac{n_{(3qm_i)^\gamma}}{\ln m_i} \leq \frac{1}{2^{j-i}} \frac{n_{(3qm_j)^\gamma}}{\ln m_j} \leq \frac{1}{2^{j-i}} \frac{2\gamma n_{(3qm_j)^\gamma}}{\ln((3qm_j)^\gamma)} \leq \frac{\gamma}{2^{j-i-1}} \frac{n_k}{\ln k}. \quad (3.12)$$

Из условия 3) леммы 3 и (3.12) получаем

$$\Sigma_1 \leq 36 \sum_{i=1}^j \frac{n_{(3qm_i)^\gamma}}{n_k} \frac{1}{\ln m_i} \leq 36 \sum_{i=1}^j \frac{1}{n_k} \frac{\gamma}{2^{j-i-1}} \frac{n_k}{\ln k} < \frac{144\gamma}{\ln k}. \quad (3.13)$$

Оценивая сверху модули непрерывности функций f_{m_i} в произвольной точке через удвоенную L -норму этих функций, используя (3.4), а затем (3.11), имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\|f_{m_i}\|}{\ln m_i} = 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{\ln m_i} \\ &\leq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{2^{j+1-i}}{\ln m_{j+1}} = \frac{4}{\ln m_{j+1}} \leq \frac{8\gamma}{\ln((3qm_{j+1})^\gamma)} \leq \frac{8\gamma}{\ln k}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Объединяя (3.10), (3.13) и (3.14), получаем

$$\omega\left(F, \frac{1}{n_k}\right)_1 \leq \frac{152}{\ln k}, \quad k \geq (3qm_1)^\gamma. \quad (3.15)$$

Пусть $0 < \delta < (3qm_1)^\gamma$. Возьмем номер k таким, чтобы $1/n_{k+1} \leq \delta < 1/n_k$. Тогда, используя неубывание модуля непрерывности функции F , (3.15), (1.2) и неубывание ω , заключаем

$$\omega(F, \delta)_1 \leq \omega\left(F, \frac{1}{n_k}\right)_1 \leq \frac{152}{\ln k} = O\left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right)\right) = O(\omega(\delta)),$$

т.е. $F \in H_1^\omega$.

Нам осталось доказать, что в каждой точке x из множества G последовательность $\{S_{n_k}(F, x)\}_{k=1}^\infty$ расходится. Пусть $x \in G$, $M > 0$. Тогда в силу определения множества G найдется такой номер j , что $x \in G_{m_j}^{u_j}$ и $\mu_{n_j} > M$. Используя определение F , имеем

$$\begin{aligned}&\max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} |S_{n_k}(F, x) - S_{n_l}(F, x)| \\ &\geq \max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_j}(\cdot + u_j), x) - S_{n_l}(f_{m_j}(\cdot + u_j), x)|}{\ln m_j} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{j-1} \max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x) - S_{n_l}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x)|}{\ln m_i} \\ &\quad - \sum_{i=j+1}^{\infty} \max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x) - S_{n_l}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x)|}{\ln m_i}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Оценим каждый из трех членов в правой части (3.16). Первый член в силу условия 4) леммы 3 не меньше, чем $1/200$. Далее, применяя следующие из (3.7) неравенства $\mu_{m_j} > \nu_{m_i}$, $1 \leq i \leq j-1$, а затем условие 5) леммы 3 и (3.4), имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{j-1} \max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x) - S_{n_l}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x)|}{\ln m_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \sup_{k, l \geq \nu_{m_i}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x) - S_{n_l}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x)|}{\ln m_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2 \ln m_i} \leq \frac{1}{\ln m_1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{800}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Наконец, используя тот факт, что для произвольной функции $f \in L$

$$|S_n(f, x)| \leq (n+1)\|f\|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 2\pi),$$

а также условие 1) леммы 3, (3.7) и (3.4), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j+1}^{\infty} \max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x) - S_{n_l}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x)|}{\ln m_i} \\ & \leq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \max_{\mu_{m_j} \leq k \leq \nu_{m_j}} \frac{|S_{n_k}(f_{m_i}(\cdot + u_i), x)|}{\ln m_i} \leq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{(\nu_{m_j} + 1)\|f_{m_i}\|}{\ln m_i} \\ & = 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{(\nu_{m_j} + 1)}{\ln m_{j+1}} \frac{\ln m_{j+1}}{\ln m_i} \leq \frac{1}{1600} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{800}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Объединяя (3.16), условие 4) леммы 3, (3.17) и (3.18), заключаем

$$\max_{\mu_{m_j} \leq k, l \leq \nu_{m_j}} |S_{n_k}(F, x) - S_{n_l}(F, x)| \geq \frac{1}{400}.$$

Таким образом, если $x \in G$, то для любого сколь угодно большого M найдутся номера $k, l > M$ такие, что

$$|S_{n_k}(F, x) - S_{n_l}(F, x)| \geq \frac{1}{400},$$

т.е. последовательность $\{S_{n_k}(F, x)\}$ расходится на множестве полной меры. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Kolmogoroff, “Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout”, *Fund. Math.*, **4** (1923), 324–328.
- [2] A. Kolmogoroff, “Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), 1327–1328.
- [3] R. P. Gosselin, “On the divergence of Fourier series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9**:2 (1958), 278–282.
- [4] V. Totik, “On the divergence of Fourier series”, *Publ. Math. Debrecen*, **29**:3–4 (1982), 251–264.
- [5] С. В. Конягин, “О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье”, *Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН*, **11**:2 (2005), 112–119.
- [6] С. В. Конягин, “О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 103–126.
- [7] N. Yu. Antonov, “Convergence of Fourier series”, *East J. Approx.*, **2**:2 (1996), 187–196.
- [8] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, 2, Мир, М., 1965.
- [9] К. И. Осолков, “Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций”, *Современные проблемы математики. Математический анализ, алгебра, топология*, Тр. МИАН, **167**, Наука, М., 1985, 239–260.
- [10] Н. Ю. Антонов, “О расходимости подпоследовательностей сумм Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности”, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **12**:1 (2006), 12–26.

- [11] Н. Ю. Антонов, “Интегрируемость мажорант сумм Фурье и расходимость рядов Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности”, *Матем. заметки*, **76**:5 (2004), 651–665.
- [12] Ш. В. Хеладзе, “О расходимости всюду рядов Фурье функций из класса $L\varphi(L)$ ”, *Тр. Тбилисск. матем. ин-та*, **89** (1988), 51–59.
- [13] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63**:3 (1964), 356–391.
- [14] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, ГИФМЛ, М., 1961.

Н. Ю. Антонов

Институт математики и механики УрО РАН

E-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Поступило

15.01.2008

Исправленный вариант

04.07.2008