Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Копалиани, Об одном свойстве непрерывных операторов в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 635–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 08:59:17

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^p(\mathbb{R})$

Т. С. Копалиани

Целью настоящей заметки является доказательство неравенств мультипликативного типа для интеграла

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) T f(x) dx,$$

где T – ограниченный линейный оператор в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, $k = 0, 1$, $f^0 = f$, $f^{(1)} = f'$. Неравенства такого типа тесно связаны с неравенствами мультипликативного типа для производных функций.

Ниже $C_0^\infty(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем; $W_\infty^1(\mathbb{R})$ – пространство локально абсолютно непрерывных функций f , для которых $f^{(1)} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Всюду далее $|E|$ – мера Лебега множества E . Заметим также, что константа $c > 0$ ниже не зависит от f (она может быть разной в разных местах).

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T: L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$, $G: L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$ – ограниченные линейные операторы (p, q – фиксированные числа с условием $1 \leq p, q \leq \infty$). Если для каждого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ Tf – локально абсолютно непрерывная функция и справедливо представление $(Tf)^{(1)}(x) = Gf^{(1)}(x)$, то

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f^{(1)}(x) T f(x) dx \right| \leq c \cdot \|f^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (1)$$

для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Заметим, что операторы, которые удовлетворяют условиям теоремы, – это в первую очередь операторы, инвариантные относительно сдвига в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ (см. [1]), псевдодифференциальные операторы с соответствующим выбором символа, многие интегральные операторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Без потери общности можем допустить, что f – непрерывно дифференцируемый сплайн с компактным носителем. Главная идея доказательства – представление функции f как суммы в некотором смысле элементарных функций $f_i \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

- 1) $f(x) = \sum_{i=1}^\infty f_i(x)$, сходимость равномерная;
- 2) $\text{supp } f = \text{supp } f_1$, $\text{supp } f_{i+1} \subset \text{supp } f_i$, $\|f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot |\text{supp } f_i| \leq c \cdot \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R})}$, $i = 1, 2, \dots$;
- 3) $\sum_{i=1}^\infty \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$;
- 4) $f^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^\infty f_i^{(1)}(x)$ почти всюду;
- 5) $\|F_i^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c \|f^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $i = 1, 2, \dots$, где $F_i(x) = \sum_{k=i}^\infty f_k(x)$.

Покажем, что если выполнены условия 1)–5), то справедливо (1). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f^{(1)}(x) T f(x) dx &= \sum_{i,j=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} f_i^{(1)}(x) T f_j(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} f_k^{(1)}(x) T f_k(x) dx + \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} f_k^{(1)}(x) T F_{k+1}(x) dx + \sum_{k=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} F_{k+1}^{(1)} T f_k(x) dx. \end{aligned}$$

Используя условия теоремы и свойства 2), 5), при $1 < p < \infty$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{R}} f_k^{(1)}(x) T f_k(x) dx \right| \\
 & \leq \left| \int_{\{x: |T f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}} f_k^{(1)}(x) T f_k(x) dx \right| \\
 & \quad + \left| \int_{\{x: |T f_k(x)| \leq \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}} f_k^{(1)}(x) T f_k(x) dx \right| \\
 & \leq \frac{\|f_k^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-1}} \cdot \int_{\mathbb{R}} |T f_k(x)|^p dx + \|f_k^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot |\operatorname{supp} f_k| \\
 & \leq c \cdot \frac{\|f_k^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-1}} \cdot \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + c \|f_k^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
 & \leq c \|f^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R})}.
 \end{aligned}$$

Используя свойство 2), точно так же оценим интегралы типа

$$\int_{\mathbb{R}} F_{k+1}^{(1)}(x) T f_k(x) dx.$$

Аналогичные оценки можем получить и при $p = 1, \infty$.

Наконец, заметим, что равенство $(T f^{(1)})^{(1)}(x) = G f^{(1)}(x)$ выполняется для любого $f \in W_\infty^1$ с компактным носителем (что можем получить, используя предельный переход). Значит, будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} f_k^{(1)}(x) T F_{k+1}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f_k(x) (T F_{k+1})^{(1)}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f_k(x) G F_{k+1}^{(1)}(x) dx.$$

Интегралы последнего типа можем оценить аналогично предыдущим. Используя 3), получим неравенство (1).

Переходим к построению функции f_i . Для $h > 0$ обозначим

$$E_h^1 = \{x; f(x) > h\}, \quad E_h^2 = \{x; f(x) < -h\}, \quad E_h = E_h^1 \cup E_h^2.$$

Рассмотрим функцию

$$f_h(x) = f(x) \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus E_h}(x) + h \cdot \chi_{E_h^1}(x) - h \cdot \chi_{E_h^2}(x)$$

(χ_E — характеристическая функция множества E). Пусть $l_f = \min |f(x)|$ при $x \in O_f$, где $O_f = \{x \in \mathbb{R}; f^{(1)}(x) = 0, f(x) \neq 0\}$. Несложно найти такой $h > 0$, что $h < l_f$ и

$$\|f_h\|_{L^1(\mathbb{R})} \geq c \cdot \|f_h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot |\operatorname{supp} f_h|.$$

Повторяя аналогичное рассуждение, построим f_2 для функции $f - f_1$ и т.д. Построенные функции f_i удовлетворяют 1)–5). Заметим, что f является гладким сплайном и процесс можно закончить на конечном шаге. Теорема доказана.

Если в неравенстве (1) левую часть заменим на L^1 норму, то неравенство в общем случае несправедливо: достаточно взять

$$T f(x) = p \cdot v \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{t} dt.$$

Аналогично можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T: L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$, $G: L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$ – непрерывные линейные операторы, где $1 < p < \infty$, $p = q(p-1)$. Тогда

$$\left| \int_{\mathbb{R}} T f(x) G f(x) dx \right| \leq c \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Заметим, что (ниже M_2 – класс ограниченных линейных операторов в $L^2(\mathbb{R})$, инвариантных относительно сдвига, а $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции f)

$$\sup_{\substack{\|T\| \leq 1 \\ T \in M_2}} \left| \int_{\mathbb{R}} f^{(1)}(x) T f(x) dx \right| = c \cdot \int_{\mathbb{R}} |t^{1/2} \hat{f}(t)|^2 dt.$$

Значит, если ограничимся операторами из M_2 , то получается мультипликативная оценка для производных. Это последнее неравенство было получено Б.С. Кашиным (см. [2]).

По той же схеме для финитных последовательностей действительных чисел можем получить оценку

$$\left| \sum_{i,j \neq i+1} \frac{a_i a_j}{i-j+1} \right| \leq c \cdot \max_{i \in \mathbb{Z}} |a_i - a_{i+1}| \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i|. \quad (2)$$

Неравенства, эквивалентные неравенству (2), использовали многие авторы (см. [2]–[4]) в теории общих ортогональных систем, в частности, в вопросах, связанных с теоремой Олевского об оценке функций Лебега ортонормированных систем (см. [5]).

Используя неравенство (1), можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции φ_n , $n = 1, 2, \dots$, локально абсолютно непрерывны, а системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\varphi_n^{(1)}/\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, где $\lambda_n = \|\varphi_n^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}$, являются базисами Рисса в $L^2(\mathbb{R})$, тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \varphi_n^{(1)} \rangle|^2}{\lambda_n} \leq c \cdot \|f^{(1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (3)$$

для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, здесь $\langle f, \varphi_n^{(1)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n^{(1)}(t) dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы

$$T f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_i^{(1)}(t)}{\lambda_i} f(t) dt, \quad G f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(1)}(t)}{\lambda_i} \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(t) f(t) dt$$

непрерывны в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $(Tf)^{(1)}(t) = Gf^{(1)}(t)$. Используя теорему 1, получим (3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: ИЛ, 1962.
2. Кашин Б.С. // Матем. сб. 1978. Т. 106. № 3. С. 380–385.
3. Бочкарев С.В. // Матем. сб. 1975. Т. 98. № 3. С. 436–439.
4. Кранциберг А.С. // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 2. С. 183–200.
5. Olevski A. M. Fourier series with Respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer, 1975.