Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразование Кокстера и квазиколчаны, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 472–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:56:49

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОКСТЕРА И КВАЗИКОЛЧАНЫ

В. А. Колмыков

Пусть A – комплексная $(l \times l)$ -матрица¹. Если $U = U(i, j)$ – некоторое условие, наложенное на i и j , то через $A_{(U)}$ обозначим матрицу, получающуюся из A , если в ней оставить все элементы, индексы которых удовлетворяют условию U , а остальные заменить нулями. Например, если k – фиксированное число, то $A_{(j=k)}$ получается из A занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в k -м столбце. Положим $R_k = R_k(A) = I - A_{(j=k)}$. Обозначим

$$C(A) = R_1(A)R_2(A) \cdots R_l(A).$$

Преобразованием Кокстера, связанным с матрицей A , называется преобразование пространства строк $x \mapsto xC(A)$.

С матрицей A можно связать граф Γ_A следующим образом. Множество его вершин $I = \{1, \dots, l\}$, множество ребер S состоит из тех двухэлементных подмножеств $\{i, j\}$ множества I , для которых $a_{ij} \neq 0$ либо $a_{ji} \neq 0$.

ТЕОРЕМА [1, гл. 5, § 6, упр. 3]. Пусть Γ_A – лес и $a_{ii} = 2$ для любых² i . Тогда

$$|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^l |\lambda I + \lambda^{-1} I + A_{(i \neq j)}|.$$

В настоящей заметке мы ослабляем первое ограничение и снимаем второе.

Ориентированным графом назовем пару (I, E) , где I – конечное множество (вершин), $E \subseteq I^2$. Элемент $(i, j) \in E$ называется *стрелкой* с началом i и концом j . *Контуром* длины $k \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ в ориентированном графе называется последовательность $\{e_1, \dots, e_k\}$ различных стрелок таких, что конец e_i – это начало e_{i+1} и ни одна вершина не является концом двух стрелок из этой последовательности. *Колчан* – это ориентированный граф, в котором нет контуров. *Квазиколчаном* назовем ориентированный граф, в котором нет контуров длины ≥ 3 .

С матрицей A свяжем ориентированный граф O_A следующим образом: $I = \{1, \dots, l\}$, $(i, j) \in E$, тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$.

ПРИМЕР. Если Γ_A – лес, то O_A – квазиколчан.

ТЕОРЕМА. а) Пусть O_A – квазиколчан. Тогда

$$|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^l |\lambda I + \lambda^{-1}(A_{(i=j)} - I) + A_{(i \neq j)}|.$$

б) Заменим в матрице A нулями все элементы a_{ij} такие, что $a_{ji} = 0$, и полученную матрицу обозначим $\tilde{A}$. Тогда $\Gamma_{\tilde{A}}$ – лес и $|\lambda I - C(A)| = |\lambda I - C(\tilde{A})|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Модифицируем рассуждения из [1, гл. 5, § 6, упр. 3]. Определения вспомогательных конструкций процитированы оттуда же.

1) Сначала не будем накладывать ограничений на матрицу A . Для $\alpha = \{i, j\} \in S$ обозначим через σ_α транспозицию i и j (рассматриваемую как элемент симметрической группы S_l) и положим $a_\alpha = -a_{ij}a_{ji}$.

Пусть $\mathcal{X}$ – множество подмножеств S , состоящих из ребер с различными концами. Обозначим через $C(X)$, $X \in \mathcal{X}$, множество тех $i \in I$, которые не являются концами ребер из X , и положим

$$\sigma_X = \prod_{\alpha \in X} \sigma_\alpha, \quad a_X = \prod_{\alpha \in X} a_\alpha.$$

¹Все результаты заметки верны и в более общем (принятом Н. Бурбаки) случае, следует только заменить $\mathbb{C}$ на коммутативное кольцо K , а пространство строк – на K -модуль строк.

²Во французском и в русском изданиях [1] опечатка. Написано $a_{ii} = 1$, следует читать $a_{ii} = 2$.

В [1, гл. 5, § 6, упр. 3] было доказано, что

$$|\lambda I - C(A)| = |A_{(i>j)} + ((\lambda - 1)I + A_{(i=j)}) + \lambda A_{(i<j)}|.$$

Рассмотрим определитель, стоящий в правой части. Пусть $\sigma \in S_l$ и пусть d_σ – член, соответствующий σ в разложении этого определителя. Если σ имеет вид σ_X с $X \in \mathcal{X}$, то

$$d_\sigma = a_X \lambda^{\text{Card}(X)} \prod_{i \in C(X)} (\lambda + a_{ii} - 1).$$

Положим

$$f_A(\lambda) = |\lambda I + \lambda^{-1}(A_{(i=j)} - I) + A_{(i \neq j)}|.$$

Рассмотрим определитель, стоящий в правой части. Пусть $\sigma \in S_l$ и пусть D_σ – член, соответствующий σ в разложении этого определителя. Если σ имеет вид σ_X с $X \in \mathcal{X}$, то

$$D_\sigma = a_X \prod_{i \in C(X)} (\lambda + \lambda^{-1}(a_{ii} - 1)).$$

2) Предположим теперь, что O_A – квазиколчан. Если $\sigma \in S_l$ не имеет вида σ_X с $X \in \mathcal{X}$, то $d_\sigma = D_\sigma = 0$ (действительно, если в каноническом разложении σ в произведение независимых циклов имеется цикл длины ≥ 3 , то, двигаясь по вершинам квазиколчана O_A вслед за этим циклом, мы сойдем с O_A , т.е. соответствующий элемент a_{ij} равен нулю, но a_{ij} – множитель из d_σ и D_σ). Отсюда

$$\begin{aligned} |\lambda I - C(A)| &= \sum_{X \in \mathcal{X}} a_X \lambda^{\text{Card}(X)} \prod_{i \in C(X)} (\lambda + a_{ii} - 1), \\ f_A(\lambda) &= \sum_{X \in \mathcal{X}} a_X \prod_{i \in C(X)} (\lambda + \lambda^{-1}(a_{ii} - 1)), \end{aligned}$$

поэтому

$$|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^l \sum_{X \in \mathcal{X}} a_X \prod_{i \in C(X)} (\lambda + \lambda^{-1}(a_{ii} - 1)),$$

т.е. $|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^l f_A(\lambda)$.

б) Если бы $\Gamma_{\tilde{A}}$ не был лесом, то в нем нашелся бы простой цикл длины ≥ 3 , каждому его ребру соответствуют две противоположные стрелки в квазиколчане $O_{\tilde{A}}$, т.е. в этом квазиколчане был бы контур длины ≥ 3 ; противоречие. Если $a_{ji} = 0$, то стрелка (i, j) не принадлежит никакому контуру квазиколчана O_A (в контур длины 2 она не входит, так как стрелки (j, i) нет, а контуров длины ≥ 3 в квазиколчане нет), поэтому a_{ji} не входит множителем ни в какое ненулевое слагаемое d_σ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.

Воронежский государственный университет
E-mail: kolmykov@vak.vsu.ru

Поступило
20.03.2001