Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Положительные значения полиномов, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:20:58

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛИНОМОВ

В. А. Юдин

Для действительнзначных тригонометрических полиномов (ТП) $f(x)$ порядка $n - 1$ с нулевым средним значением на $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ в [1] доказано неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{T} : f(x) \geq 0\} \geq \frac{2\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Из примера

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \cos kx = \sin \frac{\pi}{n} \frac{\cos^2 nx/2}{\cos x - \cos \pi/n} \quad (2)$$

видна точность оценки (1); она приводит к важным следствиям: любой ТП возрастает, выпукл, ... на множестве из $\mathbb{T}$ с мерой не менее $2\pi/n$. Экстремальными полиномами являются последовательные интегралы от (2). Задачи подобного типа рассматривались в 60-е годы (С. Б. Стечкин, Л. В. Тайков, Н. И. Черных). Впоследствии неравенство (1) многократно переоткрывалось, исследовалось на других компактах. В последнее время их многомерные варианты используются в различных областях. В частности, в дискретной математике наиболее важно иметь конструкции “достаточно хороших” полиномов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00787, и фонда INTAS, грант № 99-01080.

Пусть $\text{sp } f$ – спектр ТП $f(x)$

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu \exp\{i\nu x\}, \quad \text{sp } f = \{\nu \in \mathbb{Z} : \widehat{f}_\nu \neq 0\}.$$

Через $T_{k,n}$, $2k \leq n$, обозначим совокупность ТП $f(x)$, $f(x) \not\equiv 0$, таких, что $\text{sp } f \subset \{\nu \in \mathbb{Z} : k \leq |\nu| \leq n-k\}$. Иначе говоря, ряд Фурье f содержит гармоники с номерами от k до $n-k$.

Установим неравенство типа (1) для ТП из $T_{k,n}$. Положим

$$P(f) = \{x \in \mathbb{T} : f(x) \geq 0\}, \quad P_t(f) = \{x \in \mathbb{T} : f(x-t) \geq 0\}, \\ M_n(f) = \{P_0(f), P_{2\pi/n}(f), \dots, P_{2\pi(n-1)/n}(f)\}.$$

Покрытие $\mathbb{T}$ с кратностью r системой множеств $E_1, E_2, \dots$ означает: для любой точки x из $\mathbb{T}$ существует не менее r множеств E_i , ее содержащих. Через

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

обозначим сумму Минковского множеств A и B . Имеет место

ТЕОРЕМА. Для любых $k, n \in \mathbb{N}$, $2k \leq n$, и для любого действительного ТП из $T_{k,n}$ совокупность множеств $M_n(f)$ покрывает $\mathbb{T}$ с кратностью k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существуют $\alpha \in \mathbb{T}$ и $s, s \in \{1, \dots, k\}$, такие, что

$$f\left(\alpha - \frac{2\pi\nu_1}{n}\right) \geq 0, \quad \dots, \quad f\left(\alpha - \frac{2\pi\nu_s}{n}\right) \geq 0,$$

а

$$f\left(\alpha - \frac{2\pi\mu_{s+1}}{n}\right) < 0, \quad \dots, \quad f\left(\alpha - \frac{2\pi\mu_n}{n}\right) < 0,$$

где $\nu_1, \dots, \nu_s; \mu_{s+1}, \dots, \mu_n$ – некоторая подстановка из чисел $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Положим $\omega(x) = \cos(x-a) - \cos \delta$, $\delta \in (0, 2\pi/n)$, и рассмотрим новую функцию

$$F(x) = \omega\left(x + \frac{2\pi\nu_1}{n}\right) \cdots \omega\left(x + \frac{2\pi\nu_s}{n}\right) \cdot f(x).$$

Отметим два ее свойства.

I) Функция $F(x) \in T_{k-s,n}$.

Действительно, $\text{sp } \omega(x) = \{0, \pm 1\}$; значит,

$$\text{sp } F \subset \underbrace{\{0, \pm 1\} + \dots + \{0, \pm 1\}}_s + \{\pm k, \dots, \pm(n-k)\} = \{0, \pm 1, \dots, \pm s\} + \{\pm k, \dots, \pm(n-k)\} \\ = \{\pm(k-s), \dots, \pm(n-k+s)\}.$$

Таким образом, при любом допустимом s

$$\text{sp } F \subset \{\pm 1, \dots, \pm(n-1)\}.$$

II) Во всех точках $\{\alpha - 2k\pi/n\}_{k=0}^{n-1}$ функция $F(x)$ знакопостоянна.

Рассмотрим два случая:

а) $k \in \{\nu_1, \dots, \nu_s\}$;

б) $k \in \{\mu_{s+1}, \dots, \mu_n\}$.

Случай а). Пусть $k = \nu_j$. Тогда

$$F\left(\alpha - \frac{2\pi\nu_j}{n}\right) = \left(\cos \frac{2\pi(\nu_1 - \nu_j)}{n} - \cos \delta\right) \cdots \left(\cos \frac{2\pi(\nu_s - \nu_j)}{n} - \cos \delta\right) f\left(\alpha - \frac{2\pi\nu_j}{n}\right).$$

Среди первых s сомножителей один ($s = j$) положителен, а остальные $s - 1$ сомножителей отрицательны. По условию $f(\alpha - 2\pi\nu_j/n) \geq 0$; значит,

$$F\left(\alpha - \frac{2\pi\nu_j}{n}\right) = 0$$

либо

$$\text{sign } F\left(\alpha - \frac{2\pi\nu_j}{n}\right) = (-1)^{s-1}.$$

Случай б). Пусть $k = \mu_j$. Тогда

$$F\left(\alpha - \frac{2\pi\mu_j}{n}\right) = \left(\cos \frac{2\pi(\nu_1 - \mu_j)}{n} - \cos \delta\right) \cdots \left(\cos \frac{2\pi(\nu_s - \mu_j)}{n} - \cos \delta\right) f\left(\alpha - \frac{2\pi\mu_j}{n}\right).$$

Все первые s сомножителей отрицательны и $f(\alpha - 2\pi\mu_j/n) < 0$ по условию; следовательно,

$$\text{sign } F\left(\alpha - \frac{2\pi\mu_j}{n}\right) = (-1)^{s+1} = (-1)^{s-1}.$$

Завершим доказательство теоремы. По свойству I) из формулы прямоугольников находим

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} f\left(\alpha - \frac{2\pi s}{n}\right) = 0,$$

что противоречит свойству II). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях теоремы выполняется неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{T} : f(x) \geq 0\} \geq \frac{2\pi k}{n}. \quad (3)$$

В силу инвариантности меры множества относительно сдвига из теоремы находим

$$2\pi k \leq \sum_{k=1}^n \text{mes } P_{2\pi s/n}(f) = n \text{mes } P(f),$$

откуда следует (3).

Для любых $k, n \in \mathbb{N}$, $2k \leq n$, нетрудно построить экстремальные ТП, показывающие точность оценки (3). При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ ТП $\cos^2 n(x - \alpha)/2$ имеет n двойных нулей $x_1, \dots, x_n$, разбивающих $\mathbb{T}$ на n равных дуг. Выберем k различных пар соседних нулей $(x_{i_s}, x_{i_s+1})_{s=1}^k$ и положим

$$f^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cos^2 n(x - \alpha)/2}{\prod_{s=1}^k [\cos(x - (x_{i_s} + x_{i_s+1})/2) - \cos \pi/n]}. \quad (4)$$

Так как расстояния между соседними нулями $f^*(x)$ равны $2\pi/n$, то

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{T} : f^*(x) \geq 0\} = \frac{2\pi k}{n}.$$

Осталось показать принадлежность f^* классу $T_{k,n}$. Порядок числителя в (4) равен n , а порядок знаменателя равен k . Следовательно, порядок ТП f^* равен $n - k$. Покажем, что

$$\text{sp } f^* \cap \{0, \pm 1, \dots, \pm(k-1)\} = \emptyset,$$

т.е. все первые коэффициенты Фурье f^* равны 0. С этой целью возьмем произвольный ТП $g(x)$ порядка $k - 1$. Произведение $f^* \bar{g}$ будет ТП порядка $n - 1$. По формуле прямоугольников

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^*(x_s) \overline{g(x_s)} \equiv 0.$$

Ортогональность f^* пространству ТП порядка $k - 1$ установлена.

На комплексной плоскости рассмотрим единичную окружность $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и ее образ при отображении многочленами вида

$$f(z) = apz^p + \dots + a_q z^q, \quad 1 \leq p \leq q. \quad (5)$$

Поскольку $f(0) = 0$, то из принципа аргумента нетрудно вывести качественное утверждение: $f(\Gamma)$ пересекается с любым сектором

$$S_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \beta| \leq \delta\}, \quad 0 < \delta \leq \pi, \quad 0 \leq \beta < 2\pi.$$

Вопрос состоит в количественной оценке – *какую долю окружности Γ многочлены (5) обязаны отображать в S_δ ?* Без ограничения общности можно считать $\beta = 0$. При произвольном δ вопрос открыт, а при $\delta = \pi/2$ точное решение вытекает из (3). Выберем k, n так, чтобы $k = p, n - k = q$. Из (3) имеем

$$\text{mes}\{z \in \Gamma : \text{Re } f(z) \geq 0\} = \text{mes}\{x \in \mathbb{T} : \text{Re } f(e^{ix}) \geq 0\} \geq \frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi p}{p+q};$$

доля окружности, отображаемая в правую полуплоскость, не менее $p/(p+q)$. Эта оценка точна. Например, многочлен

$$f^*(z) = \frac{(-1)^{k-1} z^k (1+z^n)}{(1-2\cos \pi z/n + z^2)(1-2\cos 3\pi z/n + z^2) \dots (1-2\cos(2k-1)\pi z/n + z^2)}$$

имеет вид (5). Так как

$$\text{Re } f^*(e^{ix}) = \frac{(-1)^k (1 + \cos nx)}{2^k (\cos x - \cos \pi/n)(\cos x - \cos 3\pi/n) \dots (\cos x - \cos(2k-1)\pi/n)},$$

то

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{T} : \text{Re } f(e^{ix}) \geq 0\} = \frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi p}{p+q}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученные выше неравенства основаны на использовании мультипликативных свойств тригонометрической системы. В то же время имеются другие “полиномы”, например,

$$\sum c_s \left(\{s\alpha\} - \frac{1}{2} \right), \quad \alpha \in (0, 1),$$

или [2]

$$\sum c_s \ln \frac{1}{|2 \sin sx/2|}, \quad x \in \mathbb{T},$$

для которых оценки меры их положительности неизвестны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко А. Г. // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 349–356. 2. Gilbert A. D., Smyth C. J. // J. Lond. Math. Soc. (2). 2000. V. 62. P. 489–504.