Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, Дифференциальные подстановки первого порядка для уравнений интегрируемых в $\mathbb{S}^n$, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 2, 178–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:28:08

УДК 517.957

Дифференциальные подстановки первого порядка для уравнений интегрируемых в $\mathbb{S}^n$

М. Ю. Балахнев

Определены необходимые условия, при которых интегрируемые векторные эволюционные уравнения третьего порядка допускают преобразования типа Миуры. Для уравнений, интегрируемых на n -мерной сфере, найдены дифференциальные подстановки первого порядка.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Классификация и изучение различных свойств интегрируемых векторных эволюционных уравнений является относительно новым и в то же время бурно развивающимся направлением в области исследований точно интегрируемых уравнений и систем [1]–[13]. Идеи, изложенные в [3] и [4], нашли продолжение в работах [5]–[10], большинство из которых посвящены классификации уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u}_3 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_1 \mathbf{u}_1 + f_0 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial x^i}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ – неизвестный вектор, принадлежащий некоторому n -мерному векторному пространству V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а f_k – скалярные функции независимых переменных $u_{[i,j]} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, $0 \leq i \leq j \leq 2$.

Полная классификация интегрируемых уравнений (1.1) в настоящее время не завершена, так как не удалось преодолеть технические трудности, возникающие в проведении расчетов. Кроме того, даже уравнения, полученные при сильных ограничениях на f_k , настолько громоздки, что доказать их интегрируемость, например, путем вычисления автопреобразований Беклунда, не представляется возможным. Однако иногда удается найти дифференциальные подстановки, связывающие решения новых уравнений с решениями уже известных, что позволяет систематизировать результаты классификации (см., например, [14]–[17]). Примеры дифференциальных подстановок для векторных эволюционных уравнений можно найти в [7] и [10].

Соколов и Мешков предложили в [4] необходимые условия интегрируемости уравнения (1.1) в виде серии законов сохранения

$$D_t \rho_k = D_x \theta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ (грант № 1.5.07).

где ρ_k, θ_k – функции переменных $u_{[i,j]}$, а операторы D_x и D_t определены следующим образом:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{u}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\infty} D_x^i (\mathbf{u}_3 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_1 \mathbf{u}_1 + f_0 \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i}.$$

В частности, нулевое условие интегрируемости влечет [4]

$$f_2 = \frac{3}{2} D_x \ln f, \quad f = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1). \quad (1.3)$$

В данной работе рассматриваются преобразования типа Миуры для уравнения (1.1) и определены необходимые условия для функций f_k в случае, когда (1.1) допускает указанные преобразования. Найдены дифференциальные подстановки первого порядка для уравнений интегрируемых на n -мерной сфере, в результате упрощены списки представленные в [4] и [8].

2. Основные теоремы. Первой дифференциальной подстановкой для эволюционных скалярных уравнений является, по-видимому, известная подстановка Миуры

$$u = iv_1 - v^2 - \nu, \quad i^2 = -1, \quad (2.1)$$

где ν – параметр, связывающая решения $u(x, t)$ уравнения КдФ $u_t = u_3 - 6uu_1$ с решениями $v(x, t)$ модифицированного уравнения КдФ $v_t = v_3 + 6v^2v_1 - 6\nu v_1$.

Классификация дифференциальных подстановок вида $u = P(x, v, v_1)$ для эволюционных уравнений с произвольной функцией представлена в [18]. В работе [19] изучены связи между существованием подстановок типа преобразования Миуры и наличием у уравнения псевдосимметрий. Мы рассматриваем дифференциальные подстановки первого порядка следующего вида:

$$\mathbf{u} = h_1 \mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v}, \quad h_k = h_k(v_{[0,0]}, v_{[0,1]}, v_{[1,1]}), \quad h_1 \neq 0, \quad (2.2)$$

при этом $\mathbf{u}(x, t)$ является решением уравнения (1.1), а $\mathbf{v}(x, t)$ – решением другого интегрируемого в $\mathbb{R}^n$ уравнения

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_3 + \frac{3}{2} (D_x \ln g) \mathbf{v}_2 + g_1 \mathbf{v}_1 + g_0 \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

где g_k – функции переменных $v_{[i,j]}$, $0 \leq i \leq j \leq 2$ и $g = g(v_{[0,0]}, v_{[0,1]}, v_{[1,1]})$.

Необходимо отметить, что существуют и другие дифференциальные подстановки первого порядка. Например, уравнение Шварц–КдФ, интегрируемое на сфере

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}^2 = 1, \quad (2.4)$$

допускает подстановку

$$\mathbf{u}_1 = \left(v_{[1,1]} + \sqrt{v_{[1,1]}^2 + \frac{v_{[1,1]}}{a}} \right)^{-1} \mathbf{v}_1 \quad (2.5)$$

где $\mathbf{v}$ есть решение следующего уравнения:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2 (1 + a u_{[1,1]})} \right) \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}^2 = 1. \quad (2.6)$$

Если перейти к пределу при $a \rightarrow \infty$ в (2.5) и (2.6), то получим, что уравнение (2.4) инвариантно относительно преобразования $\mathbf{u}'_1 = u_{[1,1]}^{-1} \mathbf{u}_1$. Очевидно, что подстановку $\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ допускают только те уравнения, в которых возможна замена $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1$. Классификация таких уравнений представлена в [5].

Перейдем к рассмотрению (1.1). Первое из условий интегрируемости (1.2) позволяет уточнить вид функции f_1 . В частности, справедлива

ЛЕММА (А. Г. Мешков). *Всякая сохраняющаяся плотность уравнения (1.1) порядка $n > 1$ есть многочлен не выше второй степени относительно $\mathbf{u}_n$ следующего вида:*

$$\rho = cfu_{[n,n]} + \sum_{i,j=0}^{n-1} G_{ij}u_{[i,n]}u_{[j,n]} + \sum_{i=0}^{n-1} G_i u_{[i,n]} + G,$$

где G_{ij} , G_i и G – скалярные функции переменных $\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$, c – постоянная, а f введена равенством (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы строится на анализе условия $D_t \rho = D_x \theta$.

Как показано в [4], первая сохраняющаяся плотность уравнения (1.1) имеет вид $\rho_1 = f_2^2/3 - f_1 + D_x f_2$ и, так как $f_1 = f_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, то согласно лемме

$$f_1 = cfu_{[2,2]} + G_{00}u_{[0,2]}^2 + G_{01}u_{[0,2]}u_{[1,2]} + G_{11}u_{[1,2]}^2 + G_1u_{[1,2]} + G_0u_{[0,2]} + G.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если уравнение (1.1) допускает подстановку (2.2) в уравнение (2.3), то*

$$f = f(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}), \quad f_1 = G_0u_{[0,2]} + G, \quad f_0 = H_2u_{[1,2]} + H_1,$$

где $G = G(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$, $G_0 = G_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$, а H_i – функции переменных $u_{[0,0]}$, $u_{[0,1]}$, $u_{[1,1]}$, $u_{[0,2]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим эволюционную производную (2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2}(D_x \ln f)\mathbf{u}_2 + f_1\mathbf{u}_1 + f_0\mathbf{u} \\ = (D_t h_1)\mathbf{v}_1 + (D_t h_0)\mathbf{v} + h_1 D_x \left(\mathbf{v}_3 + \frac{3}{2}(D_x \ln g)\mathbf{v}_2 + g_1\mathbf{v}_1 + g_0\mathbf{v} \right) \\ + h_0 \left(\mathbf{v}_3 + \frac{3}{2}(D_x \ln g)\mathbf{v}_2 + g_1\mathbf{v}_1 + g_0\mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

Заменим в последнем выражении все $\mathbf{u}_i$ с помощью (2.2) и его дифференциальных следствий, в результате получим

$$\begin{aligned} D_x^3(h_1\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v}) + \frac{3}{2}(D_x \ln f)D_x^2(h_1\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v}) + f_1 D_x(h_1\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v}) - (D_t h_1)\mathbf{v}_1 \\ + f_0(h_1\mathbf{v}_1 + h_0\mathbf{v}) - (D_t h_0)\mathbf{v} - h_1 D_x \left(\mathbf{v}_3 + \frac{3}{2}(D_x \ln g)\mathbf{v}_2 + g_1\mathbf{v}_1 + g_0\mathbf{v} \right) \\ - h_0 \left(\mathbf{v}_3 + \frac{3}{2}(D_x \ln g)\mathbf{v}_2 + g_1\mathbf{v}_1 + g_0\mathbf{v} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) должно выполняться тождественно, поэтому необходимо приравнять слагаемые при всех $\mathbf{v}_i$ к нулю. Можно заметить, что слагаемые при $\mathbf{v}_4$ в сумме

дают нуль, а приравнявая к нулю слагаемые при остальных $\mathbf{v}_i$, имеем уравнения

$$2D_x h_1 + D_x(\ln f)h_1 - D_x(\ln g)h_1 = 0, \quad (2.8)$$

$$3D_x^2 h_1 + 3D_x h_0 + 3D_x(\ln f)D_x h_1 + h_1 \left(f_1 - \frac{3}{2} D_x^2 \ln g - g_1 \right) + \frac{3}{2} h_0 D_x \ln \left(\frac{f}{g} \right) = 0, \quad (2.9)$$

$$D_x^3 h_1 + 3D_x^2 h_0 + \frac{3}{2} D_x(\ln f)(D_x^2 h_1 + 2D_x h_0) + f_1(D_x h_1 + h_0) + f_0 h_1 - D_t h_1 - h_1(D_x g_1 + g_0) - h_0 g_1 = 0, \quad (2.10)$$

$$D_x^3 h_0 + \frac{3}{2} (D_x \ln f) D_x^2 h_0 + f_1 D_x h_0 + f_0 h_0 - D_t h_0 - h_1 D_x g_0 - h_0 g_0 = 0. \quad (2.11)$$

Правила дифференцирования скалярных произведений $u_{[i,j]}$ вытекают из равенства $D_x \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i+1}$ и билинейности скалярного произведения. При этом для любой функции $F = F(u_{[i,j]})$, $0 \leq i \leq j \leq n$, будут справедливы формулы

$$D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial u_{[i,i]}} u_{[i,i+1]} + \sum_{i < j} \frac{\partial F}{\partial u_{[i,j]}} (u_{[i+1,j]} + u_{[i,j+1]}),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_{[k,l]}} D_x F = D_x \frac{\partial F}{\partial u_{[k,l]}} + 2 \frac{\partial F}{\partial u_{[k,k]}} \delta_{k+1,l} + \frac{\partial F}{\partial u_{[k-1,l]}} + \frac{\partial F}{\partial u_{[k,l-1]}}, \quad k \leq l,$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, причем $\partial F / \partial u_{[k,k-1]} \equiv 0$.

На следующем шаге необходимо заменить в (2.8)–(2.11) все явно входящие $u_{[i,j]}$ на соответствующие $v_{[m,n]}$, используя следствия (2.2):

$$u_{[0,0]} = (h_1 \mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v}_0)^2, \quad u_{[0,1]} = \frac{1}{2} D_x (h_1 \mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v}_0)^2, \quad \dots \quad (2.12)$$

По условию $h_1 \neq 0$, тогда (2.8) равносильно

$$g = h_1^2 f. \quad (2.13)$$

Мы опустили в (2.13) константу интегрирования, так как f и g определены с точностью до постоянного множителя – формулы (1.3) и (2.3).

Дифференцируя (2.13) по $v_{[2,2]}$ с учетом (2.12) получаем $\partial f / \partial u_{[1,1]} = 0$. Выражения, полученные в результате дифференцирования (2.13) по $v_{[1,2]}$ и $v_{[0,2]}$, позволяют установить, что при $\partial f / \partial u_{[0,1]} \neq 0$ имеем

$$h_1^2 v_{[1,1]} + 2h_0 h_1 v_{[0,1]} + h_0^2 v_{[0,0]} = h$$

с произвольной функцией $h = h(v_{[0,0]})$.

Аналогично, из уравнения (2.9) вытекают ограничения на функцию f_1 . Продифференцировав (2.9) по $v_{[3,3]}$, получим $\partial f_1 / \partial u_{[2,2]} = 0$. Дифференцирование (2.9) по $v_{[2,3]}$ позволяет найти $\partial f_1 / \partial u_{[1,2]} = 0$, а линейность (2.9) по переменной $v_{[1,3]}$ влечет $\partial^2 f_1 / \partial u_{[0,2]}^2 = 0$.

Дифференцирование (2.10) по $v_{[3,3]}$ дает $\partial f_0 / \partial u_{[2,2]} = 0$. Двойное дифференцирование по $v_{[2,3]}$ приводит к $\partial^2 f_0 / \partial u_{[1,2]}^2 = 0$, что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Дальнейший анализ уравнений (2.8)–(2.11) возможен только при явно заданных f_i и g_i . Например, простейшее следствие полученное путем дифференцирования (2.11) по переменной $v_{[2,3]}$, выглядит так:

$$3 \frac{\partial h_0}{\partial v_{[1,1]}} - \frac{\partial g_1}{\partial v_{[2,2]}} \left(2 \frac{\partial h_0}{\partial v_{[1,1]}} v_{[1,1]} + \frac{\partial h_0}{\partial v_{[0,1]}} v_{[0,1]} \right) - \frac{\partial g_0}{\partial v_{[2,2]}} \left(2 \frac{\partial h_0}{\partial v_{[1,1]}} v_{[0,1]} + \frac{\partial h_0}{\partial v_{[0,1]}} v_{[0,0]} + h_1 \right) = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Если интегрируемое в $\mathbb{S}^n$ уравнение (1.1) допускает подстановку (2.2), то она имеет вид

$$\mathbf{u} = h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]} + \sqrt{v_{[0,1]}^2 - v_{[0,0]}v_{[1,1]} + v_{[0,0]}h^2}}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right), \quad h = h(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1). \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $\mathbf{u}^2 = 1$, получаем из (2.2)

$$h_1^2 v_{[1,1]} + h_0^2 v_{[0,0]} + 2h_1 h_0 v_{[0,1]} = 1.$$

Отсюда ясно, что при $h_1 = 0$ получим точечное преобразование $\mathbf{u} = \mathbf{v} v_{[0,0]}^{(-1/2)}$. Поэтому считаем $h_1 \neq 0$ и полагаем $h_1 = h^{-1}$. Решив квадратное уравнение относительно h_0 , получаем (2.14), что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнения, интегрируемые в $\mathbb{R}^n$, в отличие от интегрируемых в $\mathbb{S}^n$, допускают подстановки (2.2) и с функцией $h_1 = 0$. Приведем в качестве примера интегрируемое в $\mathbb{R}^n$ уравнение [5]:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(u_{[2,2]} + \frac{u_{[1,2]}^2}{1 - u_{[1,1]}} \right) \mathbf{u}_1.$$

Данное уравнение допускает дифференциальную подстановку вида $\mathbf{u} = h\mathbf{v}$, которая записывается следующим образом:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{v_{[1,1]}}}, \quad \mathbf{v}^2 = 1,$$

где вектор $\mathbf{v}(x, t)$ удовлетворяет уравнению Шварц–КдФ на n -мерной сфере (2.4).

3. Подстановки из $\mathbb{S}^n$ в $\mathbb{S}^n$. Полная классификация уравнений (1.1), интегрируемых на n -мерной сфере, была выполнена в [4]. Согласно теореме 1 дифференциальные подстановки (2.14) допускают следующие уравнения, интегрируемые в $\mathbb{S}^n$:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} u_{[1,1]} \mathbf{u}_1 + 3u_{[1,2]} \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + 3u_{[1,1]} \mathbf{u}_1 + 3u_{[1,2]} \mathbf{u}. \quad (3.2)$$

В результате несложных вычислений мы установили, что (3.1) и (3.2) связаны дифференциальными подстановками со следующими уравнениями:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + 3 \frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_1, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 u_{[1,2]}^2}{1 - a u_{[1,1]}} + a(u_{[2,2]} - u_{[1,1]}^2) + u_{[1,1]} \right) \mathbf{u}_1 + 3u_{[1,2]} \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - \frac{3(1+p)u_{[1,2]}}{2pu_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \frac{(p-1)u_{[1,2]}}{p} \mathbf{u} \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{(1+p)u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} - \frac{a(1+p)u_{[1,2]}^2}{p^2 u_{[1,1]}} + u_{[1,1]}(1-p) \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где a – константа, $p^2 = 1 + a u_{[1,1]}$.

Приведем дифференциальные подстановки, связывающие решения (3.1) и (3.2) с решениями (3.3)–(3.6). Выражение вида

$$\{\mathbf{u} = h_1 \mathbf{v}_1 + h_0 \mathbf{v}\}: (A) \rightarrow (B)$$

будет означать, что вектор $\mathbf{u}$ является решением уравнения (A), а $\mathbf{v}$ решением (B). Имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{v_{[1,1]}}} \mathbf{v}_1, \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1 \right\}: (3.2) \rightarrow (3.3), \quad (3.1) \rightarrow (3.4), \\ \left\{ \mathbf{u} = a^{-1/2} (\mathbf{v}_1 - \sqrt{a - v_{[1,1]}} \mathbf{v}), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1 \right\}: (3.1) \rightarrow (3.5), \\ \left\{ \mathbf{u} = h^{-1} (\mathbf{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]}} \mathbf{v}), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1, \right. \\ \left. h^2 = 2a^{-1} (1 - \sqrt{1 - a v_{[1,1]}}) \right\}: (3.2) \rightarrow (3.6). \end{aligned}$$

Как показано в [4], можно расширить множество динамических переменных, от которых зависят f_k в (1.1), путем добавления переменных

$$\tilde{u}_{[i,j]} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle, \quad 0 \leq i \leq j \leq 2, \quad (3.7)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – второе скалярное произведение.

Классификация уравнений (1.1), интегрируемых на $\mathbb{S}^n$ при $f_k = f_k(u_{[i,j]}, \tilde{u}_{[i,j]})$, представлена в [8]. В цитируемой работе получено одиннадцать уравнений и только три из них допускают подстановки (2.14):

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} (u_{[1,1]} - \tilde{u}_{[0,0]}) \mathbf{u}_1 + 3u_{[1,2]} \mathbf{u}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 + 3 \left(u_{[1,2]} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} u_{[1,1]} \right) \mathbf{u} - 3 \left(\frac{2\tilde{u}_{[0,2]} + \tilde{u}_{[1,1]} + a}{2\tilde{u}_{[0,0]}} - \frac{5}{2} \frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2}{\tilde{u}_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} \mathbf{u}_2 + 3 \left(u_{[1,2]} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} u_{[1,1]} \right) \mathbf{u} - 3 \left(\frac{\tilde{u}_{[0,2]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} - 2 \frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2}{\tilde{u}_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_1. \quad (3.10)$$

Анализ уравнений (2.8)–(2.11) мы проводили с помощью Maple [20] и установили, что (3.1) и (3.2) не допускают подстановок (2.14) с функцией h , зависящей от (3.7).

Следующие уравнения из [8] получены подстановкой (2.14) в (3.8)–(3.10):

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2} - \frac{\tilde{u}_{[1,1]}}{u_{[1,1]}} \right) \mathbf{u}_1, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} (\mathbf{u}_2 + u_{[1,1]} \mathbf{u}) + 3u_{[1,2]} \mathbf{u} \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} - \frac{(u_{[1,2]} + \tilde{u}_{[0,1]})^2}{\tilde{u}_{[0,0]}(\tilde{u}_{[0,0]} + u_{[1,1]})} - \frac{(\tilde{u}_{[0,0]} + u_{[1,1]})^2}{\tilde{u}_{[0,0]}} - \frac{\tilde{u}_{[0,1]}^2 - \tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + 3 \left(\frac{\tilde{u}_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,2]}}{\xi} - \frac{\tilde{u}_{[1,2]}\tilde{u}_{[0,0]}}{\xi} + \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\tilde{u}_{[0,0]}} \right) (\mathbf{u}_2 + u_{[1,1]} \mathbf{u}) \\ + 3u_{[1,2]} \mathbf{u} - a \frac{\tilde{u}_{[0,0]}^2 u_{[1,1]} + \tilde{u}_{[0,1]}^2}{\tilde{u}_{[0,0]}\xi} \mathbf{u}_1 \\ + \frac{3}{2\xi^2 \tilde{u}_{[0,0]}^2} (\tilde{u}_{[0,0]}^3 \tilde{u}_{[2,2]}\xi - \xi(\xi + \tilde{u}_{[0,2]}\tilde{u}_{[0,0]})^2 \\ + (\tilde{u}_{[0,0]}^2 \tilde{u}_{[1,2]} - 2\xi \tilde{u}_{[0,1]} - \tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,2]})^2) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\xi = \tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,1]} - \tilde{u}_{[0,1]}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{a\tilde{u}_{[0,1]}}{\eta} \mathbf{u}_2 + 3 \frac{u_{[1,2]}\eta - a\tilde{u}_{[0,1]}u_{[1,1]}}{\eta} \mathbf{u} \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{[2,2]}}{\eta} + \frac{a\zeta - (\tilde{u}_{[0,2]} + \eta)^2}{\eta\tilde{u}_{[0,0]}} - b \frac{a\tilde{u}_{[0,1]}^2 + \eta\tilde{u}_{[0,0]}u_{[1,1]}}{\eta^2\tilde{u}_{[0,0]}} \right) \mathbf{v}_1 \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{(\tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,2]} - \tilde{u}_{[0,1]}(2a\tilde{u}_{[0,0]} + b + \tilde{u}_{[0,2]}))^2}{\eta\zeta\tilde{u}_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\eta = a\tilde{u}_{[0,0]} + b$, $\zeta = \tilde{u}_{[0,0]}(\eta - \tilde{u}_{[1,1]}) + \tilde{u}_{[0,1]}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + \frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,2]} - \tilde{u}_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,2]}}{\mu(\mu + \tilde{u}_{[0,0]})} - 2 \frac{\tilde{u}_{[0,1]}}{\mu} \right) (\mathbf{u}_2 + u_{[1,1]} \mathbf{u}) + 3u_{[1,2]} \mathbf{u} \\ + \frac{3/2}{\tilde{u}_{[0,0]}(\mu + \tilde{u}_{[0,0]})} [\mu^{-2}(\tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,2]} - \tilde{u}_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,2]})^2 + \tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[2,2]} - \tilde{u}_{[0,2]}^2 \\ - 2\mu^{-2}\tilde{u}_{[0,1]}(\tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,2]} - \tilde{u}_{[0,1]}\tilde{u}_{[0,2]})(\mu + 2\tilde{u}_{[0,0]})] \mathbf{u}_1 \\ + (6\mu^{-2}\tilde{u}_{[0,1]}^2 - 3\tilde{u}_{[0,0]}^{-1}\tilde{u}_{[0,2]}) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\mu^2 = \tilde{u}_{[0,1]}^2 + \tilde{u}_{[0,0]}^2 - \tilde{u}_{[0,0]}\tilde{u}_{[1,1]}$.

Дифференциальные подстановки для (3.8)–(3.10) записываются в этом случае следующим образом:

$$\left\{ \mathbf{u} = h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]}} \mathbf{v} \right), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1, h^2 = v_{[1,1]} \right\}: \quad (3.8) \rightarrow (3.11),$$

$$\left\{ \mathbf{u} = h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]}} \mathbf{v} \right), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1, h^2 = \tilde{v}_{[0,0]} \right\}: \quad (3.8) \rightarrow (3.12),$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u} &= h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]} \mathbf{v}} \right), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1, \\ h^2 &= v_{[1,1]} + \tilde{v}_{[0,1]}^2 \tilde{v}_{[0,0]}^{-2} \end{aligned} \right\}: \quad (3.9) \rightarrow (3.13),$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u} &= h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]} \mathbf{v}} \right), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1, \\ h^2 &= v_{[1,1]} + \left(\sqrt{\frac{\tilde{v}_{[0,1]}^2}{\tilde{v}_{[0,0]}^2} - \frac{\tilde{v}_{[1,1]} - b - a\tilde{v}_{[0,0]}}{\tilde{v}_{[0,0]}}} + \frac{\tilde{v}_{[0,1]}}{\tilde{v}_{[0,0]}} \right)^2 \end{aligned} \right\}: \quad (3.9) \rightarrow (3.14),$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u} &= h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]} \mathbf{v}} \right), \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1, \\ h^2 &= v_{[1,1]} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\tilde{v}_{[1,1]}}{\tilde{v}_{[0,0]}} + \frac{\tilde{v}_{[0,1]}^2}{\tilde{v}_{[0,0]}^2} + \frac{\tilde{v}_{[0,1]}}{\tilde{v}_{[0,0]}}} \right)^2 \end{aligned} \right\}: \quad (3.10) \rightarrow (3.15).$$

4. Подстановки из $\mathbb{S}^n$ в $\mathbb{R}^n$. В предыдущем пункте мы рассмотрели подстановки между известными уравнениями, интегрируемыми в $\mathbb{S}^n$, поэтому для них удалось найти абсолютно все преобразования вида (2.14). Задача серьезно усложняется, если искать подстановки в произвольное уравнение, интегрируемое в $\mathbb{R}^n$, даже при $f_k = f_k(u_{[i,j]})$ в (1.1). Следующие интегрируемые в $\mathbb{R}^n$ уравнения получаются в результате дифференциальной подстановки (2.14) в (3.1) и (3.2):

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + 3 \frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_1, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{(u_{[0,0]}u_{[1,2]} - 2u_{[0,1]}u_{[1,1]})^2}{u_{[0,0]}^2 u_{[1,1]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_2 + 3 \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + 2 \frac{u_{[1,1]}^2 + u_{[1,1]}u_{[0,2]} - 2u_{[0,1]}u_{[1,2]}}{u_{[0,0]}u_{[1,1]}} \right) \mathbf{v}_1, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + 3 \left(\frac{\sqrt{q}u_{[0,1]}}{\sqrt{a}u_{[0,0]}^2} + \frac{q + au_{[0,1]}^2}{2au_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_1 - 3D_x \left(\frac{\sqrt{q}u_{[0,1]}}{\sqrt{a}u_{[0,0]}^2} + \frac{q + au_{[0,1]}^2}{2au_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u} \\ + \frac{3a}{2} \left(u_{[2,2]} + \frac{(u_{[0,1]}(1 + au_{[0,2]}) - au_{[0,0]}u_{[1,2]})^2}{au_{[0,0]}q} - \frac{(1 + au_{[0,2]})^2}{a^2u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + f_x \mathbf{u}_2 - a \left(\frac{u_{[0,1]}^2 f_x}{u_{[0,0]}^2} + \frac{3u_{[0,1]}g}{u_{[0,0]}^3} - \frac{u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3} \right) \mathbf{u} \\ + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[0,0]}u_{[2,2]}}{\xi} + \frac{ag^2}{\xi u_{[0,0]}^2} + \frac{(u_{[0,0]}f_x + 3(1 + \sqrt{a+1})u_{[0,1]})^2}{9u_{[0,0]}^2} \right. \\ \left. - \frac{a(a+1)u_{[0,1]}^4}{\xi u_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + f_x \mathbf{u}_2 - a \left(\frac{u_{[0,1]}^2 f_x}{u_{[0,0]}^2} + \frac{3u_{[0,1]}g}{u_{[0,0]}^3} - \frac{u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3} \right) \mathbf{u}$$

$$+ 3 \left(\frac{u_{[0,0]} u_{[2,2]}}{\xi} + \frac{ag^2}{\xi u_{[0,0]}^2} + \frac{(1 + \sqrt{a+1})(2u_{[0,1]} u_{[0,0]} f_x + 3g + 3\sqrt{a+1} u_{[0,1]}^2)}{3u_{[0,0]}^2} - \frac{a(a+1)u_{[0,1]}^4}{\xi u_{[0,0]}^2} \right) \mathbf{u}_1, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = & \mathbf{u}_3 - 3D_x(\ln h)\mathbf{u}_2 \\ & + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{h^2} + \frac{(u_{[0,0]}h_x - u_{[0,1]}h)^2}{u_{[0,0]}^2 h^2} - \frac{(u_{[0,2]}\eta^2 + a(\eta+h)h^2)^2}{u_{[0,0]}\eta^4 h^2} - \frac{2u_{[0,1]}h_x(u_{[0,0]}(\eta^2 - ah)\eta^2 h - a^2(\eta+h)u_{[0,1]}^2)}{u_{[0,0]}^2 \eta^5 h} + \frac{a^2(\eta+h)^2 u_{[0,1]}^4}{u_{[0,0]}^3 \eta^6} - \frac{a(\eta+h)h^4}{u_{[0,0]}\eta^4} + \frac{(u_{[0,2]}\eta h + au_{[0,1]}h_x)^2}{u_{[0,0]}\eta^4 h^2} + \frac{2au_{[0,1]}^2 u_{[0,2]}(\eta+h)}{u_{[0,0]}^2 \eta^4} - \frac{h(a(a^2 - 3h^2) - 3\eta^3)u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2 \eta^4} \right) \mathbf{u}_1 \\ & - \frac{3}{u_{[0,0]}^3 \eta^4 h^2} (au_{[0,0]} u_{[0,1]} (\eta+h)\eta^2 (u_{[0,0]}h_x^2 - (u_{[0,2]} + h^2)h^2) \\ & \quad + au_{[0,0]} h h_x \eta (2u_{[0,1]}^2 h^2 - u_{[0,0]}(u_{[0,2]} + h^2)\eta^2) \\ & \quad + au_{[0,1]}^3 h^2 (\eta+h)(h^2 + \eta^2)) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где a – константа,

$$\begin{aligned} \xi &= u_{[0,0]} u_{[1,1]} + au_{[0,1]}^2, & \eta &= a + h, & q &= u_{[0,0]}(1 - au_{[1,1]}) + au_{[0,1]}^2, \\ f &= \frac{3}{2} \ln(u_{[0,0]} \xi^{-1}), & g &= u_{[0,0]}(u_{[0,2]} + u_{[1,1]}) - u_{[0,1]}^2, \end{aligned}$$

a и h является корнем уравнения

$$u_{[0,0]} u_{[1,1]} - u_{[0,1]}^2 = h^2(u_{[0,0]} - u_{[0,1]}^2(a+h)^{-2}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (4.1) и (4.2) были получены в [5], (4.3) и (4.4) в [10], (4.5) в [7]. Подчеркнем, что уравнения (4.1), (4.2) в $\mathbb{R}^n$ и (3.3), (3.4) в $\mathbb{S}^n$ при их внешнем совпадении – это разные уравнения, так как уравнения на сфере получаются наложением связи $\mathbf{u}^2 = 1$. При этой редукции некоторые из симметричных свойств уравнения теряются.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Громоздкое уравнение (4.8) наглядно демонстрирует сложность проведения полной классификации в $\mathbb{R}^n$, но в то же время не лишено смысла изучение свойств подобных уравнений. Так, например, мы установили, что (4.8) является x -симметрией следующего векторного гиперболического уравнения (подробно см. [21])

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{xy} = & \frac{(b(a+2h)\mathbf{u}^2 - h)(\mathbf{u}, \mathbf{u}_y) - \xi(h + ab\mathbf{u}^2)}{h(b\mathbf{u}^2 - 1)\mathbf{u}^2} \mathbf{u}_x + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)(a+2h)}{(a+h)\mathbf{u}^2} \mathbf{u}_y \\ & + \left(\frac{a(\xi(h + ab\mathbf{u}^2) - (a+h)(\mathbf{u}, \mathbf{u}_y))(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)}{h(a+h)(b\mathbf{u}^2 - 1)\mathbf{u}^4} - \frac{(a+2h)(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)}{h\mathbf{u}^2} \right) \mathbf{u}, \end{aligned}$$

где $\xi^2 = \mathbf{u}_y^2 \mathbf{u}^2 (b\mathbf{u}^2 - 1) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}_y)^2$, $\mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$, b – произвольная константа.

Ниже представлены дифференциальные подстановки, связывающие решения (3.1) и (3.2) с решениями уравнений (4.1)–(4.8):

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{v_{[1,1]}}} \mathbf{v}_1 \right\}: & \quad (3.2) \rightarrow (4.1), \quad (3.1) \rightarrow (4.2), \\ \left\{ \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{v_{[1,1]}}} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{2v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right) \right\}: & \quad (3.1) \rightarrow (4.3), \quad (3.2) \rightarrow (4.4), \\ \left\{ \mathbf{u} = a^{-1/2} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]} + \sqrt{v_{[0,1]}^2 - v_{[0,0]}(a - v_{[1,1]})}}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right) \right\}: & \quad (3.1) \rightarrow (4.5), \\ \left\{ \mathbf{u} = \left(v_{[1,1]} + \frac{av_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]}} \right)^{-1/2} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]}}{v_{[0,0]}} (\sqrt{1+a} + 1) \mathbf{v} \right) \right\}: & \quad (3.1) \rightarrow (4.6), \\ & \quad (3.2) \rightarrow (4.7), \\ \left\{ \begin{aligned} \mathbf{u} &= h^{-1} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{v_{[0,1]} + \sqrt{v_{[0,1]}^2 + (h^2 - v_{[1,1])}v_{[0,0]}}}{v_{[0,0]}} \mathbf{v} \right), \\ h &= \text{корень уравнения } v_{[0,0]}v_{[1,1]} - v_{[0,1]}^2 = h^2 \left(v_{[0,0]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{(a+h)^2} \right) \end{aligned} \right\}: & \quad (3.1) \rightarrow (4.8). \end{aligned}$$

5. Заключительные замечания. В данной работе, используя всего два уравнения (3.1) и (3.2), мы построили двенадцать, в том числе новые (4.6)–(4.8). Доказанные теоремы позволили установить, что все интегрируемые в $\mathbb{S}^n$ уравнения (1.1) получаются из (2.4), (3.1) и (3.2) с помощью дифференциальных подстановок. Кроме того, показано, что четыре громоздких уравнения (3.12)–(3.15) из работы [8] связаны с более простыми (3.8)–(3.10).

Дальнейшие исследования можно вести в нескольких направлениях. Во-первых, необходимо проверить существование дифференциальных подстановок (2.2) между уже известными уравнениями, интегрируемыми в $\mathbb{R}^n$ [5], [7], [10]. Во-вторых, попытаться рассмотреть подстановки более высокого порядка (см., например, [17]). Интересным и перспективным, на наш взгляд, является также отыскание векторных гиперболических уравнений по наперед заданным для них x -симметриям вида (1.1).

Замечательным свойством дифференциальных подстановок является то, что иногда с их помощью удается строить автопреобразования Беклунда. Например, скалярное уравнение КдФ допускает еще одну, отличную от (2.1), подстановку в мКдФ:

$$U = -iv_1 - v^2 - \nu, \quad i^2 = -1. \quad (5.1)$$

Это означает, что благодаря (2.1) и (5.1) можно построить два различных решения КдФ – $u(x, t)$ и $U(x, t)$, используя одно и то же решение мКдФ $v(x, t)$. Исключив из (2.1) и (5.1) функцию $v(x, t)$, получим известное автопреобразование Беклунда для КдФ

$$U_1 + u_1 = \sqrt{2}\sqrt{U + u + 2\nu}(U - u).$$

Аналогично построим автопреобразование Беклунда для векторного уравнения. Из полученных выше результатов следует, что если вектор $\mathbf{v}(x, t)$ есть решение (3.5), то существуют такие решения $\mathbf{z}(x, t)$ и $\mathbf{y}(x, t)$ уравнения (3.1), что

$$\mathbf{z} = \mu \mathbf{v}_1 - \sqrt{1 - \mu^2 v_{[1,1]}} \mathbf{v}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{y} = \mu \mathbf{v}_1 + \sqrt{1 - \mu^2 v_{[1,1]}} \mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) согласно $\mathbf{v}^2 = 1$ имеем $v_{[1,1]} = ((\mathbf{z}, \mathbf{y}) + 1)/(2\mu^2)$. Подставив выражение для $v_{[1,1]}$ в разность (5.2) и (5.3), получаем

$$\mathbf{y} - \mathbf{z} = \sqrt{2} \sqrt{1 - (\mathbf{z}, \mathbf{y})} \mathbf{v}. \quad (5.4)$$

Выразив из (5.4) вектор $\mathbf{v}$ и подставив его в (5.2), находим автопреобразование Беклунда для (3.1):

$$\mu \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{z}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - (\mathbf{z}, \mathbf{y})}} \right)_x - \frac{\mathbf{y} + \mathbf{z}}{2} = 0.$$

Автор благодарит А. Г. Мешкова за полезные обсуждения и Д. К. Демского за привлечение внимания к способу построения автопреобразований Беклунда.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, “Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений”, *ТМФ*, **100**:2 (1994), 214–218.
- [2] И. З. Голубчик, В. В. Соколов, “Многокомпонентное обобщение иерархии уравнения Ландау–Лифшица”, *ТМФ*, **124**:1 (2000), 62–71.
- [3] V. V. Sokolov, T. Wolf, “Classification of integrable polynomial vector evolution equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:49 (2001), 11139–11148.
- [4] A. G. Meshkov, V. V. Sokolov, “Integrable evolution equations on the N -dimensional sphere”, *Comm. Math. Phys.*, **232**:1 (2002), 1–18.
- [5] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, “Классификация интегрируемых дивергентных N -компонентных эволюционных систем”, *ТМФ*, **139**:2 (2004), 192–208.
- [6] T. Tsuchida, T. Wolf, “Classification of polynomial integrable systems of mixed scalar and vector evolution equations. I”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:35 (2005), 7691–7733.
- [7] М. Ю. Балахнев, “Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений”, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 13–20.
- [8] A. G. Meshkov, M. Ju. Balakhnev, “Integrable anisotropic evolution equations on a sphere”, *SIGMA*, **1** (2005), 027.
- [9] M. Ju. Balakhnev, “The vector generalization of the Landau–Lifshitz equation: Bäcklund transformation and solutions”, *Appl. Math. Lett.*, **18**:12 (2005), 1363–1372.
- [10] M. Ju. Balakhnev, A. G. Meshkov, “On a classification of integrable vectorial evolutionary equations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 212–226.
- [11] М. Ю. Балахнев, “Формулы суперпозиции для векторных обобщений уравнения мКдФ”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 501–503.
- [12] М. Ю. Балахнев, “Формулы суперпозиции для интегрируемых векторных эволюционных уравнений”, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 261–267.
- [13] M. Ju. Balakhnev, “Superposition formulas for integrable vector evolutionary equations on a sphere”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:1 (2008), 104–116.
- [14] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov, “Extension of the module of invertible transformations. Classification of integrable systems”, *Comm. Math. Phys.*, **115**:1 (1988), 1–19.
- [15] М. Ю. Балахнев, И. В. Кулемин, “Дифференциальные подстановки для эволюционных систем 3-го порядка”, *Дифференц. уравнения и процессы управления*, 2002, № 1, 63–69; <http://www.neva.ru/journal>.
- [16] А. Г. Мешков, “К симметричной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:7 (2006), 141–161.

- [17] A. G. Meshkov, M. Ju. Balakhnev, “Two-field integrable evolutionary systems of the third order and their differential substitutions”, *SIGMA*, **4** (2008), 018.
- [18] С. Я. Старцев, “О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры”, *ТМФ*, **116**:3 (1998), 336–348.
- [19] В. В. Соколов, “Псевдосимметрии и дифференциальные подстановки”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:2 (1988), 47–56.
- [20] A. G. Meshkov, “Computer package for investigation of the complete integrability”, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, Part 1, Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., **30**, Inst. Mat. NAN of Ukraïni, Kyiv, 2000, 35–46.
- [21] А. Г. Мешков, “Векторные гиперболические уравнения, обладающие высшими симметриями”, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 176–190.

М. Ю. Балахнев

Орловский государственный технический университет

E-mail: balakhnev@yandex.ru

Поступило

13.01.2009

Исправленный вариант

22.06.2010