Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Прохорович, Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W_α^p , $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 616–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:08:01

Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W_α^p , $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа

М. А. Прохорович

Пусть (X, μ, d) – пространство однородного типа, где d – метрика, μ – мера, связанные условием удвоения с показателем $\gamma > 0$, $W_\alpha^p(X)$ – обобщенные классы Соболева, $p > 1$, $\alpha > 0$, и $\dim_H$ – размерность Хаусдорфа.

Мы докажем, что для любой функции $u \in W_\alpha^p(X)$, $p > 1$, $0 < \alpha < \gamma/p$, существует такое множество $E \subset X$, что $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$, и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} u \, d\mu = u^*(x),$$

более того,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |u - u^*(x)|^q \, d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

При $\alpha = 1$ подобный результат был получен ранее в работе Хайлаша–Киннунена (1998). Случай $0 < \alpha \leq 1$ рассмотрен нами в 2007 г.; при доказательстве существенно использовались структуры соответствующих емкостей.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. В последние годы значительно вырос интерес к анализу на метрических пространствах с мерой, а в частности, – к исследованию пространств гладких функций на них. Так в работе Хайлаша [1] были введены пространства Соболева $W_1^p(X)$ на любом метрическом пространстве X с мерой, а в работе [2] были построены их обобщения $W_\alpha^p(X)$. Много различных описаний этих пространств было получено в статьях [2], [3].

В работе [4] была изучена массивность множества точек Лебега для классов $W_1^p(X)$ в терминах мер Хаусдорфа. Позднее в работе [5] результаты из [4] были распространены на более общие пространства $W_\alpha^p(X)$ из [2]. Однако в работе [5] рассматривался лишь случай $0 < \alpha \leq 1$.

Вместе с тем существуют ситуации, когда классы Гёльдера $H^\alpha(X) \subset W_\alpha^p(X)$ нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$ (см., например, [6]). Поэтому условие $\alpha \leq 1$ существенно сужает множество возможных ситуаций. В этой работе мы изучаем массивность множества точек Лебега в терминах мер Хаусдорфа для функций из классов $W_\alpha^p(X)$ при $\alpha > 0$.

2. Терминология и определения. Пусть X – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ . Всюду ниже предполагаем, что мера μ и метрика d связаны условием удвоения

$$\mu(B(x, 2t)) \leq a_\mu \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь и далее $B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$ – шар с центром в x радиуса t . В таком случае тройку (X, d, μ) обычно называют *пространством однородного типа* [7].

Легко видеть, что из условия удвоения (1) вытекает его количественная форма¹

$$\mu(B(x, s)) \leq c \left(\frac{s}{t}\right)^\gamma \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad 0 < t \leq s, \quad (2)$$

при некотором $\gamma > 0$ (можно взять $c = a_\mu$ и $\gamma = \log_2 a_\mu$, где a_μ – постоянная из неравенства (1)). Число γ называется *показателем удвоения меры*, оно обычно выполняет роль размерности X .

Пусть $\alpha > 0$ и $1 \leq p < \infty$. Через $L^p = L^p(X)$ обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ , $C(X)$ – класс непрерывных на X функций.

Для функции $u \in L^p$ обозначим через $D_\alpha(u)$ класс всех неотрицательных μ -измеримых функций g на X , для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu E = 0$, что при $x, y \in X \setminus E$ выполнено неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)].$$

Следуя [2], введем шкалу пространств Соболева следующим образом:

$$W_\alpha^p(X) = \{u \in L^p : D_\alpha(u) \cap L^p \neq \emptyset\}, \quad \|u\|_{W_\alpha^p(X)} = [\|u\|_{L^p}^p + \inf_g \|g\|_{L^p}^p]^{1/p}, \quad (3)$$

где точная нижняя граница берется по всем функциям $g \in L^p \cap D_\alpha(u)$.

Пространства $W_1^p(X)$ при $X = \mathbb{R}^n$ совпадают с классическими пространствами Соболева первого порядка [1]. Отметим, что работе [1] предшествовала важная работа Кальдерона [8], в которой, в частности, было дано описание пространств $W_1^p(\mathbb{R}^n)$, не использующее специфических конструкций на $\mathbb{R}^n$, кроме метрики и меры.

Напомним, что $x \in X$ называется *точкой Лебега* для функции $u \in L_{\text{loc}}^1(X)$, если

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x, r)} u \, d\mu = u(x), \quad \text{где} \quad u_B = \int_B u \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u \, d\mu$$

– стандартное обозначение для среднего значения функции u по шару $B \subset X$.

Напомним еще определение *s-вместимости Хаусдорфа* H_∞^s и *хаусдорфовой размерности* $\dim_H$ множества $E \subset X$ (см., например, [9; § 2.10]):

$$H_\infty^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \right\}, \quad \dim_H(E) = \inf \{s : H_\infty^s(E) = 0\}.$$

¹В (2) и всюду ниже через c мы обозначаем различные положительные постоянные, значения которых не играют роли. Они могут меняться даже в пределах одной строки и зависеть только от a_μ из (1), а также от p и α из определения классов $W_\alpha^p(X)$ (см. (3)).

3. Основной результат. Отметим, что функции из классов $W_\alpha^p(X)$ определены лишь μ -почти всюду, а их свойства, с которыми мы будем иметь дело ниже, зависят от изменения значений функции на множествах μ -меры нуль, поэтому, следуя [4], мы будем далее считать, что все локально суммируемые функции в каждой точке определяются равенством

$$u(x) = \limsup_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} u \, d\mu.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \gamma/\alpha$ и $u \in W_\alpha^p(X)$. Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что $\dim_{\mathbb{H}}(E) \leq \gamma - \alpha p$ и предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} u \, d\mu = u^*(x)$$

существует для любого $x \in X \setminus E$. Более того,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q \, d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (4)$$

В случае $X = \mathbb{R}^n$ это было получено в [10]. История соответствующих результатов в этом направлении на $\mathbb{R}^n$ достаточно подробно изложена в [11; гл. 6.2].

На пространствах однородного типа при $\alpha = 1$ в терминах размерности Хаусдорфа этот результат был частично получен в [4] (равенство (4) в [4] не рассматривалось), а в терминах соответствующих емкостей – в [12], но только в более слабой форме – при всех $1/q > 1/p - 1/\gamma$. Отметим, что показатель q в (4) является точным. Его нельзя улучшить уже в случае $X = \mathbb{R}^n$.

Случай $0 < \alpha \leq 1$, $1/q = 1/p - 1/\gamma$, был ранее рассмотрен нами в терминах емкостей [13] и в терминах размерности Хаусдорфа [5], где существенно использовались емкости, введенные в [13].

При доказательстве основного утверждения мы опираемся на схемы рассуждений из [12], [4], видоизменяя и дополняя их соответствующим образом.

4. Вспомогательные утверждения. Доказательство следующей леммы 1 для $\alpha = 1$ приведено в [4], для остальных $\alpha > 0$ оно такое же.

ЛЕММА 1. Пусть $u \in W_\alpha^p(X)$ и $g \in D_\alpha(u) \cap L^p$. Тогда для любого шара $B = B(x, r) \subset X$

$$\int_B |u - u_B| \, d\mu \leq cr^\alpha \int_B g \, d\mu. \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^1(X)$, $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Тогда для любого шара $B = B(x, r)$

$$\left(\int_{B(x,r)} |f - f_B|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq cr^\alpha \left(\int_{B(x,2r)} (\mathcal{S}_\alpha f)^p \, d\mu \right)^{1/p}. \quad (6)$$

Неравенство (6) является частным случаем результатов работы [14]. Здесь

$$\mathcal{S}_\alpha u(x) = \sup_{B \ni x} r^{-\alpha} \int_B |u - u_B| \, d\mu$$

($\sup$ берется по всем шарам B , содержащим точку x).

Для $0 \leq \beta < \infty$ и $R > 0$ введем усеченную дробную максимальную функцию

$$\mathcal{M}_{\beta,R} g(x) = \sup_{0 < r < R} r^\beta \int_{B(x,r)} |g| d\mu.$$

Если $g \in L^1$ и $0 < \beta < \gamma$, то (см. теорему 3.3 в [15])

$$H_\infty^{\gamma-\beta}(\{x \in B(x,R) : \mathcal{M}_{\beta,R} g(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \int_X |g| d\mu. \quad (7)$$

ЛЕММА 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $g \in L^p$, $g \geq 0$. Тогда $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E) = 0$, где

$$E = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x,r)} g^p d\mu > 0 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу регулярности меры μ непрерывные функции плотны в L^p , поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно записать $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in C(X)$ и $\|g_2\|_{L^p} < \varepsilon$.

Для $\lambda > 0$ ведем обозначение

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x,r)} |g|^p d\mu > \lambda \right\} \subset \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x,r)} |g_2|^p d\mu > \lambda \right\}.$$

Последнее включение верно потому, что

$$\left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \int_{B(x,r)} |g_1|^p d\mu > \lambda \right\} = \emptyset.$$

Зафиксируем шар $B(y,n)$ и воспользуемся (7) с $\beta = \alpha p$:

$$H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E_\lambda \cap B(y,n)) \leq \frac{c}{\lambda} \int_X |g_2|^p d\mu < \frac{c\varepsilon}{\lambda}.$$

В силу произвольности ε имеем $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E_\lambda \cap B(y,n)) = 0$. Так как $E_\lambda = \bigcup_{n=1}^\infty (E_\lambda \cap B(y,n))$, то $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E_\lambda) = 0$ для любого λ .

Осталось заметить, что $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_{1/n}$. Таким образом $H_\infty^{\gamma-\alpha p}(E) = 0$, и лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Начало доказательства такое же, как в [5].

Пусть $g \in D^\alpha(u) \cap L^p$. Зафиксируем точку $x \in X$. Для любых $0 < r < R$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{-(n+1)}r < R \leq 2^{-n}r$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и воспользуемся неравенством Пуанкаре (5):

$$\begin{aligned} |u_{B(x,r)} - u_{B(x,R)}| &\leq |u_{B(x,r)} - u_{B(x,2^{-(n+1)}r)}| + |u_{B(x,2^{-(n+1)}r)} - u_{B(x,R)}| \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty \int_{B(x,2^{1-j}r)} |u - u_{B(x,2^{2-j}r)}| d\mu + \int_{B(x,2^{-(n+1)}r)} |u - u_{B(x,R)}| d\mu \\ &\leq c \sum_{j=1}^\infty 2^{(2-j)\alpha} r^\alpha \int_{B(x,2^{2-j}r)} g d\mu + cR^\alpha \int_{B(x,R)} g d\mu \\ &\leq c[R^\varepsilon + r^\varepsilon][\mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x)]^{1/p}. \end{aligned}$$

Здесь также использовано неравенство $R/(2^{-(n+1)}r) < 2^{-n}r/(2^{-(n+1)}r) = 2$ для оценки второго слагаемого. Очевидно, что правая часть стремится к нулю, когда $R \rightarrow 0$, если $\mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x) < \infty$. Это означает, что в точке x существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x,r)} u \, d\mu = u^*(x).$$

Множество точек, в которых такой предел не существует, содержится в множестве

$$E_1 = \{x \in X : \mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x) = \infty\}.$$

Дальнейшие рассуждения отличны от приведенных в [5], хотя также следуют предложенной в [5] схеме. Необходимо вычислить размерность Хаусдорфа множества E_1 . Для этого зафиксируем $y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, а затем воспользуемся (7):

$$\begin{aligned} H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(E_1 \cap B(y,n)) &\leq H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(\{x \in B(y,n) : \mathcal{M}_{(\alpha-\varepsilon)p,1} g^p(x) > \lambda\}) \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \int_X g^p \, d\mu. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно для любого $\lambda > 0$, значит, $H_\infty^{\gamma-(\alpha-\varepsilon)p}(E_1 \cap B(y,n)) = 0$ для любого шара $B(y,n)$. Так как $E_1 = \bigcup_{n=1}^\infty (B(y,n) \cap E_1)$, то $\dim_H(E_1) \leq \gamma - \alpha p$.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения теоремы. Так как $u \in W_\alpha^p(X)$, то $\mathcal{S}_\alpha u \in L^p$ [3]. Введем обозначение

$$E_2 = \left\{ x \in X : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{\alpha p} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \mathcal{S}_\alpha u^p \, d\mu > 0 \right\}.$$

По лемме 2 в $X \setminus E_2$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq c \lim_{r \rightarrow 0} r^\alpha \left(\int_{B(x,2r)} (\mathcal{S}_\alpha u)^p \, d\mu \right)^{1/p} = 0.$$

Рассмотрим теперь множество $E = E_1 \cup E_2$. Для любого $x \in X \setminus E$

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q \, d\mu \right)^{1/q} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^q \, d\mu \right)^{1/q} + \lim_{r \rightarrow 0} |u_{B(x,r)} - u^*(x)| = 0. \end{aligned}$$

По лемме 3 $H_\infty^{\gamma-\beta}(E_2) = 0$, следовательно, $\dim_H(E_2) \leq \gamma - \alpha p$. Это же неравенство верно и для размерности Хаусдорфа множества E : $\dim_H(E) \leq \gamma - \alpha p$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Hajlasz, "Sobolev spaces on an arbitrary metric space", *Potential Anal.*, **5:4** (1996), 403–415.
- [2] D. Yang, "New characterization of Hajlasz–Sobolev spaces on metric spaces", *Sci. China Ser. A*, **46:5** (2003), 675–689.

- [3] И. А. Иванишко, “Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 937–941.
- [4] P. Hajlasz, J. Kinnunen, “Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **14**:3 (1998), 601–622.
- [5] М. А. Прохорович, “Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах”, *Матем. заметки*, **82**:1 (2007), 99–107.
- [6] A. Jonsson, “Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **290**:1 (2004), 86–104.
- [7] R. R. Coifman, G. Weiss, “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1977), 569–645.
- [8] A. P. Calderón, “Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions”, *Studia Math.*, **44** (1972), 563–582.
- [9] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
- [10] H. Federer, W. P. Ziemer, “The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p -th power summable”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22**:1 (1972), 139–158.
- [11] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Grundlehren Math. Wiss., **314**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1996.
- [12] J. Kinnunen, V. Latvala, “Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **18**:3 (2002), 685–700.
- [13] М. А. Прохорович, “Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша–Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 2006, № 1, 19–23.
- [14] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, “Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах с мерой”, *Тр. ин-та матем. НАН Беларуси*, **14**:1 (2006), 51–61.
- [15] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

М. А. Прохорович

Белорусский государственный университет

E-mail: prohorovich@mail.ru

Поступило

25.03.2008