Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Докучаев, В. В. Кириченко, Ж. Т. Черноусова, Черепичные порядки и фробениусовы кольца, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:01:19

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЧЕРЕПИЧНЫЕ ПОРЯДКИ И ФРОБЕНИУСОВЫ КОЛЬЦА

М. А. Докучаев, В. В. Кириченко, Ж. Т. Черноусова

В настоящей статье по каждому приведенному черепичному порядку над дискретно нормированным кольцом строится счетное множество фробениусовых факторколец с тождественной подстановкой Накаямы. В частности, по каждому конечному частично упорядоченному множеству $P = (p_1, \dots, p_n)$ строится счетное число фробениусовых колец $F_m(P)$, причем все колчаны $Q(F_m(P))$ колец $F_m(P)$ совпадают между собой.

Обозначим $P_{\max}$ – множество всех максимальных элементов P , $P_{\min}$ – множество всех минимальных элементов P , $P_{\max} \times P_{\min}$ – их декартово произведение.

Для того чтобы сформулировать, как колчан кольца $Q(F_m(P))$ связан с частично упорядоченным множеством P , напомним определение диаграммы частично упорядоченного множества P [1, с. 233].

Диаграмма частично упорядоченного множества $P = (p_1, \dots, p_n)$ – это колчан $Q(P)$ с множеством вершин $VQ(P) = \{1, \dots, n\}$ и множеством стрелок $AQ(P)$, причем из вершины i идет стрелка в вершину j тогда и только тогда, когда $p_i < p_j$, причем если $p_i \leq p_k \leq p_j$, то либо $k = i$, либо $k = j$.

Колчан $Q(F_m(P))$ получается из диаграммы $Q(P)$ добавлением стрелок σ_{ij} для всех $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$.

Поэтому если P – линейно упорядоченное множество, состоящее из n элементов, то $Q(F_m(P))$ является простым циклом C_n , и потому все кольца $F_m(P)$ являются полуцепными (serial).

1. Черепичные порядки. Все кольца, рассматриваемые в статье, предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Все необходимые для нас сведения о фробениусовых и квазифробениусовых кольцах можно найти в [2, гл. 6]. Определение подстановки Накаямы дано там же, в [2, с. 426].

Обозначим через $M_n(B)$ кольцо всех квадратных матриц порядка n с элементами из кольца B . Пусть $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Целочисленную матрицу $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ будем называть *матрицей показателей*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ и $\alpha_{ii} = 0$ для $i, j, k = 1, \dots, n$. Матрицу показателей $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ будем называть *приведенной*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$.

Пусть $\mathcal{O}$ – дискретно нормированное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathcal{M} = \pi \mathcal{O} = \mathcal{O} \pi$ и классическим телом частных $\mathcal{D}$. По этому кольцу и матрице показателей $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ построим порядок Λ в $M_n(\mathcal{D})$ следующего вида:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}} \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}} \mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}} \mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}} \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке CNPq of Brazil, грант № 301115/95-8, и FAPESP of Brazil, грант № 01/05305-7. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке FAPESP of Brazil, грант № 99/11761-3.

Порядок вида (1) называется черепичным порядком над дискретно нормированным кольцом $\mathcal{O}$. Поскольку другие порядки в этой статье не рассматриваются, порядки вида (1) будем называть *черепичными порядками*, или просто *порядками*, и записывать их в виде $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E} = \mathcal{E}(\Lambda)\}$.

Любой черепичный порядок Λ вкладывается в простое артиново кольцо $\tilde{\Lambda} = M_n(\mathcal{D})$, которое является правым и левым классическим кольцом частных порядка Λ .

Все необходимые для нас сведения о черепичных порядках содержатся в [3]–[6].

Обозначим через R радикал Джекобсона порядка Λ . Порядок Λ является приведенным тогда и только тогда, когда его матрица показателей $\mathcal{E}(\Lambda)$ является приведенной. Пусть $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n e_{ii}\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \Lambda e_{ii}$ – разложение приведенного порядка Λ в прямую сумму неразложимых проективных правых и левых модулей, $U_i = e_{ii}\Lambda/e_{ii}R$ и $V = \Lambda e_{ii}/Re_{ii}$, $i = 1, \dots, n$. Определение матрицы показателей $\mathcal{E}(J)$ идеала J порядка Λ см. в [6].

Пусть $Q(\Lambda)$ – колчан приведенного черепичного порядка Λ и $[Q(\Lambda)]$ – матрица смежности $Q(\Lambda)$. Легко показать, что $[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$, причем матрица $[Q(\Lambda)]$ является $(0, 1)$ -матрицей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Правой (левой) Λ -решеткой* называется правый (левый) Λ -модуль, который является конечно порожденным свободным $\mathcal{O}$ -модулем.

В частности, все конечно порожденные проективные Λ -модули являются Λ -решетками.

Среди Λ -решеток выделим, так называемые, *неприводимые* Λ -решетки, т.е. Λ -решетки, лежащие в простом правом (левом) $\tilde{\Lambda}$ -модуле. Эти решетки образуют частично упорядоченное множество $S_r(\Lambda)$ ($S_l(\Lambda)$) относительно включения и являются структурами относительно операций суммы и пересечения неприводимых Λ -решеток, причем

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_{ij} &\geq \alpha_j, & \text{если } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(\Lambda), \\ \alpha_j + \alpha_{ij} &\geq \alpha_i, & \text{если } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(\Lambda). \end{aligned}$$

Буква T обозначает операцию транспонирования.

Для наших целей достаточно ограничиться случаем приведенного черепичного порядка Λ . В этом случае элементы $S_r(\Lambda)$ ($S_l(\Lambda)$) находятся в биективном соответствии с целочисленными вектор-строками $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (вектор-столбцами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$). Отношение порядка на множестве векторов, а также операции над ними, соответствующие сложению и пересечению неприводимых Λ -решеток, очевидны. Решетки $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $N = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеют место равенства $\alpha_i = \beta_i + z$, $i = 1, \dots, n$, где $z \in \mathbb{Z}$.

Для каждой неприводимой Λ -решетки $M \in S_r(\Lambda)$ определим двойственную неприводимую левую Λ -решетку M^* следующим образом. Пусть $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Положим $M^* = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)^T$. Очевидно, M^* – неприводимая Λ -решетка. По той же формуле для каждой левой неприводимой Λ -решетки N определяется двойственная неприводимая правая Λ -решетка N^* . Нетрудно проверить, что $M^{**} = M$ ($N^{**} = N$). Кроме того, для любых $M_1, M_2 \in S_r(\Lambda)$ справедливы равенства $(M_1 + M_2)^* = M_1^* \cap M_2^*$ и $(M_1 \cap M_2)^* = M_1^* + M_2^*$. Кроме того, если $M_1 \subset M_2$ – две неприводимые Λ -решетки, то $M_2^* \subset M_1^*$. (В этом случае решетка M_2 называется *надмодулем* решетки M_1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Неприводимая Λ -решетка Q называется относительно инъективной*, если $Q \simeq Q_i^*$, где Q_i – неразложимый проективный левый Λ -модуль.

ЛЕММА 1.1 [6]. *Пусть Q_1 и Q_2 – относительно инъективные неприводимые Λ -решетки, $X_1 \supset Q_1$ и $X_2 \supset Q_2$ – единственные минимальные надмодули Q_1 и Q_2 соответственно. Тогда простые Λ -модули X_1/Q_1 и X_2/Q_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны Λ -решетки Q_1 и Q_2 .*

Пусть $M_1, \dots, M_t \in S_r(\Lambda)$. Определим $(M_1 \oplus \dots \oplus M_t)^* = M_1^* \oplus \dots \oplus M_t^*$, где $M_1 \oplus \dots \oplus M_t$ – внешняя прямая сумма.

Очевидно, $M_1 \oplus \dots \oplus M_t$ является Λ -решеткой в $W^t = W \oplus \dots \oplus W$, где W – простой $\tilde{\Lambda}$ -модуль. (M^n обозначает прямую сумму n экземпляров M , $M^0 = 0$).

Напомним, что Λ -решетка $\mathcal{L}$ называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой неприводимых Λ -решеток [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Вполне разложимая Λ -решетка $\mathcal{L}$ называется *относительно инъективной*, если левая Λ -решетка $\mathcal{L}^*$ проективна.

Черепичный порядок

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} \theta$$

является вполне разложимой правой и левой Λ -решеткой, лежащей в $\tilde{\Lambda} = M_n(D)$. Λ -решетка $\mathcal{L}$, лежащая в $\tilde{\Lambda}$, называется *полной*, если $\mathcal{L} \simeq \theta^n_{\mathcal{O}}$ как θ -модуль. Если полная Λ -решетка $\mathcal{L}$ является левым Λ -модулем, то

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\gamma_{ij}} \theta,$$

и матрицу (γ_{ij}) будем называть *матрицей показателей* Λ -решетки $\mathcal{L}$ и обозначать $\mathcal{E}(\mathcal{L})$. Такие Λ -решетки называют *дробными идеалами* порядка Λ . Вполне разложимую решетку Λ_{Λ}^* обозначим через Δ .

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Вполне разложимая левая Λ -решетка Δ является правой полной Λ -решеткой, причем*

$$\mathcal{E}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{n1} \\ -\alpha_{12} & 0 & \dots & -\alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что k -я строка матрицы $\mathcal{E}(\Delta)$ $(-\alpha_{1k}, -\alpha_{2k}, \dots, -\alpha_{nk})$ задает правую неприводимую Λ -решетку. Обозначим $\beta_i = -\alpha_{ik}$. Неравенство $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ перепишем в виде $-\alpha_{ik} + \alpha_{ij} \geq -\alpha_{jk}$, т.е. $\beta_i + \alpha_{ij} \geq \beta_j$, откуда получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. *Дробный идеал Δ является относительно инъективной правой и относительно инъективной левой Λ -решеткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что ${}_{\Lambda} \Delta^* = \Lambda_{\Lambda}$.

Очевидно,

$${}_{\Lambda} R^* = R_{\Lambda}^* = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{n1} \\ -\alpha_{12} & -1 & \dots & -\alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Обозначим $X = {}_{\Lambda} R^*$.

ЛЕММА 1.2. *Для $i = 1, \dots, n$ $e_{ii}X/e_{ii}\Delta = U_i$ и $Xe_{ii}/\Delta e_{ii} = V_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для левого случая следует из того, что $e_{ii}R$ — единственный максимальный подмодуль в $e_{ii}\Lambda$ и свойств двойственности. В правом случае доказательство совершенно аналогично.

2. Конечные частично упорядоченные множества и $(0, 1)$ -порядки. Следуя [8] и [3], по каждому конечному частично упорядоченному множеству $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ построим приведенный черепичный $(0, 1)$ -порядок $\Lambda(P)$, полагая $\mathcal{E}(\Lambda(P)) = (\alpha_{ij})$, причем $\alpha_{ij} = 0 \iff p_i \leq p_j$ и $\alpha_{ij} = 1$ в противном случае. Тогда $\Lambda(P) = \{\theta, \mathcal{E}(\Lambda(P))\}$ является приведенным $(0, 1)$ -порядком.

Наоборот, приведенный $(0, 1)$ -порядок $\Lambda = \{\theta, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$, лежащий в $M_n(D)$, задает частичный порядок на множестве $\{1, \dots, n\}$ по правилу $i \leq j \iff \alpha_{ij} = 0$. Очевидно, при различных нумерациях элементов частично упорядоченного множества P получаются изоморфные $(0, 1)$ -порядки [9].

Пусть, как и раньше, $P_{\max}$ — множество всех максимальных элементов P , $P_{\min}$ — множество всех минимальных элементов P , $P_{\max} \times P_{\min}$ — их декартово произведение.

ТЕОРЕМА 2.1 [10]. Колчан $Q(\Lambda(P))$ приведенного черепичного $(0, 1)$ -порядка получается из диаграммы $Q(P)$ добавлением стрелок σ_{ij} для всех $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$.

В частности, если $P_{\min} = P_{\max}$, мы получаем полный простой колчан, имеющий по одной петле в каждой вершине. Матрица показателей такого $(0, 1)$ -порядка Λ_n имеет нули только на главной диагонали.

ТЕОРЕМА I. Для любого конечного частично упорядоченного множества P существует счетное множество фробениусовых колец $F_m(P)$ с тождественной подстановкой Накаямы и $Q(F_m(P)) = Q(\Lambda(P))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для дробного идеала Δ существует наименьшее натуральное число t такое, что $\pi^t \Delta \subset R^2$. Ясно, что $J = \pi^t \Delta$ является двусторонним идеалом $(0, 1)$ -порядка $\Lambda(P)$. Обозначим $F_m(P) = \Lambda(P)/\pi^m J$. Так как $\pi^m J \subset R^2$, то $Q(F_m(P)) = Q(\Lambda(P))$. Описание колчана $Q(\Lambda(P))$ дает теорема 2.1. Артиново кольцо $F_m(P)$ является фробениусовым кольцом. Действительно, имеет место цепочка включений

$$\Lambda \supset R \supset R^2 \supset \pi^{m+t} X \supset \pi^m J.$$

Всякий неразложимый проективный $F_m(P)$ -модуль имеет вид $\bar{P}_i = e_{ii} \Lambda / e_{ii} \pi^m J$. Поэтому $\text{tor } \bar{P}_i = U_i$ и по лемме 1.2 $\text{soc } \bar{P}_i = e_{ii} \pi^{m+t} X / e_{ii} \pi^{m+t} \Delta = U_i$ для $i = 1, \dots, n$. То же справедливо для левых модулей. Поэтому подстановка Накаямы кольца $F_m(P)$ тождественна.

3. Общий случай. Слабо симметрические алгебры. Используя те же рассуждения и обозначения, что и в предыдущем пункте, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Для любого приведенного черепичного порядка Λ над дискретно нормированным кольцом существует счетное множество фробениусовых колец $F_m(\Lambda)$ с тождественной подстановкой Накаямы и $Q(F_m(\Lambda)) = Q(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для дробного идеала Δ существует наименьшее натуральное число t такое, что $\pi^t \Delta \subset R^2$. Факторкольцо $Q(F_m(\Lambda)) = \Lambda / \pi^{m+t} \Delta$ является фробениусовым кольцом с тождественной подстановкой Накаямы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно, что подстановки Накаямы групповых и симметрических алгебр тождественны. В книге [2, с. 444] QF -алгебры с тождественной подстановкой Накаямы называются *слабо симметрическими алгебрами*. Беря в качестве $\mathcal{O}$ кольцо формальных степенных рядов $k[[t]]$ над полем k , получаем для каждого приведенного черепичного порядка над $k[[t]]$ счетную серию слабо симметрических алгебр над полем k .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gubareni N. M., Kirichenko V. V. Rings and Modules. Czestochowa, 2001.
2. Lam T. Y. Lectures on Modules and Rings. Graduate Texts in Math. V. 189. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1999.
3. Завадский А. Г., Кириченко В. В. // Записки науч. семина. ЛОМИ. 1976. Т. 57. С. 100–116.
4. Simson D. Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories. Algebra, Logic and Applications. V. 4. Brooklyn (N.Y.): Gordon and Breach Science Publ., 1992.
5. Завадский А. Г., Кириченко В. В. // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 3. С. 323–345.
6. Roggenkamp K. W., Kirichenko V. V., Khibina M. A., Zhuravlev V. N. // Comm. Algebra. 2001. V. 29(9). P. 4231–4247.
7. Кириченко В. В. // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 2. С. 139–144.
8. Дрозд Ю. А., Завадский А. Г., Кириченко В. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. С. 291–293.
9. Завадский А. Г. // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 2. С. 325–335.
10. Kirichenko V. V., Tsypiy T. I. // Representation Theory and Computer Algebra. Kiev, 1997. P. 20–22.

(М. А. Докучаев, Ж. Т. Черноусова) Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, Украина
(В. В. Кириченко) Университет г. Сао-Пауло, Бразилия

Поступило
26.02.2002