Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Лиманский, Оценки для систем максимальных дифференциальных полиномов без смешанных производных, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 474–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:44:17

ОЦЕНКИ ДЛЯ СИСТЕМ МАКСИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ БЕЗ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Д. В. Лиманский

1. Введение. В настоящей работе изучаются условия подчиненности одного дифференциального полинома $Q(D)$ системе других $\{P_j(D)\}_1^N$ в пространствах $L_p(\Omega)$. Другими словами, рассматривается задача об описании линейных пространств $L(P_1, \dots, P_N)$, зависящих, вообще говоря, от Ω и $p \in [1; \infty]$, дифференциальных операторов $Q(D)$, удовлетворяющих оценке

$$\|Q(D)f\|_{L_p(\Omega)} \leq C \left[\sum_1^N \|P_j(D)f\|_{L_p} + \|f\|_{L_p} \right] \quad \forall f \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad (1)$$

с некоторой константой C , не зависящей от f .

Сформулированная выше задача была исчерпывающе решена Л. Хермандером [1] при $N = 1$ (и $p = 2$) (см. также [2], [3]). При $N > 1$ пространства $L(P_1, \dots, P_N)$ описаны в ряде случаев. Так, в работах К. Смита [5] и О. Бесова [6] получен критерий коэрцитивности, т.е. критерий максимально возможной размерности пространств $L(P_1, \dots, P_N)$ при $1 < p < \infty$. Далее, для ряда областей $\Omega (\subseteq \mathbb{R}^n)$ пространства $L(P_1, \dots, P_N)$ описаны В. П. Ильиным в случае дифференциальных мономов $P_j(D)$ (см. [4, § 13]). И, наконец, в работе М. М. Маламуда [7] указаны два класса операторов $\{P_j(D)\}_1^N$, для которых размерность пространства $L(P_1, \dots, P_N)$ минимальная, т.е. $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N + 1$.

Приведем нужный в дальнейшем результат из [7].

ТЕОРЕМА 1 [7]. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\{P_j(D)\}_1^N$ – дифференциальные полиномы с символами $\{P_j(\xi)\}_1^N$. Если

- а) символы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ алгебраически независимы;
- б) общий слой отображения $P = (P_1, \dots, P_N): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$ неприводим (т.е. алгебраические многообразия $P^{-1}(\alpha) = \{\xi \in \mathbb{C}^n : P_1(\xi) - \alpha_1 = \dots = P_N(\xi) - \alpha_N = 0\}$ неприводимы при п.в. $\alpha \in \mathbb{C}^N$),

то оценка (1) эквивалентна равенству

$$Q(D) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j(D), \quad (2)$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq N$, т.е. равенству $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N + 1$.

Отправляясь от этого результата, в [7] показано, что для линейно независимых операторов

$$P_j(D) = \sum_{k=1}^n a_{jk} D_k^{l_k}, \quad l_k > 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq N = n - 1,$$

линейная оболочка которых не содержит ни одного дифференциального монома $D_k^{l_k}$ ($1 \leq k \leq n$), справедливо равенство $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N + 1$.

Там же, в [7], высказана гипотеза о справедливости равенства $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N + 1$ в случае системы линейно независимых операторов

$$P_j(D) = \sum_{k=1}^n a_{jk} D_k^{l_{jk}}, \quad l_{jk} > 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq N = n - 1,$$

с произвольной матрицей показателей (l_{jk}) при условии, что $P_j(D)$ не содержат в своей линейной оболочке полиномов от одного переменного. В [7] установлена справедливость этой гипотезы в двух случаях:

- 1) матрица коэффициентов (a_{jk}) треугольная (т.е. $a_{jk} = 0$ при $j > k$);
- 2) матрица показателей (l_{jk}) состоит из одинаковых строк (т.е. $l_{jk} = l_k, 1 \leq j \leq N$).

В [15] гипотеза была установлена при $N = 2$. В [14] сформулировано (теорема 1) и доказано достаточное условие алгебраического характера, при выполнении которого справедливо равенство $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N + 1$, а затем при помощи этого утверждения установлена справедливость гипотезы при $N = 2$ в более общей формулировке. Некоторые частные случаи этой гипотезы при $N = 3$ установлены в [13].

В настоящей работе описанная выше гипотеза Маламуда из [7] доказана при дополнительных условиях. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\{P_j(D)\}_1^N$ – дифференциальные полиномы без смешанных производных:

$$P_j(D) = \sum_{k=1}^n Q_{jk}(D_k), \quad Q_{jk} \neq \text{const}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad n > N. \quad (3)$$

Пусть также

- а) символы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ линейно независимы;
- б) линейная оболочка операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ не содержит k линейно независимых полиномов от k переменных для всех $k \leq N - 1$.

Тогда оценка (1) эквивалентна равенству (2) с некоторыми $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq N$, т.е. равенству $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N + 1$.

По отношению к гипотезе из [7] в данной теореме усилены требования на линейную оболочку $\{P_j\}_1^N$ и рассмотрены системы операторов гораздо более общего вида (в гипотезе $Q_{jk}(D_k) = a_{jk} D_k^{l_{jk}}$ – только мономы).

2. Вспомогательные результаты. Ниже будут сформулированы некоторые известные понятия и результаты, а также ряд вспомогательных утверждений. Используемая терминология и обозначения, в основном, соответствуют книгам [9]–[11]. Для алгебраических многообразий над $\mathbb{C}$ будет использоваться классическая топология и топология Зарисского (последняя иногда не будет упоминаться). Все рассматриваемые отображения алгебраические (регулярные).

Напомним, что доминирующее отображение $F: X \rightarrow Y$ (см. [11, гл. 3, § 3А]) называется *конечным*, если кольцо $\mathbb{C}[X]$ цело над кольцом $F^*\mathbb{C}[Y]$. Здесь $F^*: \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ – вложение колец. Степень расширения $\deg F := [\mathbb{C}(X) : F^*\mathbb{C}(Y)]$ называется *степенью конечного отображения* F (см. [9, гл. II, § 6, с. 176; гл. I, § 5, с. 80]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9, гл. II, § 5, с. 157]. Если Y – нормальное многообразие и $\text{Sing } Y$ – множество особых точек Y , то $\text{codim } \text{Sing } Y \geq 2$.

Из теоремы о размерности слоев (см. [11, гл. 3, § 3А, с. 71, 73], [9, гл. I, § 6, с. 97]) выводится следующее ее обобщение.

ЛЕММА 1. Пусть $F: X \rightarrow Y$ – доминирующее отображение аффинных многообразий, Y неприводимо, $\dim X = r$, $\dim Y = s$. Тогда существует непустое открытое по Зарисскому множество $Y_0 \subseteq Y$ такое, что $\forall y \in Y_0$ выполняется неравенство $\dim F^{-1}(y) \leq r - s$.

Если к тому же X неприводимо, то [9] $\dim F^{-1}(y) = r - s \quad \forall y \in Y_0$.

3. Разложение отображения P . Ниже будет рассматриваться алгебраическое отображение $P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$, описанное в теореме 2, в предположении, что его общий слой P приводимым.

ЛЕММА 2 (ср. [7, предложение 3]). Доминирующее отображение $P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$, общий слой которого приводим, раскладывается в композицию $P = \sigma \circ \Phi$ доминирующего алгебраического отображения $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow Y^\nu$, общий слой которого неприводим, и конечного отображения $\sigma: Y^\nu \rightarrow \mathbb{C}^N$ степени $\deg \sigma > 1$. При этом Y^ν – некоторое нормальное аффинное многообразие, $\dim Y^\nu = N$.

ЛЕММА 3. Пусть Z – множество точек ветвления [9, гл. II, §6, с. 177] отображения $\sigma: Y^\nu \rightarrow \mathbb{C}^N$. Тогда $\text{codim } Z = 1$.

ЛЕММА 4. Пусть $x_0 \in Z \setminus \sigma(\text{Sing } Y^\nu)$. Тогда существует точка $y_i \in \sigma^{-1}(x_0)$ такая, что $\dim \text{Im } d_{y_i} \sigma \leq N - 1$ и все точки из прообраза $\Phi^{-1}(y)$ особые для отображения P (т.е. ранг якобиана P в этих точках меньше N).

ЛЕММА 5. Имеем $\text{Codim}(\overline{Y^\nu \setminus \text{Im } \Phi}) \geq 2$.

4. Лемма о минорах и следствия.

ЛЕММА 6. Пусть $A := A(z_1, \dots, z_n) = (f_{ij}(z_j))$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq n$, $n \geq N$, – полиномиальная матрица. Если все ее миноры N -го порядка – тождественные нули, то цепочкой элементарных преобразований строк и перестановкой столбцов эту матрицу можно привести к виду с нулевым правым верхним углом, содержащим хотя бы один элемент главной диагонали, т.е. с углом вида $k \times l$, $k + l = n + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{P_j(\xi)\}_1^N$ – система полиномов вида (3). Тогда при каждом $k \in \{1, \dots, n\}$ и $c \in \mathbb{C}$ сужение отображения $P = (P_1, \dots, P_N): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$ на гиперплоскость $\{z \in \mathbb{C}^n : z_k = c\}$ является доминирующим.

В частности, отображение P само доминирующее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = n$ и $\tilde{P}: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^N$ – сужение отображения $P = (P_1, \dots, P_N): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$ на гиперплоскость $\{z \in \mathbb{C}^n : z_n = c\}$. Предположим, что все $(N \times N)$ -миноры матрицы Якоби отображения $\tilde{P}$ – тождественные нули. Тогда преобразованиями из условия леммы 6 эту матрицу можно привести к виду с нулевым правым верхним углом порядка $k \times l$, $k + l = n$. Но это означало бы, что $\text{Span}\{P_j\}_1^N$ содержит k линейно независимых полиномов от k переменных $z_1, \dots, z_{n-l-1}, z_n$. Противоречие с условием б) теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеем $\text{Codim } \text{Sing } P \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае все миноры N -го порядка матрицы Якоби отображения P имели бы нетривиальный общий делитель Δ . Если какая-либо переменная z_i входит в Δ , то все $(N \times N)$ -миноры последней матрицы, не содержащие z_i , тождественно равны нулю. Следовательно, при фиксировании этой переменной получается недоминирующее отображение. Противоречие со следствием 1.

5. Набросок доказательства основной теоремы. Для доказательства теоремы 2 мы будем проверять выполнимость условий а) и б) теоремы 1.

Условие а) выполнено, так как из доминируемости отображения $P = (P_1, \dots, P_N): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N$ (следствие 1) следует алгебраическая независимость полиномов $\{P_j\}_1^N$.

Теперь предположим, что условие б) теоремы 2 нарушается, т.е. общий слой отображения P будет приводимым. Тогда отображение P раскладывается в композицию $P = \sigma \circ \Phi$ двух отображений: $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow Y^\nu$ и $\sigma: Y^\nu \rightarrow \mathbb{C}^N$ (см. лемму 2).

Пусть Z_0 – некоторая неприводимая компонента коразмерности 1 множества Z точек ветвления отображения σ (см. лемму 3). Из свойств конечных отображений, леммы 5 и предложения 1 следуют соотношения

$$\text{codim } \sigma(\text{Sing } Y^\nu) = \text{codim } \text{Sing } Y^\nu \geq 2, \quad \text{codim } \sigma(\overline{Y^\nu \setminus \text{Im } \Phi}) = \text{codim}(\overline{Y^\nu \setminus \text{Im } \Phi}) \geq 2.$$

Поэтому $W := Z_0 \setminus (\sigma(\text{Sing } Y^\nu) \cup \sigma(\overline{Y^\nu \setminus \text{Im } \Phi}))$ – непустое открытое в Z_0 множество.

Пусть $v \in W$. Тогда существует точка $u_i \in \sigma^{-1}(v)$ такая, что $u_i \in \text{Im } \Phi$, $\dim \text{Im } d_{u_i} \sigma \leq N - 1$ и $\Phi^{-1}(u_i) \subseteq \text{Sing } P$ (лемма 4). Очевидно, $\Phi^{-1}(u_i) \subseteq P^{-1}(v)$. С одной стороны, по теореме о размерности слоев $\dim \Phi^{-1}(u_i) \geq \dim \mathbb{C}^n - \dim Y^\nu = n - N$ и, следовательно, $\dim(P^{-1}(v) \cap \text{Sing } P) \geq n - N$. С другой стороны, рассмотрим множество $H := \text{Sing } P \cap P^{-1}(Z_0)$, $\dim H \leq \dim \text{Sing } P \leq n - 2$ (следствие 2) и доминирующее отображение $P_H := P|_H: H \rightarrow Z_0$. Согласно лемме 1 существует непустое открытое множество $V \subseteq Z_0$ такое, что

$$\forall \tilde{v} \in V: \quad \dim P_H^{-1}(\tilde{v}) \leq \dim H - \dim Z_0 \leq n - N - 1. \quad (4)$$

Но $\forall v \in W \quad P_H^{-1}(v) = P^{-1}(v) \cap \text{Sing } P$, поэтому

$$\forall v \in W : \quad \dim P_H^{-1}(v) = \dim(P^{-1}(v) \cap \text{Sing } P) \geq n - N. \quad (5)$$

Так как пересечение $V \cap W$ непусто, то равенства (4) и (5) приводят к противоречию.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены и, следовательно, $\dim L(P_1, \dots, P_N) = N+1$. Теорема 2 полностью доказана.

Автор выражает благодарность М. М. Маламуду за постоянное внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. Теория общих дифференциальных операторов в частных производных. М.: ИЛ, 1959.
2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965.
4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
5. Smith K. T. // Bul. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 368–370.
6. Бесов О. В. // Матем. сб. 1967. Т. 73 (115). № 4. С. 585–599.
7. Маламуд М. М. // Тр. ММО. 1995. Т. 56. С. 206–261.
8. Зариский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 2. М.: ИЛ, 1963.
9. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988.
10. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1988.
11. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. 1. Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979.
12. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
13. Лиманский Д. В. Об условиях подчиненности для систем дифференциальных операторов в пространствах $L_p(\Omega)$. Случай трех операторов // Труды Института прикладной математики и механики. Т. 4. Донецк, 1999. С. 100–106.
14. Limansky V. V., Limansky D. V. // Methods of Functional Analysis and Topology. 1998. V. 4. № 3. P. 45–57.
15. Лиманский В. В., Лиманский Д. В. // Докл. НАН Украины. 1998. № 12. С. 24–28.