Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин, Интегральная формула для аналитического решения уравнения $yf'_x - xf'_y = g(x, y)$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 633–634

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:00:32

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $yf'_x - xf'_y = g(x, y)$

Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин

Уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = g(x, y) \quad (1)$$

часто появляется в различных задачах усреднения для систем дифференциальных уравнений [1]–[4]. Пусть $g(x, y)$ – аналитическая функция по обоим переменным на плоскости $\mathbb{R}^2$, (ρ, φ) – полярные координаты: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, и среднее от g по угловой переменной φ равно нулю.

Интегрирование уравнения (1) тривиально, и ответ определен с точностью до произвольной функции $\mathcal{F}(\rho)$. В процедуре усреднения приходится работать с аналитическим по обоим переменным x, y решением, которое к тому же требуется оценивать через функцию g в норме C . Такая проблема не возникает, если усреднение проводится в областях, не пересекающихся с окрестностью точки $x = 0, y = 0$. Однако в физических приложениях именно эта окрестность, соответствующая решениям с малыми амплитудами, может играть наиболее важную роль¹. Прямое применение формулы Ньютона–Лейбница дает аналитическое по φ, ρ решение, которое, вообще говоря, неаналитично по x, y в окрестности начала координат. С другой стороны, получение оценок в норме C на основе интегрирования уравнения (1) с помощью рядов Фурье как правило представляет собой довольно трудоемкую процедуру.

В этой заметке мы представляем простую интегральную формулу для аналитического по x, y решения уравнения (1), позволяющую легко получить необходимые оценки в норме C . Фактически эта формула уже была использована в работе [4], но ввиду ее общематематической значимости и возможных приложений нам кажется целесообразным ее отдельная публикация.

ТЕОРЕМА. Уравнение (1) имеет решение $f(x, y)$, аналитическое по всем переменным тогда и только тогда, когда среднее значение функции g по переменной φ равно нулю:

$$\int_0^{2\pi} g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi = 0,$$

и каждое такое решение имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\int_0^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi + \int_\pi^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi \right) + F(\rho^2), \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке проекта DFG PAH 436 RUS113/572.

¹Пример такой ситуации дает задача об усреднении движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле и периодическом электрическом потенциале $v(x, y)$ (см. [4]). Гамильтониан этой системы имеет вид $H = (p^2 + q^2)/2 + \varepsilon v(p + x, q + y) \equiv I + \varepsilon v(\sqrt{I} \cos \varphi + x, \sqrt{I} \sin \varphi + y)$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Это аналитическая функция по переменным (q, p) и неаналитическая функция в переменных действие-угол $\varphi, I = \rho^2/2$ в окрестности точки $x = 0, y = 0$.

где $F(\mathbb{Z})$ – произвольная аналитическая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, сделаем замену переменных

$$x = u + iv, \quad y = v + iu.$$

Разложим g в ряд Тейлора по переменным (u, v) . Разложение имеет вид

$$g(u + iv, v + iu) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}} g_{kl} u^k v^l \frac{(k+l)!}{k!l!}.$$

Полярные координаты для переменных (u, v) принимают вид

$$u = \frac{\rho e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{\rho e^{i(\varphi - \pi/2)}}{\sqrt{2}}.$$

Тогда функция g выражается следующим образом:

$$g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}} g_{kl} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^{k+l} e^{i(l-k)\varphi - il\pi/2}.$$

Это разложение может быть рассмотрено как ряд Фурье для функции $g(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Тогда можно легко проинтегрировать уравнение (1):

$$\begin{aligned} f &= \int_0^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi + F_0(\rho) = \sum_{k, l \in \mathbb{N}} g_{kl} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^{k+l} \frac{e^{i(l-k)\psi - il\pi/2}}{i(l-k)} \Big|_0^\varphi + F_0(\rho) \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{N}} g_{kl} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^{k+l} \frac{e^{i(l-k)\varphi - il\pi/2}}{i(l-k)} - \sum_{k, l \in \mathbb{N}} g_{kl} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^{k+l} \frac{e^{-il\pi/2}}{i(l-k)} + F_0(\rho), \end{aligned} \quad (3)$$

где $F_0(\rho)$ – “константа” интегрирования. Первый член уравнения (3) является аналитической функцией, так что он легко может быть преобразован обратно в полином по переменным $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Второй член является неаналитической функцией в точке $x = 0$, $y = 0$ для нечетных степеней $(k+l)$, так что необходимо подходящим выбором $F_0(\rho)$ уничтожить неаналитические слагаемые. Введем F_0 следующим образом:

$$F_0(\rho) = \left(\frac{1}{2} \int_\pi^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi - \frac{1}{2} \int_0^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi \right) + F(\rho^2). \quad (4)$$

Следовательно (4) “убивает” неаналитический член в уравнении (3), так что f будет аналитической функцией по обоим переменным x и y в точке $x = 0$, $y = 0$. Теорема доказана.

Для этой интегральной формулы легко могут быть получены соответствующие оценки. Действительно, в норме $C(\Omega)$, Ω – область в $\mathbb{R}^2$, имеем

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \frac{1}{2} \left\| \int_0^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi + \int_\pi^\varphi g(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) d\psi \right\|_{C(\Omega)} + \|F(\rho^2)\|_{C(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \max_{C(\Omega)} |g| d\psi + \int_\pi^{2\pi} \max_{C(\Omega)} |g| d\psi \right) + \max_{C(\Omega)} |F(\rho^2)| = \frac{3}{2} \pi \max_{C(\Omega)} |g| + \max_{C(\Omega)} |F(\rho^2)|. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории колебаний. М.: Наука, 1974.
2. Нейштадт А. И. // ПММ. 1984. Т. 48. № 2. С. 197–205.
3. Арнольд В. А. // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
4. Брюнинг Й., Доброхотов С. Ю., Потеряхин М. А. // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 660–669.

(И. Брюнинг) Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Germany Поступило
(С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин) Институт проблем механики РАН, г. Москва 10.03.2002
E-mail: bruening@spectrum.mathematik.hu-berlin.de,
dobr@ipmnet.ru, poter@ipmnet.ru