Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Тютянов, П. В. Бычков, Конечные группы с двумя
недополняемыми подгруппами, *Матем. заметки*, 2009,
том 85, выпуск 4, 630–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:11:57

Конечные группы с двумя недополняемыми подгруппами

В. Н. Тютянов, П. В. Бычков

Описываются конечные группы, содержащие в точности две недополняемые подгруппы.

Библиография: 11 названий.

Группы, содержащие систему подгрупп с заданными условиями, изучались в работах Холла [1], Черникова [2], [3], Черниковой (Баевой) [4], [5], а также Горчакова [6], [7]. Подгруппу L назовем *дополняемой* в группе G , если в группе G существует подгруппа K такая, что $L \cap K = 1$ и $G = LK$. Группу называют *вполне факторизуемой*, если в ней дополняема любая подгруппа. В работе Маланиной [8] был рассмотрен класс групп с единственной недополняемой подгруппой. При этом было установлено, что группы с таким условием конечны и являются p -группами. Случай, когда число недополняемых подгрупп в группе больше единицы, значительно сложнее. В данной работе приведено описание конечных групп с двумя недополняемыми подгруппами.

Пусть p и t – различные простые числа, D_8 – группа диэдра порядка 8, $M(p)$ и $M_3(p)$ – экстраспециальные группы нечетного порядка p^3 экспоненты p и p^2 соответственно [9; гл. 5]. В данных обозначениях доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Конечная группа G имеет в точности две недополняемые подгруппы тогда и только тогда, когда*

- 1) G – абелева группа и $G \in \{Z_{p^3}, Z_{p^2} \times Z_p, Z_{p^2} \times Z_t\}$;
- 2) G – неабелева группа одного из следующих типов:
 - (a) $G \cong D_8 \times Z_p$, p – нечетное число;
 - (b) $G \cong [Z_{4p}]Z_2$, p – нечетное число;
 - (c) G – бипримарная группа порядка $2^3 \cdot p$ с диэдральной силовской 2-подгруппой $[\langle x \rangle] \langle \tau \rangle$, где $|x| = 4$, $|\tau| = 2$, и $G = [\langle l \rangle \times (\langle x^2 \rangle \times \langle \tau \rangle)] \langle \mu \rangle$, где μ – инволюция, $|l| = p$, $l^\mu = l^{-1}$, $(x^2)^\mu = x^2$, $\tau^\mu = x^2 \tau$;
 - (d) $G \cong Z_t \times M(p)$;
 - (e) G – бипримарная группа порядка $p^3 \cdot t$ с силовской p -подгруппой $P \cong M(p)$,

$$P = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, ab = bac, ac = ca, cb = bc \rangle,$$

$$\text{и } G = [\langle l \rangle \times (\langle c \rangle \times \langle a \rangle)] \langle b \rangle, \text{ где } |l| = t, l^b = l^{-1}, c^b = c, a^b = ac;$$

- (f) G – группа Шмидта типа $\{t, p^2\}$ для подходящих значений p и t ;
- (g) $G \cong D_8 \times Z_2$;
- (h) $G \cong M(p) \times Z_p$;
- (i) $G \cong M_3(p)$.

Все рассматриваемые группы конечны. Основные обозначения и определения можно найти в [9], [10]. Приведем некоторые из них для удобства читателя. Если n – натуральное число, то $\pi(n)$ обозначает множество всех простых делителей числа n . Если G – группа, то $\pi(G) = \pi(|G|)$, где $|G|$ – порядок группы G . Запись $[A]B$ обозначает полупрямое произведение групп A и B , где A – нормальная подгруппа; $A * B$ – центральное произведение групп A и B . Если $p \in \pi(G)$, то $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G . Через $I(G)$ обозначим множество всех инволюций группы G . Запись $M < G$ означает, что подгруппа M максимальна в группе G . Через $\Phi(G)$ обозначим подгруппу Фраттини группы G .

В ходе доказательства теоремы будем последовательно исключать случаи, когда группа G имеет больше или меньше двух недополняемых подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1) G – абелева группа с двумя недополняемыми подгруппами. Если все силовские p -подгруппы в группе G элементарные абелевы, тогда группа G является вполне факторизуемой, что невозможно. Зафиксируем $r \in \pi(G)$ и $G_r \in \text{Syl}_r(G)$ так, что G_r не является элементарной абелевой группой. Пусть $x \in G_r$ и $|x| = \max_{g \in G_r} |g|$. Пусть сначала $|x| = r^2$. В этом случае $G = \langle x \rangle \times G_1$, где $G_1 < G$. Если $G_1 = 1$, то $G \cong Z_{r^2}$ и имеет в точности одну недополняемую подгруппу, что невозможно. Следовательно, $G_1 \neq 1$. Очевидно, что подгруппа $\langle x^r \rangle$ недополняема в группе G . Так же подгруппы вида $\langle x^r \rangle \times \tilde{G}$, где $1 < \tilde{G} \leq G_1$, будут недополняемы в группе G . Поскольку в группе G в точности две недополняемые подгруппы, $G_1 \cong Z_t$, где $t \in \pi(G)$. Таким образом, $G \cong Z_{r^2} \times Z_r$ или $G \cong Z_{r^2} \times Z_t$, где $t \neq r$.

Пусть $|x| = r^3$. Тогда $G = \langle x \rangle \times G_1$. Подгруппы $\langle x^r \rangle$, $\langle x^{r^2} \rangle$ недополняемы в группе G . Поскольку недополняемых в группе G подгрупп в точности две, $G_1 = 1$ и $G \cong Z_{r^3}$ – группа с двумя недополняемыми подгруппами.

Если $|x| \geq r^4$, то подгруппы $\langle x^r \rangle$, $\langle x^{r^2} \rangle$, $\langle x^{r^3} \rangle$ недополняемы в G , и данный случай невозможен.

Таким образом, $G \in \{Z_{r^3}, Z_{r^2} \times Z_r, Z_{r^2} \times Z_t, t \neq r\}$.

2) G – неабелева группа с двумя недополняемыми подгруппами. Из [7] следует, что в группе G имеется подгруппа H такая, что $|H| = p \in \pi(G)$ и H – недополняемая в G подгруппа. Рассмотрим следующие два случая.

(а) $H \triangleleft G$. Пусть U – вторая недополняемая подгруппа в группе G . Так как недополняемых подгрупп в группе G в точности две, то $U \triangleleft G$. Фактор-группа $\bar{G} = G/H$ либо имеет одну недополняемую подгруппу, либо вполне факторизуема. В частности, из [8], [3] следует, что группа G является разрешимой. Далее это будем предполагать без дополнительных оговорок.

Предположим сначала, что $|G| = p^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $k \geq 1$ и $\alpha_i \geq 1$ для всех $i = 0, \dots, k$. Так как $H \triangleleft G$, то если $H \in \text{Syl}_p(G)$, тогда $G = [H]G_{p'}$, где $G_{p'}$ – холлова p' -подгруппа в группе G . Следовательно, H дополняема в G , что невозможно. Таким образом, H не является силовской p -подгруппой в группе G .

Покажем, что $HG_{p'}$ не имеет дополнения в группе G . Так как $G_{p'}$ – холлова p' -подгруппа в группе G , то дополнение к $HG_{p'}$ в G может быть только p -группой. Предположим, что такое дополнение существует, и обозначим его через $\tilde{G}_p$. Тогда $G = (HG_{p'})\tilde{G}_p$, где $G_p = [H]\tilde{G}_p$ для некоторой $G_p \in \text{Syl}_p(G)$. Поскольку H – абелева группа, по теореме 15.8.6 [10] подгруппа H имеет дополнение в G , что невозможно. Таким образом, $HG_{p'}$ будет недополняемой подгруппой в группе G , а поэтому $U = HG_{p'} \triangleleft G$. Точно так же можно показать, что подгруппа HG_1 , где $1 < G_1 < G_{p'}$, не

имеет дополнения в группе G . Поскольку в группе G в точности две недополняемые подгруппы, то $G_{p'} \cong Z_t$, $t \in \pi(G)$. Таким образом, $G = G_p G_t$, где $G_p \in \text{Syl}_p(G)$, $G_t \in \text{Syl}_t(G)$, $G_t \cong Z_t$, $U = HG_t \triangleleft G$.

Пусть сначала $\bar{G} = G/H$ имеет одну недополняемую подгруппу. В этом случае $\bar{G}$ является примарной группой и $|\bar{G}| \leq r^3$, где r – простое число [8]. Если $r \neq p$, то H дополняема в группе G , что невозможно. Следовательно, $r = p$ и G – p -группа, что также невозможно, так как $k \geq 1$.

Рассмотрим случай, когда $\bar{G} = G/H$ – вполне факторизуемая группа. Пусть $1 \neq R < G_p$ и $R \neq H$. Тогда подгруппа R дополняема в группе G . Следовательно, R дополняема в G_p . Таким образом, G_p имеет одну недополняемую подгруппу H . Если G_p абелева, то из [8] следует, что $G_p \cong Z_{p^2}$. Однако в группе Z_{p^2} нет собственных подгрупп, отличных от H , и данный случай невозможен. Следовательно, G_p – неабелева группа.

Пусть сначала $p = 2$. В этом случае из [8] следует, что силовская 2-подгруппа группы G есть $[\langle x \rangle] \langle \tau \rangle \cong D_8$, $|x| = 4$, $|\tau| = 2$, $x^\tau = x^{-1}$, $H = \langle x^2 \rangle$, $U = \langle x^2 \rangle \times T$, где $T \cong Z_t$ и $T = \langle l \rangle$. Если $C_G(T) = G$, то $G \cong Z_t \times D_8$ – группа с двумя недополняемыми подгруппами $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^2 \rangle \times \langle l \rangle$. Если $C_G(T) = \langle x \rangle \times T$, то

$$G = [\langle x \rangle \times T] \langle \tau \rangle = [\langle lx \rangle] \langle \tau \rangle \cong [Z_{4t}] Z_2$$

– диэдральная группа с двумя недополняемыми подгруппами $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^2 l \rangle$. Если $C_G(T) = T \times (\langle x^2 \rangle \times \langle \tau \rangle)$, то $G = [T \times (\langle x^2 \rangle \times \langle \tau \rangle)] \langle \mu \rangle$, где μ – инволюция, $l^\mu = l^{-1}$, $(x^2)^\mu = x^2$, $\tau^\mu = x^2 \tau$. В этом случае группа G имеет две недополняемые подгруппы $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^2 l \rangle$.

Пусть $p > 2$. Из [8] следует, что силовская p -подгруппа группы G имеет следующее строение:

$$P = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, ab = bac, ca = ac, cb = bc \rangle,$$

$H = \langle c \rangle \triangleleft G$, $U = HT \triangleleft G$, где $T \cong Z_t$ и $T = \langle l \rangle$. Пусть сначала $C_G(\langle c \rangle) = P \triangleleft G$. Тогда $G = PU$ и

$$\bar{G} = G/\langle c \rangle = \bar{P} \times \bar{U} \cong (Z_p \times Z_p) \times Z_t.$$

Поскольку $\langle c \rangle = \Phi(P)$, то по теореме Бернсайда [9; 5.1.4] T действует тождественно на P и $G = P \times T \cong P \times Z_t$. В этом случае группа G имеет две недополняемые подгруппы $\langle c \rangle$ и $\langle ct \rangle$. Пусть теперь $C_G(\langle c \rangle) = G$. Если $C_G(T) = T \times (\langle c \rangle \times \langle a \rangle)$, то $G = [T \times (\langle c \rangle \times \langle a \rangle)] \langle b \rangle$, где $l^b = l^{-1}$, $c^b = c$, $a^b = ac$ и группа G имеет две недополняемые подгруппы $\langle c \rangle$ и $\langle ct \rangle$. Если $C_G(T) = G$, то $G = P \times T$, и данный случай уже был рассмотрен.

Если в силовской p -подгруппе группы G нет подгрупп, отличных от H , тогда она изоморфна Z_{p^2} . Если силовская t -подгруппа группы G инвариантна в G , то, очевидно, что G – группа Шмидта типа $\{t, p^2\}$ при подходящих t и p . Если силовская t -подгруппа не инвариантна в группе G , то, как и выше, с помощью теоремы Бернсайда легко показать, что $G \cong Z_t \times Z_{p^2}$. Поскольку G – неабелева группа, данный случай невозможен.

Пусть G является неабелевой p -группой. Предположим, что фактор-группа $\bar{G} = G/H$ имеет одну недополняемую подгруппу. Пусть сначала $p = 2$. Из [8] следует, что $\bar{G} = G/H \cong D_8$ или $\bar{G} \cong Z_4$. Если $\bar{G} \cong Z_4$, то G – циклическая группа, что невозможно. Поэтому $\bar{G} \cong D_8$. Подгруппа $H \subseteq \Phi(G)$, в противном случае существует

подгруппа M , максимальная в группе G такая, что $G = [H]M$ и подгруппа H дополняема в G , что невозможно. Так как $\bar{G}$ – неабелева группа, то $H \neq \Phi(G)$. Очевидно, что $\Phi(G)$ недополняема в G , поэтому $U = \Phi(G)$. Таким образом, $H < U = \Phi(G)$. При этом $|G : \Phi(G)| = 4$. Следовательно, $\Phi(G) \cong Z_2 \times Z_2$ или $\Phi(G) \cong Z_4$. Пусть сначала $\Phi(G) = \langle h \rangle \times \langle v \rangle \cong Z_2 \times Z_2$, где $\langle h \rangle = H$. В этом случае подгруппа $\langle hv \rangle$ дополняема в G . С другой стороны, $\langle hv \rangle \subseteq \Phi(G)$ и не может быть дополняемой в G . Таким образом, $\Phi(G) \cong Z_4$. Пусть $\Phi(G) = \langle x \rangle$, где $\langle x^2 \rangle = H$. Рассмотрим подгруппу $M < G$. Тогда M дополняема в группе G . Следовательно, $G = [M]\langle t \rangle$, где t – инволюция в группе G . Очевидно, что $\langle x \rangle \subset M$. Рассмотрим дополняемую в G подгруппу $\langle x^2 \rangle \times \langle t \rangle$ и обозначим через S ее дополнение в группе G . Тогда $S \cap \Phi(G) = 1$ и $G = [\Phi(G)]S$, что невозможно.

Пусть $p > 2$. Из [8] следует, что $\bar{G} = G/H \cong M(p)$ или $\bar{G} \cong Z_{p^2}$. Если $\bar{G} \cong Z_{p^2}$, то G – циклическая группа, что невозможно. Поэтому рассмотрим первый случай. Точно так же, как в случае $p = 2$, можно показать, что такой p -группы с двумя недополняемыми подгруппами не существует.

Следовательно, $\bar{G} = G/H$ – вполне факторизуемая p -группа. Так как всякая подгруппа порядка p из $\bar{G}$ дополняема в $\bar{G}$, то $\Phi(\bar{G}) = 1$. Поэтому $\bar{G}$ – элементарная абелева p -группа. Отсюда следует, что $H = G' = \Phi(G)$. Из [11; лемма 5.2] получаем, что $G = (A_1 * \dots * A_s)Z(G)$, где A_i – экстраспециальные p -группы порядка p^3 .

Пусть сначала $p = 2$. Обозначим $E = A_1 * \dots * A_s$. Тогда подгруппа E одного из следующих двух типов:

$$E \cong (Q_8)^s \quad \text{или} \quad E \cong (Q_8)^{s-1} * D_8,$$

где Q_8 и D_8 – соответственно кватернионная и диэдральная группы восьмого порядка [9; теорема 5.5.2]. Пусть сначала E – группа первого типа. Обозначим $A_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$, где $|x_1| = |y_1| = 4$. Группа G содержит следующие две максимальные подгруппы:

$$L_1 = \langle x_1, A_2, \dots, A_s, Z(G) \rangle \quad \text{и} \quad L_2 = \langle y_1, A_2, \dots, A_s, Z(G) \rangle.$$

Если подгруппа L_1 дополняема в группе G , то подгруппа $\langle x_1 \rangle$ дополняема в A_1 , что невозможно. Точно так же подгруппа L_2 недополняема в G . Поэтому группа G содержит не менее трех недополняемых подгрупп, что невозможно. Пусть теперь E – группа второго типа. Если $s > 1$, то точно так же, как в случае, когда E – группа первого типа, показывается, что в группе G имеется не менее трех недополняемых подгрупп. Поэтому $s = 1$ и $E \cong D_8$. Если $G = E$, то группа G имеет одну недополняемую подгруппу, поэтому $H \subset Z(G)$. Предположим, что $Z(G) \neq U$. В этом случае $G = Z(G) \times G_1$, где G_1 – некоторая подгруппа группы G . Отсюда следует, что

$$G/Z(G) = EZ(G)/Z(G) \cong E/E \cap Z(G) \cong Z_2 \times Z_2 \cong G_1.$$

Поэтому G – абелева группа, что невозможно. Таким образом, $U = Z(G)$ и $H < U = Z(G)$. В этом случае подгруппа E дополняема в группе G . Из тождества Дедекинда следует, что $G = E \times Z_1$, где $Z_1 < Z(G)$, $U = H \times Z_1$. Если $|Z_1| > 2$, то существует нетривиальная подгруппа $T_1 < Z_1$ и подгруппа $H \times T_1$ недополняема в G . Следовательно, группа G имеет не менее трех недополняемых подгрупп, что невозможно. Поэтому

$$G = [\langle x \rangle]\langle t \rangle \times \langle s \rangle \cong D_8 \times Z_2.$$

В этом случае группа G имеет в точности две недополняемые подгруппы $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^2 \rangle \times \langle s \rangle$.

Пусть $p > 2$. Обозначим $E = A_1 * \dots * A_s$. Тогда подгруппа E одного из следующих двух типов:

$$E \cong (M(p))^s \quad \text{или} \quad E \cong M_3(p) * (M(p))^{s-1},$$

где $M(p)$ и $M_3(p)$ – экстраспециальные группы порядка p^3 и экспонент p и p^2 соответственно [9; теорема 5.5.2]. Пусть сначала $E \cong (M(p))^s$, $s \geq 1$. Если $s \geq 2$, то подгруппы $Z(G)(A_1 * \dots * A_{s-1})$ и $Z(G)(A_2 * \dots * A_s)$ недополняемы в группе G . Поэтому в группе G существует не менее трех недополняемых подгрупп. Следовательно, $s = 1$ и $E \cong M(p)$. Так как группа $M(p)$ имеет в точности одну недополняемую подгруппу, то $E \neq G$ и $G = E * Z(G)$. Точно так же, как в случае $p = 2$, показывается, что $G \cong M(p) \times Z_p$. Так как

$$M(p) \cong \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, ab = bac, ac = ca, bc = cb \rangle,$$

обозначив Z_p через $\langle t \rangle$, получим, что группа G имеет две недополняемые подгруппы $\langle c \rangle$ и $\langle c \rangle \times \langle t \rangle$.

Пусть теперь $E \cong M_3(p) * (M(p))^{s-1}$, $s \geq 1$, и $A_1 \cong M_3(p)$. Если $s > 1$, то подгруппы $(A_2 * \dots * A_s)Z(G)$ и $(A_1 * \dots * A_{s-1})Z(G)$ недополняемы в группе G , и G имеет не менее трех недополняемых подгрупп, что невозможно. Следовательно, $s = 1$ и $E \cong M_3(p)$. Группа $E = [\langle a \rangle] \langle b \rangle$, где $a^{p^2} = b^p = 1$, $a^b = a^{p+1}$, и E имеет в точности две недополняемые подгруппы $\langle a^p \rangle$ и $\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle$. Поэтому, если $Z(G) \subseteq E$, то $G = E$ – группа с двумя недополняемыми подгруппами. Пусть $Z(G) \not\subseteq E$, тогда $G = E * Z(G)$. Предположим, что $Z(G) \neq U$. В этом случае $G = Z(G) \times G_1$, где G_1 – некоторая подгруппа группы G . Отсюда следует, что

$$G/Z(G) \cong Z_p \times Z_p \cong G_1,$$

и группа G абелева, что невозможно. Следовательно, $Z(G) = U$. В этом случае E дополняема в G . Из тождества Дедекинда следует, что $G = E \times Z_1$, где $Z_1 < Z(G)$, $U = H \times Z_1$. Если $|Z_1| > p$, то существует нетривиальная подгруппа T_1 такая, что $T_1 < Z_1$ и подгруппа $H \times T_1$ недополняема в группе G . Противоречие с тем, что в группе G в точности две недополняемые подгруппы. Таким образом, $G \cong M_3(p) \times Z_p$. Поскольку $M_3(p)$ имеет две недополняемые подгруппы, группа G содержит не менее трех недополняемых подгрупп, что невозможно.

(b) Подгруппа H не инвариантна в группе G . Обозначим через U вторую недополняемую подгруппу в группе G . Тогда $|H| = |U| = p$ и U сопряжена с подгруппой H в группе G . Число сопряженных с H подгрупп в группе G равно $|G : N_G(H)| = 2$, поэтому $N_G(H) \triangleleft G$. Так как подгруппы U и H сопряжены в группе G , то $U \subseteq N_G(H) \triangleleft G$. В группе G в точности две недополняемые подгруппы U и H , поэтому $N_G(H)$ дополняем в группе G . Таким образом, $G = [N_G(H)] \langle t \rangle$, где $t \in I(G)$, причем $H^t = U$ и $(N_G(H))^t = N_G(H) = N_G(H^t) = N_G(U)$. Отсюда следует, что подгруппа $L = H \times H^t = H \times U \triangleleft G$. Пусть $H = \langle h \rangle$, тогда $H^t = \langle h^t \rangle$. Очевидно, что подгруппа $\langle hh^t \rangle$ дополняема в группе G . Тогда $G = \langle hh^t \rangle S$, где S – дополнение к $\langle hh^t \rangle$ в G . Так как $\langle hh^t \rangle \subset L$, то $L = \langle hh^t \rangle (L \cap S) = \langle hh^t \rangle \times (L \cap S)$. Подгруппа $L \cap S$ порядка p является нормальной в S и $\langle hh^t \rangle \subseteq N_G(L \cap S)$, поэтому $L \cap S \triangleleft G$. Так как подгруппа H не инвариантна в G , то $L = H \times (L \cap S)$. Подгруппа L дополняема в G и $G = [L]T = [H \times (L \cap S)]T$, где T – дополнение в G к L . Отсюда следует, что $G = H([L \cap S]T)$ и подгруппа H дополняема в G , что невозможно. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Hall, “Complemented groups”, *J. London Math. Soc.*, **12** (1937), 201–204.
- [2] С. Н. Черников, *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, М., Наука, 1980.
- [3] С. Н. Черников, “Группы с системами дополняемых подгрупп”, *Матем. сб.*, **35**:1 (1954), 93–128.
- [4] Н. В. Баева, “Вполне факторизуемые группы”, *Докл. АН СССР*, **92**:5 (1953), 877–880.
- [5] Н. В. Черникова, “Группы с дополняемыми подгруппами”, *Матем. сб.*, **39**:3 (1956), 273–292.
- [6] Ю. М. Горчаков, *Группы с конечными классами сопряженных элементов*, М., Наука, 1978.
- [7] Ю. М. Горчаков, “Примитивно факторизуемые группы”, *Ученые записки Пермск. ун-та*, 1960, № 17, 15–31.
- [8] Г. А. Маланьина, “Группы с одной недополняемой подгруппой”, *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*, ИМ АН УССР, Киев, 1993, 188–194.
- [9] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York, 1968.
- [10] М. Холл, *Теория групп*, ИЛ, М., 1962.
- [11] Y. Berkovich, “On subgroups of finite p -groups”, *J. Algebra*, **224**:2 (2000), 198–240.

В. Н. Тютянов

Гомельский государственный университет
им. Франциска Скорины,
Республика Беларусь
E-mail: tyutytyanov@front.ru

Поступило

23.03.2007

П. В. Бычков

Гомельский государственный университет
им. Франциска Скорины
E-mail: pbychkov@tut.by