Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Эквивариантная топологическая классификация многообразий Фано вещественных четырехмерных кубик, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 603–615

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:31:26

Эквивариантная топологическая классификация многообразий Фано вещественных четырехмерных кубик

В. А. Краснов

Вычисляется эквивариантный топологический тип многообразия Фано, параметризующего множество прямых на неособой вещественной гиперповерхности третьей степени в пятимерном проективном пространстве. При исследовании этого многообразия Фано используются результаты и конструкции из работы С. Финашина и В. Харламова о грубой проективной классификации вещественных четырехмерных кубик. Также применяется конструкция Б. Хассетта из работы, посвященной специальным четырехмерным кубикам.

Библиография: 14 названий.

Формулировка основного результата. Далее $\mathbb{P}^5$ – пятимерное комплексное проективное пространство, т.е. $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^6)$ – проективизация $\mathbb{C}^6$. Алгебраические гиперповерхности третьей степени в $\mathbb{P}^5$ называются *четырёхмерными кубиками*, далее мы называем их просто *кубиками*. Множество кубик образует 55-мерное комплексное проективное пространство, которое мы обозначаем через $\mathcal{B}$. Если $b \in \mathcal{B}$, то через C_b обозначается соответствующая кубика. Через $\mathcal{B}^*$ обозначается множество неособых кубик. Пусть $C \subset \mathbb{P}^5$ – неособая кубика, через $F = F(C)$ обозначается многообразие Фано кубики C . Его точками являются прямые в $\mathbb{P}^5$, лежащие на кубике C . Многообразие Фано F является неособым четырехмерным подмногообразием многообразия Грассмана $\mathcal{G} = G(6, 2)$ (см. [1]).

На многообразиях $\mathbb{P}^5$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$ определена инволюция комплексного сопряжения, которую мы обозначаем через τ . Инвариантные относительно этой инволюции кубики называются *вещественными кубиками*. Множество вещественных кубик обозначается через $\mathbb{R}\mathcal{B}$, оно равно множеству неподвижных точек инволюции $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Если C – вещественная кубика, то на ней индуцируется инволюция комплексного сопряжения $\tau: C \rightarrow C$. Поэтому вещественную кубикку C будем также обозначать через (C, τ) . На многообразии Фано F вещественной кубики C также индуцируется инволюция комплексного сопряжения $\tau: F \rightarrow F$, поэтому его обозначаем (F, τ) .

Множество $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных кубик в $\mathbb{P}^5$ (см. [2]).

Пусть $b \in \mathcal{B}^*$, тогда через F_b будем обозначать многообразие Фано кубики C_b . Заметим, что если точки b' , b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, т.е. кубики $C_{b'}$, $C_{b''}$ принадлежат одному классу жесткой изотопической

эквивалентности, то вещественные многообразия Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Действительно, тотальное пространство многообразий Фано неособых кубик

$$\mathfrak{F}^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}^*} F_b$$

является неособым многообразием, а проекция $\mathfrak{F}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ является локально тривиальным дифференцируемым расслоением (см. [3]). Положим

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* = \bigcup_{b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^*} F_b.$$

Тогда получим, что проекция $\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является локально тривиальным эквивариантным расслоением. Поэтому вещественные многообразия Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны, если точки b' , b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$.

Группа $\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$ вещественных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}^5$ действует на $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Эта группа несвязная, она состоит из двух компонент связности, поэтому она может переставлять компоненты связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Проективная классификация вещественных четырехмерных кубик состоит в описании факторпространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*/\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$. Его компоненты связности будем называть *грубыми проективными классами* вещественных кубик (см. [4]). Множество таких классов обозначим через $\mathcal{P}$. Заметим, что выполняется равенство

$$\mathcal{P} = \pi(\mathbb{R}\mathcal{B}^*)/\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R}),$$

где $\pi(\mathbb{R}\mathcal{B}^*)$ – множество компонент связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, т.е. множество классов жесткой изотопической эквивалентности вещественных кубик.

Таким образом, две вещественные кубики $C_{b'}$, $C_{b''}$ грубо проективно эквивалентны, если существует проективное преобразование $g \in \mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$ такое, что точки $g(b')$, b'' принадлежат одной компоненте связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$.

В работе [5] показано, что число элементов в множестве $\mathcal{P}$ грубых проективных классов вещественных четырехмерных кубик равно 75. Описание грубого проективного класса фиксированной вещественной четырехмерной кубики C дается с помощью решетки $(H_4(C, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – билинейная форма, определенная индексом пересечения циклов. Эту решетку будем обозначать через $\Lambda(C)$. Рассмотрим подрешетки $\Lambda_{\pm}(C)$, они получаются из решетки $\Lambda(C)$ заменой группы $H_4(C, \mathbb{Z})$ на подгруппы $H_4(C, \mathbb{Z})_{\pm}$, состоящие из элементов $a \in H_4(C, \mathbb{Z})$ таких, что $\tau_*(a) = \pm a$.

В работе [5] доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Две вещественные кубики C' , C'' грубо проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм решеток $\Lambda_-(C')$, $\Lambda_-(C'')$.*

Эта теорема аналогична теореме о вещественных КЗ-поверхностях, к формулировке которой мы приступаем.

Пусть S – вещественная КЗ-поверхность. Тогда можно рассмотреть аналогичную решетку $(H_2(S, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и подрешетки $(H_2(S, \mathbb{Z})_{\pm}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Будем их обозначать через $L(S)$, $L_{\pm}(S)$ соответственно. Две вещественные КЗ-поверхности S' , S'' грубо эквивалентны, если существует гладкое семейство вещественных КЗ-поверхностей S_t , $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$, такое, что выполняются условия: (S', τ) изоморфна поверхности (S_0, τ) , а (S'', τ) изоморфна поверхности (S_1, τ) . (Заметим, что гладкость

семейства S_t означает, в частности, что комплексная и вещественная структуры поверхности S_t гладко зависят от t .)

Множество классов грубой эквивалентности вещественных КЗ-поверхностей будем обозначать через $\mathcal{D}$. Справедлива следующая (см. [4], [6])

ТЕОРЕМА 0.2. *Две вещественные КЗ-поверхности S' , S'' грубо эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм решеток $L_+(S')$, $L_+(S'')$.*

Обозначим через $-L_+(S)$ решетку, которая получается из решетки $L_+(S)$, заменой формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на форму $-\langle \cdot, \cdot \rangle$. Вещественная кубика C называется *ассоциируемой с вещественной КЗ-поверхностью*, если существует вещественная КЗ-поверхность S такая, что решетки $\Lambda_-(C)$, $-L_+(S)$ изоморфны. Аналогично определяется КЗ-поверхность, *ассоциируемая с кубикой*. Вещественная КЗ-поверхность S называется *ассоциируемой с кубикой*, если существует вещественная кубика C такая, что решетки $L_+(S)$, $-\Lambda_-(C)$ изоморфны. Если вещественные кубики C' , C'' грубо проективно эквивалентны, причем одна из них ассоциируема с КЗ-поверхностью, то другая кубика также будет ассоциируемой с КЗ-поверхностью. Аналогичное утверждение справедливо для вещественных КЗ-поверхностей. Следовательно, можно дать следующее определение (см. [5]). Грубый проективный класс $[C]$ вещественной кубики C называется *регулярным*, если кубика C ассоциируема с КЗ-поверхностью. Аналогичное определение дается для элементов множества классов грубой эквивалентности $\mathcal{D}$. Оказывается, что существует только один нерегулярный элемент множества $\mathcal{P}$, а также только один нерегулярный элемент множества $\mathcal{D}$ (см. [5]).

Обозначим через $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{D}^*$ множества регулярных элементов во множествах $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ соответственно. Тогда между множествами $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{D}^*$ канонически определено взаимно однозначное соответствие. А именно, классы эквивалентности $[C] \in \mathcal{P}^*$, $[S] \in \mathcal{D}^*$ соответствуют друг другу, если решетки $\Lambda_-(C)$, $-L_+(S)$ изоморфны.

Основной результат настоящей статьи – это следующая

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть вещественная четырехмерная кубика C и вещественная КЗ-поверхность S таковы, что существует изоморфизм решеток $\Lambda_-(C)$, $-L_+(S)$, причем множество вещественных точек $\mathbb{R}S$ КЗ-поверхности S не гомеоморфно несвязному объединению десяти сфер. Тогда многообразие Фано F кубики C эквивариантно диффеоморфно многообразию $S^{[2]}$, которое получается из симметрического квадрата $S^{(2)}$ разрешением особенностей, т.е. раздутьем диагонали.*

Далее мы хотим привести следствие теоремы 0.3 об устройстве вещественной части $\mathbb{R}F$ многообразия Фано F . Но сначала мы изложим одну конструкцию, которая сопоставляет компактной комплексной поверхности S с вещественной структурой $\tau: S \rightarrow S$ специальное четырехмерное гладкое многообразие $M = M(S)$. (Впрочем, ее можно применять для компактного комплексного многообразия X с вещественной структурой произвольной размерности n . Тогда получается гладкое многообразие $M = M(X)$ размерности $2n$.)

Если T – касательное расслоение на вещественной части $\mathbb{R}S$ поверхности S , то умножив его на мнимую единицу i получим нормальное расслоение N_1 к гладкой поверхности $\mathbb{R}S$ на четырехмерном гладком многообразии S . Построим теперь канонический изоморфизм касательного расслоения T на нормальное расслоение N_2 к диагонали в произведении $\mathbb{R}S \times \mathbb{R}S$. Возьмем произвольную точку (p, p) из диагонали произведения $\mathbb{R}S \times \mathbb{R}S$. Касательное пространство в этой точке ко всему

произведению равно прямой сумме $T_p \oplus T_p$. Произвольный касательный вектор к диагонали в точке (p, p) имеет вид (v, v) , где $v \in T_p$. Тогда этому вектору сопоставляется нормальный вектор $(v, -v)$. Таким образом нормальные расслоения N_1, N_2 канонически изоморфны. Выберем эрмитову метрику на поверхности S , инвариантную относительно инволюции $\tau: S \rightarrow S$. Из этой эрмитовой метрики получается риманова метрика на вещественной части $\mathbb{R}S$, с помощью которой строится риманова метрика на несвязном объединении произведений

$$P_1 \times P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_k \times P_k.$$

Заметим, что такая риманова метрика инвариантна относительно инволюции, переставляющей сомножители. Изоморфизмы $T \cong N_1, T \cong N_2$ определяют изоморфизм $N_1 \cong N_2$. Построенный изоморфизм нормальных расслоений N_1, N_2 будет сохранять римановы метрики на этих расслоениях. Поэтому трубчатая окрестность вещественной части $\mathbb{R}S$ на поверхности S канонически диффеоморфна трубчатой окрестности диагонали в несвязном объединении произведений $P_1 \times P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_k \times P_k$, причем диффеоморфизм согласован с инволюциями. Вырежем эти окрестности и склеим полученные четырехмерные многообразия по краям. Тогда получится многообразие $\widehat{M}$, на котором определена инволюция $\widehat{\tau}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$, действующая без неподвижных точек. Эта инволюция устроена следующим образом. На части поверхности S она совпадает с инволюцией $\tau: S \rightarrow S$, а на части несвязного объединения произведений эта инволюция совпадает с инволюцией перестановки сомножителей. Тогда многообразие M равно фактормногообразию $\widehat{M}/\widehat{\tau}$. Заметим, что в случае пустого множества $\mathbb{R}S$ многообразие $\widehat{M}$ равно S , а многообразие M равно S/τ .

СЛЕДСТВИЕ 0.4. Пусть кубика C и КЗ-поверхность S удовлетворяют условиям теоремы 0.3, а кроме этого, вещественная часть $\mathbb{R}S$ поверхности S диффеоморфна несвязному объединению гладких поверхностей $P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_k$. Тогда вещественная часть $\mathbb{R}F$ многообразия Фано F кубики C диффеоморфна несвязному объединению

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq k} P_i \times P_j \right) \coprod M(S).$$

Скажем несколько слов о структуре статьи. Кроме введения, она содержит два пункта. Первый из них посвящен многообразию Фано кубики, которая имеет единственную особую точку, причем эта особая точка является простой двойной точкой. Идея построения многообразия Фано такой кубики изложена в [1], но там она применяется только к трехмерной кубике, а в работе [7] эта идея применена к четырехмерной кубике. В п. 1 мы формулируем соответствующий результат из [7]. Кроме этого приводим факты, изложенные в [5], о решетках неособых кубик, полученных малым возмущением особой кубики. Пункт 2 статьи посвящен доказательству теоремы 0.3. Это доказательство использует одну конструкцию из [7], а также описание графа примыканий для вещественных четырехмерных кубик в работе [5].

1. Многообразие Фано особой кубики. Через Δ^* обозначим множество неособых точек на дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$. Если $b \in \Delta^*$, то соответствующая кубика C_b имеет единственную особую точку $a \in C_b$, которая является простой двойной точкой. Заметим, что точка $a \in C_b$ однозначно определяется точкой $b \in \Delta^*$. Пусть $\mathbb{P}(a)$ – четырехмерное проективное пространство, точками

которого являются прямые в $\mathbb{P}^5$, проходящие через точку a . Обозначим через Q_b неособую квадрику в $\mathbb{P}(a)$, точками которой являются прямые, проходящие через точку $a \in C_b$ и касающиеся кубики C_b в этой точке. На квадрике $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$ лежит неособая КЗ-поверхность, точками которой являются прямые в $\mathbb{P}^5$, проходящие через точку $a \in C_b$ и лежащие на кубике C_b . Эту КЗ-поверхность будем обозначать через S_b , она является кубическим сечением квадрики $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$, т.е. S – 6-поляризованная КЗ-поверхность. Далее кубик C_b , квадрику Q_b , КЗ-поверхность S_b будем обозначать также через C , Q , S соответственно. Через F обозначается многообразие Фано кубики C , его точками являются прямые на C . Из определения поверхности S следует, что она лежит на многообразии F . Справедлива следующая (см. [1], [3], [7])

ЛЕММА 1.1. *Многообразие Фано F особой кубики C имеет особенности вдоль КЗ-поверхности $S \subset F$, других особенностей нет. Эти особенности являются обыкновенными коразмерности 2 двойными точками. Раздутие $\text{Bl}_S F \rightarrow F$ разрешает особенности многообразия F . Если КЗ-поверхность $S \subset \mathbb{P}(a)$ не содержит прямых, то многообразие $\text{Bl}_S F$ изоморфно многообразию $S^{[2]}$, которое получается из симметрического квадрата $S^{(2)}$ раздутием диагонали.*

Заметим, что если точка $b \in \Delta^*$ вещественная, то кубика C , квадрика Q , КЗ-поверхность S , многообразия $\text{Bl}_S F$, $S^{[2]}$ все будут вещественными многообразиями. Также будет вещественным изоморфизм $\text{Bl}_S F \cong S^{[2]}$. Еще заметим, что если КЗ-поверхность S содержит прямые, то можно немного сдвинуть точку b , чтобы новая КЗ-поверхность не содержала прямых.

Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует неособая комплексно аналитическая параметрическая кривая $b = \beta(t)$, $|t| < 1$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $\beta(0) = b_0$, $\beta(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = \beta(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ ;
- 3) кривая $b = \beta(t)$ эквивариантная, т.е. выполняется равенство $\beta(\bar{t}) = \tau(b(t))$, где черта означает комплексное сопряжение.

Через C_t будем обозначать семейство кубик $C_{\beta(t)}$. Кубика C_0 особая, имеющая единственную особую точку $a \in C_0$, которая является простой двойной точкой. Через Q будем обозначать квадрику $Q_{b_0} \subset \mathbb{P}(a)$, а через S обозначим КЗ-поверхность $S_{b_0} \subset Q$. При $t \neq 0$ кубики C_t неособые. Будем предполагать, что КЗ-поверхность $S \subset \mathbb{P}(a)$ не содержит прямых, в противном случае сдвинем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ в $\mathbb{R}\Delta^*$.

Тотальное пространство этого семейства кубик

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{|t| < 1} C_t \times t \subset \mathbb{P}^5 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно аналитическим пятимерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, заданной инволюцией комплексного сопряжения.

Пусть точка $t \neq 0$ – вещественная. Тогда существует непрерывное отображение

$$\varrho: C_t \rightarrow C_0,$$

удовлетворяющее свойствам (см., например, [8], [9]):

- 1) прообраз особой точки a гомеоморфен четырехмерной сфере Σ_t ;
- 2) отображение $\varrho: C_t \setminus \Sigma_t \rightarrow C_0 \setminus \{a\}$ является гомеоморфизмом;
- 3) отображение $\varrho: C_t \rightarrow C_0$ – эквивариантное, т.е. коммутирует с комплексным сопряжением.

Сферу $\Sigma_t \subset C_t$ будем называть *исчезающей сферой*. Она инвариантна относительно инволюции τ . Далее мы будем рассматривать маленькое число $0 < \varepsilon < 1$, которое будем уменьшать, если потребуется. Заметим, что многообразия $(C_{\pm t}, \tau)$, $(C_{\pm \varepsilon}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны при $0 < t < 1$. Обозначим кубики $C_{\pm \varepsilon}$ кратко через $C_{\pm}$, а исчезающие сферы на них обозначим через $\Sigma_{\pm}$.

Классы гомологий $[\Sigma_{\pm}] \in H^4(C_{\pm}, \mathbb{Z})$ обладают следующим свойством: один из них инвариантен относительно инволюции τ^* , а на другой класс гомологий эта инволюция действует умножением на -1 . Мы можем считать, что выполняется равенство

$$\tau_*([\Sigma_{\pm}]) = \pm[\Sigma_{\pm}], \quad (1.1)$$

заменяем в противном случае t на $-t$. Из этого предположения вытекает (см. [5]), что существует изоморфизм решеток

$$\Lambda_-(C_+) = -\Lambda_+(S), \quad (1.2)$$

где $S \subset Q \subset \mathbb{P}(a)$ – КЗ-поверхность, построенная выше. Причем решетка $\Lambda_-(C_-)$ не изоморфна решетке $-\Lambda_+(S)$, так как из равенства (1.1) следует, что

$$\text{rk } \Lambda_-(C_-) = \text{rk } \Lambda_-(C_+) + 1. \quad (1.3)$$

2. Доказательство основного результата. Для доказательства теоремы 0.3 достаточно доказать следующие предположения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть кубика C_+ и КЗ-поверхность S – ранее построенные многообразия, причем поверхность S не содержит прямых. Тогда многообразие Фано кубики C_+ эквивариантно диффеоморфно многообразию $S^{[2]}$, полученному из симметрического квадрата $S^{(2)}$ раздутием диагонали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть C – произвольная неособая вещественная кубика, для которой класс грубой проективной эквивалентности $[C]$ регулярен, причем множество вещественных точек $\mathbb{R}S$ ассоциированной КЗ-поверхности S не гомеоморфно несвязному объединению десяти сфер. Тогда существует кубика C_+ грубо проективно эквивалентная кубике C , которая получается верхней конструкцией, причем существует изоморфизм (1.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть C – произвольная неособая вещественная кубика, для которой класс грубой эквивалентности $[C]$ регулярен, S' , S'' – вещественные КЗ-поверхности, ассоциированные с кубикой C , причем множества вещественных точек $\mathbb{R}S'$, $\mathbb{R}S''$ не гомеоморфны несвязному объединению десяти сфер. Тогда многообразия $(S')^{[2]}$, $(S'')^{[2]}$ эквивариантно диффеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. Сначала мы кратко рассмотрим один пример бирациональных преобразований (см. подробности в [10], [11]).

В пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами x, y, z, u рассмотрим конус K , заданный уравнением $q(x, y, z) = u^2$, где $q(x, y, z)$ – невырожденная квадратичная форма от переменных x, y, z . После раздутия $\sigma: \text{Bl}_0 \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ собственный прообраз конуса будет

неособым многообразием. Обозначим его через $\widehat{K}$, он равен $\mathrm{Bl}_0 K$. Ограничение отображения σ на многообразии $\widehat{K}$ обозначим через $\sigma_K: \widehat{K} \rightarrow K$. Прообраз нуля при этом отображении $\sigma_K^{-1}(0)$ является квадрикой Q , заданной уравнением $q(x, y, z) = u^2$ в пространстве $\mathbb{P}^3$ с однородными координатами x, y, z, u . На квадрике $Q \subset \widehat{K}$ имеются два семейства прямых, причем индекс пересечения каждой прямой из этих семейств с квадрикой Q в многообразии $\widehat{K}$ равен -1 . Можно произвести стягивания вдоль каждого из семейств прямых на квадрике Q . Тогда из многообразия $\widehat{K}$ получаются два неособых многообразия K_1, K_2 . Эти многообразия изоморфны, соответствующий изоморфизм строится следующим образом. Рассмотрим инволюцию $\theta: K \rightarrow K$, заданную равенством $\theta(x, y, z, u) = (x, y, z, -u)$. Эта инволюция однозначно поднимается на многообразии $\widehat{K}$, причем она переставляет семейства прямых на квадрике Q . Следовательно, получаем отображение $\theta: K_1 \rightarrow K_2$, которое является изоморфизмом.

Пусть V – гиперплоскость в $\mathbb{C}^4$, на которой квадратичная форма $q(x, y, z) - u^2$ невырождена. Пересечение $K \cap V$ обозначим через K_V , а собственный прообраз конуса K_V при раздутьи $\sigma: \mathrm{Bl}_0 \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ обозначим через $\widehat{K}_V$. Тогда пересечение $\widehat{K}_V \cap Q$ является неособой коникой на проективной плоскости $\mathbb{P}(V)$, причем на квадрике Q эта коника имеет бистепень (1.1).

После рассмотрения примера докажем одно утверждение об однопараметрических семействах многообразий Фано.

Через $\mathcal{G}$ мы обозначили многообразие Грассмана, точками которого являются прямые в $\mathbb{P}^5$. Если $p \in \mathcal{G}$, то через L_p обозначается соответствующая прямая в $\mathbb{P}^5$. Через $\mathfrak{F}$ обозначим тотальное пространство многообразий Фано всех кубик, т.е.

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} F_b \times b = \{(p, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{B} \mid L_p \subset C_b\} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{B}.$$

Рассмотрим проекцию $\pi_{\mathcal{G}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Если $p \in \mathcal{G}$, то ее прообраз $\pi_{\mathcal{G}}^{-1}(p)$ состоит из точек (p, b) таких, что кубика C_b проходит через прямую L_p . Поэтому прообраз $\pi_{\mathcal{G}}^{-1}(p)$ изоморфен проективному пространству $\mathbb{P}^{51}$. Следовательно, проекция $\pi_{\mathcal{G}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{G}$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{P}^{51}$. В частности, получаем, что $\mathfrak{F}$ – неособое 59-мерное многообразие.

Через F_t будем обозначать семейство многообразий Фано кубик C_t , рассмотренных в п. 1. Многообразие Фано F_0 – особое, причем особые точки на нем образуют простую двойную КЗ-поверхность S , которая образована прямыми на кубике C_0 , проходящими через особую точку $a \in C_0$ (см. [1]). Поверхности Фано F_t неособые при $t \neq 0$ (см. [1]). Тотальное пространство этого семейства многообразий Фано обозначим через Φ , т.е.

$$\Phi = \bigcup_{|t| < 1} F_t \times t \subset \mathcal{G} \times \{|t| < 1\}.$$

ЛЕММА 2.4. *Пространство Φ является неособым комплексно аналитическим пятимерным многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно проверить, что пространство Φ – неособое в точках на поверхности $S \times 0$. Тотальное пространство

$$\bigcup_{b \in \Delta^*} S_b \times b \subset \mathbb{P}^5 \times \Delta^*$$

обозначим через $\mathfrak{S}$ и рассмотрим проекцию $\pi_\Delta: \mathfrak{S} \rightarrow \Delta^*$. Тогда для каждой точки $s \in S \times b_0$ касательное отображение

$$(\pi_\Delta)_*: \mathbb{T}_s \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T}_{b_0} \Delta^*$$

эпиморфно. Следовательно, образ касательного отображения

$$(\pi_{\mathcal{B}})_*: \mathbb{T}_s \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{T}_{b_0} \mathcal{B}$$

проекции $\pi_{\mathcal{B}}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{B}$ равен касательному пространству $\mathbb{T}_{b_0} \Delta$. Поэтому из трансверсальности кривой $\beta(t)$ к гиперповерхности Δ вытекает, что пространство Φ – неособое в точках на поверхности $S \times 0$. Лемма доказана, продолжим доказательство предложения 2.1.

Далее мы применяем конструкцию, изложенную в [7], которая является обобщением ранее рассмотренного примера. Обозначим диски $\{|t| < 1\} \subset \mathbb{C}$, $\{|u| < 1\} \subset \mathbb{C}$ через D_t , D_u соответственно. Для отображения

$$t = u^2: D_u \rightarrow D_t$$

рассмотрим расслоенное произведение

$$\mathcal{K} = \Phi \times_{D_t} D_u$$

и соответствующую проекцию

$$\pi: \mathcal{K} \rightarrow D_u.$$

Многообразие $\mathcal{K}$ имеют особенности вдоль КЗ-поверхности $S \subset F_0 \subset \mathcal{K}$, других особенностей нет. Эти особенности являются обыкновенными коразмерности 3 двойными точками. Раздутие

$$\sigma: \text{Bl}_S \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

разрешает особенности многообразия $\mathcal{K}$. Многообразие $\mathcal{K}$ – вещественное. Эти утверждения вытекают из определения многообразия $\mathcal{K}$ и леммы 2.4. Далее многообразие $\text{Bl}_S \mathcal{K}$ обозначаем через $\widehat{\mathcal{K}}$.

Многообразие $\sigma^{-1}(S)$ обозначим через $\mathcal{Q}$. Отображение $\sigma: \mathcal{Q} \rightarrow S$ является расслоением на квадратики. На каждом слое Q_s , где $s \in S$, имеются два семейства прямых P_1, P_2 . При движении точки s по любому замкнутому пути на поверхности S эти семейства прямых не могут переставляться, так как КЗ-поверхность S – односвязная. Поэтому на расслоении $\mathcal{Q}$ имеются два семейства прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Индекс пересечения прямых этих семейств с гиперповерхностью $\mathcal{Q}$ на многообразии $\widehat{\mathcal{K}}$ равен -1 . Это утверждение вытекает из рассмотренного примера. Поэтому можно произвести стягивание (в категории комплексно аналитических многообразий) на многообразии $\widehat{\mathcal{K}}$ вдоль одного из семейств прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Тогда получаются неособые многообразия $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ (см., например, [12]).

Если инволюция комплексного сопряжения $\tau: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ переставляет семейства прямых, то стягивания вдоль каждого из семейств прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ не являются вещественными отображениями. Покажем, что инволюция $\tau: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ не переставляет семейства прямых.

На многообразии $\mathcal{K} \subset \Phi \times D_u$ имеется инволюция $\theta: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, которая определяется равенством $\theta(\varphi, u) = (\varphi, -u)$. Эта инволюция поднимается до инволюции $\theta: \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}$, которая переставляет семейства прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Предположим, что инволюция комплексного сопряжения $\tau: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ также переставляет семейства прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, и покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Рассмотрим новую инволюцию комплексного сопряжения

$$\tau_-: \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}, \quad \text{где } \tau_- = \tau \circ \theta.$$

Тогда вещественное многообразие $(\widehat{\mathcal{K}}, \tau_-)$ можно получить прежней конструкцией, если заменить отображение $t = u^2: D_u \rightarrow D_t$ на отображение $t = -u^2: D_u \rightarrow D_t$. Из нашего предположения следует, что инволюция $\tau_-: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ не переставляет семейства прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Поэтому стягивания вдоль этих семейств на многообразии $(\widehat{\mathcal{K}}, \tau_-)$ являются вещественными отображениями. В результате мы получаем вещественные многообразия $(\mathcal{K}_1, \tau_-), (\mathcal{K}_2, \tau_-)$.

Рассмотрим отображение

$$(\mathcal{K}_1, \tau_-) \rightarrow (D_u, \tau),$$

индуцированное проекцией

$$(\mathcal{K}, \tau_-) \rightarrow (D_u, \tau).$$

Это отображение определяет расслоение, изучим его слои.

Если $u \neq 0$ и $t = -u^2$, то слой расслоения $(\mathcal{K}_1, \tau_-) \rightarrow (D_u, \tau)$ над точкой $u \in D_u$ равен многообразию Фано F_t , которое является неособым. Изучим слой над точкой $0 \in D_u$. Собственный прообраз особого многообразия $F_0 \subset \mathcal{K}$ при раздутии $\sigma: \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ равен $\text{Bl}_S F_0 = S^{[2]}$ (см. лемму 1.1). Пересечение $\text{Bl}_S F_0 \cap \mathcal{Q}$ является расслоением над поверхностью S , причем слой над точкой $s \in S$ лежит на квадрике Q_s и является неособой кривой бистепени $(1, 1)$ относительно двух прямых из разных семейств (см. предыдущий пример). Поэтому при стягивании $\widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}_1$ многообразие $\text{Bl}_S F_0$ изоморфно отображается на свой образ. Таким образом, нулевой слой расслоения $(\mathcal{K}_1, \tau_-) \rightarrow (D_u, \tau)$ является неособым многообразием, изоморфным многообразию $S^{[2]}$. Следовательно, все многообразия Фано F_t при вещественном и отрицательном t эквивариантно диффеоморфны многообразию $S^{[2]}$. Поэтому для них выполняются равенства

$$\text{rk } H_2(F_t, \mathbb{Z})_+ = \text{rk } H_2(S^{[2]}, \mathbb{Z})_+ = \text{rk } H_2(S, \mathbb{Z})_+.$$

Рассмотрим гомоморфизм Абеля–Якоби

$$\alpha: H_2(F_t, \mathbb{Z})_+ \rightarrow H_4(C_t, \mathbb{Z})_-,$$

который двумерному циклу Π на многообразии F_t сопоставляет четырехмерный цикл на кубике C_t , равный объединению прямых L_p , $p \in \Pi$. Этот гомоморфизм является изоморфизмом (см. [13]). Следовательно, при $t < 0$ выполняется равенство

$$\text{rk } H_4(C_t, \mathbb{Z})_- = \text{rk } H_2(S, \mathbb{Z})_+,$$

которое противоречит равенству (см. равенства (1.2), (1.3))

$$\text{rk } H_4(C_t, \mathbb{Z})_- = \text{rk } H_2(S, \mathbb{Z})_+ + 1.$$

Таким образом, инволюция $\tau: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ не переставляет семейства прямых $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Чтобы закончить доказательство предложения 2.1 нужно повторить предыдущие рассуждения для расслоения $(\mathcal{K}_1, \tau) \rightarrow (D_u, \tau)$. Тогда получим, что все многообразия Фано F_t при вещественном и положительном t эквивариантно диффеоморфны многообразию $S^{[2]}$. Предложение 2.1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Сначала нужно привести информацию про граф примыканий вещественных четырехмерных кубик, который полностью изучен в работе [5]. Этот граф изображен на рис. 1. Вершины изображают классы грубой проективной эквивалентности вещественных кубик, т.е. множество вершин равно $\mathcal{P}$. На рис. 1 не изображена ориентация ребер, но граф ориентирован таким образом, что параметр r на каждом ребре возрастает, если двигаться от начала ребра к концу. Параметр r равен рангу решетки $\Lambda_-(C)$, где C – кубика, представляющая данный класс эквивалентности. Параметр d равен размерности $\mathbb{F}_2$ -пространства

$$\Lambda_-(C)^*/\Lambda_-(C),$$

где $\Lambda_-(C)^* = \text{Hom}(\Lambda_-(C), \mathbb{Z})$. Вершины, которые изображены рядом имеет одинаковые значения параметров r, d . Они различаются типом решетки $\Lambda_-(C)$. Решетка $\Lambda_-(C)$ имеет тип I , если квадратичная форма на группе $\Lambda_-(C)^*$, полученная продолжением квадратичной формы решетки $\Lambda_-(C)$, принимает только целые значения. В противном случае решетка $\Lambda_-(C)$ имеет тип II . Вершины на рис. 1, которые не являются вершинами квадратов, имеют тип I , а остальные вершины, т.е. те, которые являются вершинами квадратов, имеют тип II . Если две вершины имеют одинаковые значения параметров r, d , то они обозначаются через $(r, d)_I, (r, d)_{II}$, в зависимости от типа. Остальные вершины обозначаются через (r, d) . Все вершины графа примыканий регулярные, кроме вершины $(14, 8)_I$. Вершина $(20, 2)$ изображает класс кубики, ассоциированной с КЗ-поверхностью, у которой множество вещественных точек состоит из десяти сфер.

Перейдем к определению ребер графа примыканий. На самом деле ребра в графе примыканий трех типов, но нам не потребуется это разделение ребер (см. подробности в [5]).

Особая точка a кубики C_b называется *каспом*, если в окрестности точки a на $\mathbb{P}^5$ существуют комплексно аналитические координаты $z_1, \dots, z_5$ такие, что кубика C_b в этой окрестности задается уравнением $z_1^3 + z_2^2 + \dots + z_5^2 = 0$. К множеству $\Delta^* \subset \mathcal{B}$ добавим точки $b \in \Delta$ такие, что кубика C_b имеет единственную особую точку, причем она является каспом. Полученное множество точек обозначим через Δ_0 . Если $b \in \Delta_0$ и кубика C_b имеет касп в качестве единственной особой точки, то в окрестности точки b на $\mathcal{B}$ существуют комплексно аналитические координаты $w_1, \dots, w_{55}$ такие, что множество Δ_0 задается уравнением $w_1^3 + w_2^2 = 0$ (см., например, [14]). Если точка $b \in \Delta_0$ вещественная, то кроме этого, координаты $w_1, \dots, w_{55}$ удовлетворяют условию $w_k \circ \tau = \overline{w}_k$, $k = 1, \dots, 55$, где черта означает комплексное сопряжение. Из этих утверждений вытекает, что множество вещественных точек $\mathbb{R}\Delta_0$ является топологическим многообразием.

Компоненты связности факторпространства $\mathbb{R}\Delta_0/\text{PGL}(6, \mathbb{R})$ являются ребрами графа примыканий. Множество таких ребер равно множеству классов грубой проективной эквивалентности 6-поляризованных вещественных КЗ-поверхностей (см. [5]).

Рис. 1. Граф примыканий

Опишем вершины, которые соединяют конкретное ребро e графа примыканий. Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка, которая принадлежит компоненте связности топологического многообразия $\mathbb{R}\Delta_0$, класс эквивалентности которой представляет ребро e . Тогда в $\mathcal{B}$ возьмем кривую $b = \beta(t)$, рассмотренную в п. 1. А также рассмотрим соответствующие кубики $C_{\pm}$ и КЗ-поверхность S , которые описаны в п. 1. Мы предполагаем, что КЗ-поверхность $S \subset \mathbb{P}(a)$ не содержит прямых, в противном случае сдвинем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$.

Тогда начало ребра e – это класс грубой проективной эквивалентности кубики C_+ , а конец ребра e – это класс грубой проективной эквивалентности кубики C_- . Заметим, что направление на ребре e выбрано так, что параметр r возрастает (см. равенство (1.3)).

Осталось заметить, что из определения графа примыканий и его устройства вытекает предложение 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.3. Из условия предложения и теоремы 0.2 следует, что КЗ-поверхности S' , S'' грубо эквивалентны. Поэтому существует гладкое семейство вещественных КЗ-поверхностей S_t , $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$, такое, что выполняются условия: (S', τ) изоморфна поверхности (S_0, τ) , а (S'', τ) изоморфна поверхности (S_1, τ) . Из семейства S_t получаем гладкое семейство вещественных четырехмерных многообразий $(S_t)^{[2]}$ такое, что многообразие $((S')^{[2]}, \tau)$ изоморфно многообразию $((S_0)^{[2]}, \tau)$, а $((S'')^{[2]}, \tau)$ изоморфно многообразию $((S_1)^{[2]}, \tau)$. Следовательно, многообразия $((S')^{[2]}, \tau)$, $((S'')^{[2]}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Предложение 2.3 доказано.

Таким образом, теорема 0.3 полностью доказана. Во введении было сформулировано следствие 0.4 этой теоремы, приведем его доказательство.

Прежде всего переформулируем построение многообразия, которое по условию следствия диффеоморфно многообразию $\mathbb{R}F$. Вырежем трубчатую окрестность $\mathbb{R}S$

на поверхности S , а затем профакторизуем оставшуюся часть с помощью инволюции τ , полученное многообразие с краем обозначим через V_1 . Вырежем трубчатую окрестность диагонали в произведении $\mathbb{R}S \times \mathbb{R}S$, а затем профакторизуем оставшуюся часть с помощью инволюции, переставляющей сомножители, полученное многообразие обозначим через V_2 . Следствие утверждает, что многообразие $\mathbb{R}F$ диффеоморфно многообразию, полученному из многообразий V_1, V_2 склейкой их краев.

А теперь переформулируем определение многообразия $S^{[2]}$. Раздвигая диагональ на произведении $S \times S$, полученное многообразие обозначим через W . На нем определена инволюция $\tau: W \rightarrow W$, задающая вещественную структуру, а кроме этого определена голоморфная инволюция $\sigma: W \rightarrow W$, которая индуцирована инволюцией, переставляющей сомножители в произведении $S \times S$. Многообразие $S^{[2]}$ получается факторизацией многообразия W с помощью инволюции σ , т.е. $S^{[2]} = W/\sigma$.

Инволюция $\theta = \tau \circ \sigma$ будет новой вещественной структурой на многообразии W . Обозначим через W^τ, W^θ множества неподвижных точек инволюций τ, θ . Пусть

$$\text{pr}: W \rightarrow S^{[2]}$$

– проекция, тогда выполняется равенство

$$\mathbb{R}S^{[2]} = \text{pr}(W^\tau) \cup \text{pr}(W^\theta).$$

Заметим теперь, что $\text{pr}(W^\tau), \text{pr}(W^\theta)$ – многообразия с общим краем. Кроме того, из определения многообразий V_1, V_2 видно, что V_1 диффеоморфно многообразию $\text{pr}(W^\theta)$, а V_2 диффеоморфно многообразию $\text{pr}(W^\tau)$.

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Для двух классов грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик не были исследованы их многообразия Фано. Это классы $(14, 8)_I, (20, 2)$. Для класса $(14, 8)_I$ не может быть справедливым утверждение, аналогичное тому, которое дает теорема 0.3, так как этот класс не регулярен. Класс $(20, 2)$ регулярен, поэтому можно надеяться, что для него справедливо утверждение, аналогичное тому, которое дает теорема 0.3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. H. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95** (1972), 281–356.
- [2] В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33:5** (1978), 77–89.
- [3] A. B. Altman, S. L. Kleiman, “Foundations of the theory of Fano schemes”, *Compositio Math.*, **34:1** (1977), 3–47.
- [4] В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43:1** (1979), 111–177.
- [5] S. Finashin, V. Kharlamov, “Deformation classes of real four-dimensional cubic hypersurfaces”, *J. Algebraic Geom.*, **17:4** (2008), 677–707; [arXiv: math.AG/0607137](https://arxiv.org/abs/math/0607137).
- [6] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques Surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [7] B. Hassett, “Special cubic fourfolds”, *Compositio Math.*, **120:1** (2000), 1–23.

- [8] Дж. Милнор, *Особые точки комплексных гиперповерхностей*, Мир, М., 1971.
- [9] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов*, Наука, М., 1984.
- [10] Б. Г. Мойшезон, “Об n -мерных компактных комплексных многообразиях, имеющих n алгебраически независимых мероморфных функций. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:1 (1966), 133–174.
- [11] J. Kollár, “The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori’s program”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **17**:2 (1987), 211–273.
- [12] В. А. Краснов, “Деформации комплексно-аналитических модификаций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 516–532.
- [13] A. Beauville, R. Donagi, “La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **301**:14 (1985), 703–706.
- [14] В. А. Краснов, “Жесткая изотопическая классификация вещественных трехмерных кубик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 91–134.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

01.02.2008