Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, Нормальная форма автономной системы с одним нулевым корнем, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 711–720

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm67>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:47:55

УДК 517.91

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНИМ НУЛЕВЫМ КОРНЕМ

В. С. Самовол

В статье рассматриваются задачи гладкой нормализации систем обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная часть которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси.

Библиография: 7 названий.

Введение. В работе рассматривается задача локальной конечно-гладкой приводимости вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме в окрестности особой точки. Речь пойдет о системах, матрица линейной части которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Нормальная форма систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. В частности, подробно исследована задача аналитической приводимости к нормальной форме (см. работы А. Д. Брюно; например, [1]). В данной работе нас будет интересовать задача как о собственно нормальной форме, так и о конечно-гладкой приводимости к ней систем гладких дифференциальных уравнений. Такие задачи также хорошо изучены, однако в большинстве работ исследуются системы с невырожденной особой точкой (или инвариантным многообразием) в то время как даже слабо вырожденные системы весьма мало изучены. По поводу частично вырожденных систем см. [2]. Одна из первых попыток исследования указанных систем представлена в [3].

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где ξ , $Q(\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси и одно нулевое собственное число. Цель данной работы состоит в определении вида нормальной формы такой системы уравнений и в выяснении условий существования конечно-гладкого невырожденного преобразования, приводящего систему (1) к нормальной форме в некоторой окрестности начала координат. Эту задачу мы будем называть *задачей локальной конечно-гладкой нормализации системы* (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00426.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – ненулевые собственные числа матрицы $\tilde{A}$, $\lambda_{n+1} = 0$. С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица $\tilde{A}$ имеет жорданову форму:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \varepsilon_i x_{i-1} + \lambda_i x_i + f_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь x_i – комплексные координаты, при этом, как обычно в подобных случаях, комплексно сопряженным собственным числам соответствуют комплексно сопряженные уравнения системы; комплексная сопряженность координат и уравнений при всех преобразованиях будет сохраняться. Таким образом, преобразованиям системы (2) будут соответствовать вещественные преобразования системы (1).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением системы (2), где $g(0, y) = by^{m+1} + o(|y|^{m+1})$, $b \neq 0$, $m \geq 1$ – некоторое целое число.

Основные результаты работы заключаются в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого целого числа $k > 0$ существует невырожденное преобразование класса C^k , приводящее систему (2) к нормальной форме следующего вида (для простоты мы сохраняем обозначения системы (2)):*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \varepsilon_i x_{i-1} + \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^n a_j^i(y) x_j + \sum_{p=2}^N a_p^i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + \sum_{p=2}^N a_p^{n+1}(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_j^i(y)$ – функции класса C^∞ , $a_j^i(0) = 0$, $a_j^i(y) = 0$, если $\lambda_j \neq \lambda_i$, $a_p^i(x, y) = \sum_{|s|=p} a_s^i(y) x^s$, $a_s^i(y)$ – функции класса C^∞ , $s = (s_1, \dots, s_n)$ – наборы неотрицательных целых чисел, $|s| = \sum_{q=1}^n s_q$ – вес набора s , $x^s = x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$. При $1 \leq i \leq n+1$ $a_s^i(y) = 0$, если $\lambda_i \neq \sum_{q=1}^n s_q \lambda_q$. Число $N = N(k)$, причем $\lim_{k \rightarrow \infty} N(k) = \infty$.

Система (3) представляет собой резонансную нормальную форму полиномиального вида по “невырожденным” координатам, степень которой по этим координатам не превышает числа $N = N(k)$.

Как будет видно из примеров, приведенных в данной статье, интерес представляют такие системы (2), у которых все собственные числа λ_i различны. Для таких систем верны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Если в системе (2) выполняется условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то существует формальное преобразование, приводящее систему (2) к формальной нормальной форме следующего вида (для простоты мы сохраняем обозначения системы (3)):*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \lambda_i x_i + a_i(y) x_i + \sum_{p=2}^{\infty} a_p^i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + \sum_{p=2}^{\infty} a_p^{n+1}(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a_i(y)$ – многочлены степени t без свободных членов, $a_p^i(x, y) = \sum_{|s|=p} a_s^i(y) x^s$, $a_s^i(y)$ – многочлены степени N_1 , число $N_1 = N_1(s)$, причем эта зависимость имеет линейный характер. При $1 \leq i \leq n+1$ $a_s^i(y) = 0$, если $\lambda_i \neq \sum_{q=1}^n s_q \lambda_q$.

ТЕОРЕМА 3. Если в системе (2) выполняется условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то для любого целого числа $k > 0$ существует невырожденное преобразование класса C^k , приводящее систему (2) к нормальной форме следующего вида (для простоты мы сохраним обозначения системы (4)):

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \lambda_i x_i + a_i(y)x_i + \sum_{p=2}^N a_p^i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + \sum_{p=2}^N a_p^{n+1}(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где $a_i(y)$ – многочлены степени t без свободных членов, $a_p^i(x, y) = \sum_{|s|=p} a_s^i(y) x^s$, $a_s^i(y)$ – многочлены степени $N_1(s)$. При $1 \leq i \leq n+1$ $a_s^i(y) = 0$, если $\lambda_i \neq \sum_{q=1}^n s_q \lambda_q$. Число $N = N(k)$.

1. Вспомогательные утверждения. На одномерном центральном многообразии, соответствующем нулевому собственному значению, система (2) может быть приведена невырожденным преобразованием класса C^∞ к виду (см., например, [4], [5])

$$\frac{dy}{dt} = y(by^m + cy^{2m}). \quad (6)$$

Ниже будем считать, что в системе (2) это преобразование уже сделано.

Займемся теперь преобразованием линейной (по невырожденным координатам) части системы (2). Для этого рассмотрим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i + \sum_{j=1}^n f_j^i(y) z_j, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $f_j^i(y) = \partial f_i(z, y) / \partial z_j$ при $z = 0$.

ЛЕММА 1. Для системы (7) существует невырожденное преобразование класса C^∞

$$z = x + H(y)x, \quad H(0) = 0, \quad (8)$$

приводящее ее к следующей нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \varepsilon_i x_{i-1} + \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^n a_j^i(y) x_j, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}), \end{aligned} \quad (9)$$

которая отличается от системы (3) лишь отсутствием нелинейных по переменным $x_1, \dots, x_n$ членов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например [1]), что существует формальное (не обязательно сходящееся) преобразование вида (8), в результате которого система (7) формально приводится к нормальной форме вида (9), где $a_j^i(y)$ – формальные ряды. Это означает, что существует (уже не формальное) преобразование класса C^∞ , ряд Тейлора которого совпадает с вышеуказанным формальным преобразованием, в результате которого система (7) приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= \varepsilon_i u_{i-1} + \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^n a_j^i(y) u_j + \sum_{j=1}^n c_j^i(y) u_j, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}),\end{aligned}\tag{10}$$

где $a_j^i(y)$ – функции класса C^∞ , $a_j^i(y) = 0$, если $\lambda_i \neq \lambda_j$, а $c_j^i(y)$ – плоские функции.

Будем теперь искать преобразование, приводящее систему (10) к ее нормальной форме (9) в виде

$$u = x + H(y)x.\tag{11}$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая систему (9), получаем, что матрица $H(y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}\dot{H} &= (A + A_1(y))H - H(A + A_1(y)) + C(y)H + C(y), \\ \dot{y} &= y(by^m + cy^{2m}),\end{aligned}\tag{12}$$

где A – постоянная матрица правой части системы (10); элементами матрицы $A_1(y)$ являются функции $a_j^i(y)$ системы (10), а элементы матрицы $C(y)$ – это функции $c_j^i(y)$ той же системы.

Рассматривая элементы искомой матрицы $H(y)$ в качестве компонент вектора $h(y)$, получаем, что этот вектор должен удовлетворять системе уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{h} &= \tilde{A}(y)h + \alpha(y), \\ \dot{y} &= y(by^m + cy^{2m}),\end{aligned}\tag{13}$$

где $\tilde{A}(y)$ – матрица класса C^∞ , а $\alpha(y)$ – плоская вектор-функция. Из работы [6] следует, что у системы (13) имеется плоское решение $h(y)$ класса C^∞ , что завершает доказательство леммы.

Рассмотрим случай системы (7), которая удовлетворяет следующему дополнительному условию $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В этом случае имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Если в системе (7) все собственные числа λ_i , $1 \leq i \leq n$, различны, то в нормальной форме (9) системы (7) функции $a_j^i(y)$ являются полиномами степени не выше m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего будем считать, что система (7) уже приведена к нормальной форме (9), где функции $a_j^i(y)$ принадлежат классу C^∞ . Отметим, что вследствие нашего предположения первые n уравнений системы (9) имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + a_i(y)x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Представим функции $a_i(y)$ в виде $a_i(y) = \sum_{p=1}^m c_{ip}y^p + y^{m+1}a_{i1}(y)$, где $a_{i1}(y)$ — функции класса C^∞ . Сделаем преобразование $x_i = u_i + h_i(y)u_i$ в системе (9). Получим

$$\frac{du_i}{dt} = \lambda_i u_i + \left(\sum_{p=1}^m c_{ip}y^p \right) u_i + y^{m+1}a_{i1}(y)u_i - \frac{h_i(y)u_i}{1 + h_i(y)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В качестве функций $h_i(y)$ необходимо взять функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{dh_i}{dy} = \frac{(1 + h_i)a_{i1}(y)}{b + cy^m}.$$

Очевидно, данное уравнение имеет решение класса C^∞ . Лемма 2 доказана.

Отметим, что лемма 2 следует из теоремы 3 п. 2.3. главы 3 книги [1].

Условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ является существенным. Если оно не выполняется, то нельзя утверждать приводимость к указанной нормальной форме с помощью преобразования класса C^∞ . Это показывает пример следующей системы.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + y^2 x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - y x_2, \\ \dot{y} &= y^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Прямая проверка показывает, что эта система не может быть приведена преобразованием класса C^∞ к нормальной форме, не содержащей в первом уравнении нелинейных членов по переменной y . Действительно, допустим, что существует невырожденное преобразование, приводящее данную систему к искомой форме. Без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением лишь преобразований, близких к тождественным (это показывается так же, как и в [7, с. 69]). Предположим теперь, что в результате следующей замены переменных:

$$x = u + yB_1u + y^2B_2u + H(y)u, \quad H(y) = o(y^2), \tag{15}$$

система (14) приобретет требуемую форму

$$\dot{u} = u + yDu, \tag{16}$$

где D — некоторая постоянная матрица. Подставляя (15) в систему (14) и учитывая (16), приравняем вначале члены линейные по переменной y . В результате получаем равенство $D = C_1$, где матрица $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Приравнивая теперь члены второй степени по переменной y , получаем, что матрица B_1 должна удовлетворять равенству

$$B_1 \cdot C_1 + B_1 = C_2 \cdot B_1 + C_3, \tag{17}$$

где $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Приравнивая элементы, находящиеся в первой строке и втором столбце матриц в равенстве (17) получаем, что $0 = 1$. Данное противоречие доказывает невозможность преобразования (15).

2. Конечно-гладкая нормализация. В этом разделе мы приведем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что система (2) невырожденным преобразованием класса C^∞ может быть приведена к следующему виду (обозначения те же, что и в формуле (3)):

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \varepsilon_i x_{i-1} + \lambda_i x_i + \sum_{p=1}^{l+1} a_p^i(x, y) + \alpha_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + \sum_{p=1}^{l+1} a_p^{n+1}(x, y) + \alpha_{n+1}(x, y), \end{aligned} \quad (18)$$

где $l \geq 1$ – целое число; $\alpha_i(x, y) = o(\|x\|^{l+1})$; при $|s| \leq l$ выполнены условия

$$a_s^i(y) = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{p=1}^n s_p \lambda_p \neq \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n+1. \quad (19)$$

Напомним, что $a_p^i(x, y) = \sum_{|s|=p} a_s^i(y) x^s$.

При $l = 1$ данное предположение следует из леммы 1. Пусть оно верно при некотором $l \geq 1$. Покажем, что систему (18) можно привести к такому же виду, где условия (19) будут выполнены уже при $|s| \leq l+1$.

Для этого вначале для каждого нерезонансного члена вида $c_s^i(y) x^s$, $|s| = l+1$, построим замену переменных, в результате которой данный нерезонансный член приобретет вид $\alpha_s^i(y) x^s$, где $\alpha_s^i(y)$ уже будет плоской функцией. Затем применим преобразование, использованное в доказательстве леммы 1, в результате чего указанные резонансные члены исчезнут и система приобретет вид (18), где условия (19) будут выполнены уже при $|s| \leq l+1$.

Пусть теперь в системе (18) условия (19) выполнены для $|s| \leq N$, где N достаточно большое число. Более точно, пусть выполнено условие $N = N(k, \Lambda)$, где $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – спектр матрицы A , $k \geq 1$ – целое число, а число $N(k, \Lambda)$ определено в теореме 1 работы [2]. Тогда для системы (18), где условия (19) выполнены при $|s| \leq N(k, \Lambda)$, в соответствии с указанной теоремой существует близкое к тождественному преобразование класса C^k , в результате применения которого система (18) примет требуемый вид (3). Теорема 1 доказана.

3. Формальная нормализация систем с различными собственными числами. Рассмотрим такую систему (2), у которой все собственные числа λ_i различны. В данном разделе мы ограничимся формальными преобразованиями формальных систем вида (2), имея в виду, что правые части этих систем представляют собой формальные степенные ряды. Покажем теперь, что для таких систем справедлива теорема 2, согласно которой система (2) формально приводима к нормальной форме вида (4).

Доказательство теоремы 2. Используя стандартные рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, приходим к выводу, что система (2) формально при-

водим к нормальной форме следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \lambda_i x_i + a_i(y)x_i + \sum_{p=2}^{\infty} a_p^i(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + \sum_{p=2}^{\infty} a_p^{n+1}(x, y),\end{aligned}\tag{20}$$

где $a_p^i(x, y) = \sum_{|s|=p} a_s^i(y)x^s$, $a_i(y)$, $a_s^i(y)$ – формальные степенные ряды, $1 \leq i \leq n+1$. Согласно лемме 2 система (2) может быть формально приведена к виду, где функции $a_i(y)$ являются полиномами степени не выше m . Будем считать, что это условие в системе (20) выполняется. Покажем теперь существование формального преобразования, после которого функции $a_s^i(y)$ также окажутся полиномами. Зафиксируем некоторый резонансный набор s , $|s| > 1$, для которого $a_s^i(y) \neq 0$. Представим функцию $a_s^i(y)$ в следующем виде:

$$a_s^i(y) = \sum_{q=0}^N a_q y^q + \sum_{q=N+l}^{\infty} a_q y^q,\tag{21}$$

где число $N = N_1$ мы определим позже, а число $l \geq 1$. Пока ограничимся тем, что будем считать, что $N_1 \geq 2m$.

Рассмотрим два случая. В первом случае будем предполагать, что в последнем уравнении исходной системы (2) коэффициент $c \neq 0$. В этом случае сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}x_i &= u_i + d \cdot y^{N+l-2m} u^s, \\ x_j &= u_j, \quad j \neq i.\end{aligned}\tag{22}$$

Подставляя (22) в (20), получаем, что в преобразованном уравнении коэффициент при y^{N+1} в формальном ряде, являющемся коэффициентом при мономе u^s , будет равен $a_{N+l} - (N+l-2m) \cdot c \cdot d$. Полагая $d = a_{N+l} / ((N+l-2m) \cdot c)$, мы приведем систему к виду, где функция $a_s^i(y)$ приобретет вид $a_s^i(y) = \sum_{p=0}^N \tilde{a}_p y^p + \sum_{p=N+l-1}^{\infty} \tilde{a}_p y^p$, причем коэффициент $\tilde{a}_{N+l} = 0$. Повторяя соответствующее преобразование конечное число раз, приводим в итоге систему к виду, где функция $a_s^i(y)$ будет представлять собой сумму многочлена степени N и формального ряда, наименьшая степень которого равна $N+l+1$. Таким образом, можно считать, что в нашей системе функция $a_s^i(y)$ имеет вид $a_s^i(y) = \sum_{q=0}^N a_q y^q + \sum_{q=N+l}^{\infty} a_q y^q$, где уже $l \geq 2$. Проводя индукцию по l , получаем существование формального преобразования, приводящего систему к виду, где функция $a_s^i(y) = \sum_{q=0}^N a_q y^q$. Подобное преобразование можно провести для любого резонансного набора s . В итоге мы получаем формальную приводимость системы (2) к виду (5), где функции $a_s^i(y)$ являются многочленами степени $N_1 = 2m$.

Рассмотрим теперь случай, когда в последнем уравнении исходной системы (2) коэффициент $c = 0$.

По-прежнему считаем, что функция $a_s^i(y)$ имеет вид (21), где число $N = N_1(s)$ мы определим позже. В этом случае сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}x_i &= u_i + d \cdot y^{N+l-m} u^s, \\ x_j &= u_j, \quad j \neq i.\end{aligned}\tag{23}$$

Подставляя (23) в (20), получаем, что в преобразованном уравнении коэффициент при y^{N+1} в формальном ряде, являющемся коэффициентом при мономе u^s , будет равен

$$a_{N+l} - ((N+l-m) \cdot b + \langle s, a_m \rangle - a_{im}) \cdot d,$$

где $\langle s, a_m \rangle$ – это скалярное произведение вектора s и вектора $a_m = (a_{1m}, \dots, a_{nm})$, координаты которого a_{im} являются коэффициентами при y^m в функциях $a_i(y)$, $1 \leq i \leq n$. Полагая число

$$d = \frac{a_{N+l}}{(N+l-m) \cdot b + \langle s, a_m \rangle - a_{im}},$$

мы приведем систему к виду, где функция $a_s^i(y)$ приобретет вид $a_s^i(y) = \sum_{p=0}^N \tilde{a}_p y^p + \sum_{p=N+l-1}^{\infty} \tilde{a}_p y^p$, причем коэффициент $\tilde{a}_{N+l} = 0$. Указанное число d существует, если в определяющей его дроби знаменатель не равен нулю. Если число N выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$N > \frac{|\langle s, a_m \rangle| + \max_{1 \leq i \leq n} |a_{im}|}{|b|} + m - 1,$$

то требуемое условие будет выполнено. Повторяя теперь рассуждения, приведенные выше для случая $s \neq 0$, получаем формальную приводимость системы (2) к виду (5), где функции $a_s^i(y)$ являются многочленами степени $N_1 = N_1(s)$, где $N_1(s)$ представляет собой целую часть числа

$$\frac{|\langle s, a_m \rangle| + \max_{1 \leq i \leq n} |a_{im}|}{|b|} + m.$$

Данная оценка может быть уточнена. Ясно, что число $N_1(s)$ должно быть выбрано таким, чтобы числа $(N_1(s) + 1 - m) \cdot b + \langle s, a_m \rangle - a_{im} \neq 0$. Теорема 2 доказана.

Следующий пример показывает существенность оценки чисел $N_1(s)$, приведенных в доказательстве теоремы 2.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_1 y + x_2^p x_3^q (y^r + o(y^r)), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2 - x_2 y, \\ \frac{dx_3}{dt} &= 3x_3 - x_3 y, \\ \frac{dy}{dt} &= y^2. \end{aligned}$$

Здесь $o(y^r)$ представляет собой формальный ряд, слагаемые которого имеют степень выше r .

Непосредственная проверка показывает, что эта система не может быть формально приведена к нормальной форме, не содержащей нелинейных по переменной y членов в первом уравнении, степень которых ниже, чем $p + q + 2$. Таким образом, если в первом уравнении число $r = p + q + 2$, то степень соответствующего многочлена не может

быть ниже, чем данное число r , что показывает точность полученной в доказательстве теоремы 2 оценки чисел $N_1(s)$.

В теореме 2 мы исходили из того, что все собственные числа λ_i различны. Данное условие обеспечивало формальную приводимость линейной части системы к полиномиальной нормальной форме (лемма 2). Если указанное условие не выполнено, то приведение к такой нормальной форме не всегда возможно. Однако если предположить, что нормальная форма линейной системы (7) имеет вид (9), где функции $a_j^i(y)$ являются многочленами степени m , то теорема 2 остается верной и без выполнения условия различности чисел λ_i . Это означает, что формальная нормальная форма системы (2) имеет в такой ситуации полиномиальный вид, однако оценка чисел $N_1(s)$ будет в этом случае другой.

4. Конечно-гладкая нормализация систем с различными собственными числами. Данный раздел содержит доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно теореме 2 система (2), у которой все числа λ_i различны, формально приводима к нормальной форме вида (20). Но тогда с помощью преобразования класса C^∞ , ряд Тейлора которого совпадает с формальным преобразованием системы (2), мы можем привести указанную систему к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \lambda_i x_i + a_i(y)x_i + a_{i1}(y)x_i + a_i^1(x, y) + a_i^2(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + a_{n+1}^1(x, y) + a_{n+1}^2(x, y), \end{aligned} \quad (24)$$

где функции $a_i(y)$ являются многочленами степени m , ряды Тейлора функций $a_i^1(x, y)$ совпадают с формальными рядами $\sum_{|s|=p} a_p^i(x, y)$, где $a_p^i(x, y) = (a_s^i(y) + \alpha_s^i(y))x^s$, $a_s^i(y)$ – многочлены степени $N_1(s)$, $a_{i1}(y)$, $\alpha_s^i(y)$ – плоские функции, $a_i^2(x, y)$ – функции, плоские по переменным $x_1, \dots, x_n$, $1 \leq i \leq n+1$.

Пусть теперь $k \geq 1$ – целое число, а число $N = N(k) = N(k, \Lambda)$, где $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – спектр матрицы A и $N(k, \Lambda)$ определено в теореме 1 работы [2]. Тогда для системы (24) в соответствие с указанной теоремой существует близкое к тождественному преобразование класса C^k , в результате применения которого система (24) приобретет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \lambda_i x_i + a_i(y)x_i + a_{i1}(y)x_i + \tilde{a}_i^1(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dy}{dt} &= y(by^m + cy^{2m}) + \tilde{a}_{n+1}^1(x, y), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\tilde{a}_i^1(x, y) = \sum_{|s|=2}^{N(k)} (a_s^i(y) + \alpha_s^i(y))x^s$, $1 \leq i \leq n+1$.

С помощью преобразования класса C^∞ , предложенного в работе [6] и использованного при доказательстве леммы 1, избавляемся от конечного числа плоских слагаемых в уравнениях системы (25). В результате получаем существование замены переменных класса C^∞ , после которой система (25) приобретет требуемый вид (5). Теорема 3 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А.Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы, в частности, за формулировку теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [2] Самовол В. С. Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Тр. ММО. 1982. Т. 44. С. 213–234.
- [3] Никишкин В. А. C^∞ -эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки типа “вырожденный узел” // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1976. № 1. С. 27–35.
- [4] Бибииков Ю. Н. О приводимости системы двух дифференциальных уравнений к нормальной форме // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 10. С. 1899–1902.
- [5] Бибииков Ю. Н. Об одном критическом случае в теории устойчивости движения // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2123–2135.
- [6] Кузнецов А. Н. Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 2. С. 41–51.
- [7] Самовол В. С. О необходимом и достаточном условии гладкой линеаризации автономной системы на плоскости в окрестности особой точки // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 67–77.

Государственный университет “Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: samovol@sshop.ru

Поступило
12.11.2003