Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Корешков, Картановские подалгебры с энгелевым разложением, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:35:12

КАРТАНОВСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ С ЭНГЕЛЕВЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ

Н. А. Корешков

Как известно, в алгебре Ли L над полем нулевой характеристики размерности картановских подалгебр совпадают и равны рангу этой алгебры. Более того, для любых двух картановских подалгебр H_1 и H_2 существует инвариантный автоморфизм φ алгебры L такой, что $\varphi H_1 = H_2$. Для алгебр Ли над полями положительной характеристики оба утверждения неверны. Поэтому в теории модулярных алгебр Ли обычно рассматриваются картановские подалгебры с некоторыми дополнительными условиями. Например, для p -алгебр Ли эти условия связаны с тороидальной частью картановской подалгебры. В частности, в [1] доказано, что размерность подалгебр Картана с максимальной тороидальной частью инвариантна, а в [2] — что все такие подалгебры Картана можно получить из некоторой фиксированной подалгебры с помощью конечной цепочки элементарных преобразований, близких по форме к экспонентам от корневых внутренних дифференцирований.

В данной работе предлагается другой тип ограничений на картановскую подалгебру. А именно, для любого элемента x из корневого подпространства L_α , $\alpha \neq 0$, предполагается нильпотентность оператора $\text{ad } x$. В этом случае также можно доказать инвариантность размерности картановских подалгебр, представление такой подалгебры в виде фиттинговой нулькомпоненты $C(h)$, регулярного элемента h и для двух таких картановских подалгебр H_1 и H_2 существование биекции ψ , похожей по форме на произведение экспонент от $\text{ad } x$, $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, такой, что $\psi h_1 = h_2$, где $H_1 = C(h_1)$, $H_2 = C(h_2)$.

Перейдем к точным определениям. Пусть H — картановская подалгебра в алгебре Ли L , а $L = H \oplus \sum_{\alpha \neq 0} L_\alpha$ — соответствующее картановское разложение. Если для любого $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, оператор $\text{ad } x$ нильпотентен, то будем говорить, что H — *картановская подалгебра с энгелевым разложением*. Обозначим через $C(x)$, $x \in L$, фиттингову нулькомпоненту элемента x , т.е.

$$C(x) = \{y \in L : \text{ad}^m x(y) = 0\}.$$

Элемент x называется *регулярным*, если размерность $C(x)$ минимальна. Эта размерность называется рангом алгебры L .

ТЕОРЕМА. Пусть L — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K , H — ее картановская подалгебра с энгелевым разложением. Тогда

- 1) $\dim H = r$, где r — ранг алгебры L ,
- 2) $H = C(x)$, где x — регулярный элемент,
- 3) для любых двух картановских подалгебр $H_1 = C(h_1)$, $H_2 = C(h_2)$ с энгелевым разложением существует биекция

$$\psi = E + \sum_{i_1 + \dots + i_k > 0} A_{i_1, \dots, i_k} \text{ad}^{i_1} y_1 \cdots \text{ad}^{i_k} y_k, \quad A_{i_1, \dots, i_k} \in K, \quad y_j \in L_\alpha(H_i), \quad i = 1, 2,$$

где только конечное число коэффициентов $A_{i_1, \dots, i_k}$ отлично от нуля, такая, что $\psi h_1 = h_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно установить, что картановская подалгебра H с энгелевым разложением содержит регулярный элемент. Тогда, используя теорему о том, что фиттингова нулькомпонента регулярного элемента является подалгеброй Картана (см. например, [3]), получим два первых пункта сформулированной теоремы.

Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ алгебры L , согласованный с картановским разложением $L = H \oplus \sum_{\alpha \neq 0} L_\alpha$, причем $e_1, \dots, e_r$ — базис H . Для любого $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ определим полиномиальное отображение $P: L \rightarrow L$, действующее по правилу

$$P(x) = (1 + x_{r+1} \text{ad } e_{r+1}) \cdots (1 + x_n \text{ad } e_n) \left(\sum_{i=1}^r x_i e_i \right) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

где $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$ – некоторые полиномиальные функции от $x_1, \dots, x_n$.

В силу бесконечности поля K существует $h_0 \in H$ такой, что $\alpha(h_0)\beta(h_0) \cdots \gamma(h_0) \neq 0$ для всех ненулевых корней $\alpha, \beta, \dots, \gamma$. Поэтому $\text{ad } h_0$ – невырожденное преобразование на $\bigoplus_{\alpha \neq 0} L_\alpha$. Повторяя рассуждения из [3], получим, что дифференциал $d_{h_0}P$ отображения P является эпиморфизмом. Тогда в силу [3, глава IX, лемма 1] следует, что гомоморфизм σ_P кольца полиномиальных функций $K[L]$ является изоморфизмом. Поэтому полиномиальное отображение P – биекция [4], причем обратное к нему также полиномиально.

Кроме того, в силу эпиморфности дифференциала d_aP для некоторого $a \in L$ имеем, что для любой полиномиальной функции f на L существует полиномиальная функция g на L такая, что $PU \supset V$, где $U = \{u \in L : f(u) \neq 0\}$, $V = \{v \in L : g(v) \neq 0\}$ [3, глава IX, теорема 1].

Заметим, что для любого элемента $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in L$ характеристический многочлен $\det(\lambda E - \text{ad } x)$ имеет вид $\lambda^n + \tau_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \tau_r\lambda^r$, где $\tau_i(x)$ – однородные многочлены степени i относительно $x_1, \dots, x_n$ и $\tau_r \neq 0$, но $\tau_{r-s} = 0$, $s > 0$. Сопоставляя это с вышеприведенным определением ранга алгебры L , видим, что он равен r , когда x регулярен.

Пусть $f = \tau_r P$. Тогда для любого элемента y из V существует $x \in U$ такой, что $y = Px$. Следовательно, $\tau_r(y) = f(x) \neq 0$, т.е. $V \subset \tilde{V} = \{\tilde{v} \in L : \tau_r(\tilde{v}) \neq 0\}$ – множество всех регулярных элементов из L .

Для элемента $y_0 \in V$ существует элемент $x_0 \in U$ такой, что $x_0 = P^{-1}y_0$, где

$$x_0 = \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i, \quad x_i^0 = x_i^0(y_1^0, \dots, y_n^0),$$

– полином от $y_1^0, \dots, y_n^0$. Пусть y_0 – фиксированный элемент, тогда отображение

$$\varphi_{y_0} = \prod_{j=r+1}^n (1 + x_j^0 \text{ad } e_j)$$

полиномиально на L и у него существует обратное, так как каждый оператор $\text{ad } e_j$ нильпотентен. Причем $\varphi_{y_0}^{-1}$ также полиномиально.

Обозначим $f_1 = \tau_r \varphi_{y_0}^{-1}$, а $V_1 = \{v_1 \in L : f_1(v_1) \neq 0\}$. Если $y_0 \in V_1$, то

$$\tau_r(h_0) = \tau_r \varphi_{y_0}^{-1}(\varphi_{y_0} h_0) = f_1(y_0) \neq 0,$$

где $h_0 = \sum_{i=1}^r x_i^0 e_i$ – компонента элемента x_0 , лежащая в H , а

$$y_0 = Px_0 = \prod_{j=r+1}^n (1 + x_j^0 \text{ad } e_j) \left(\sum_{i=1}^r x_i^0 e_i \right) = \varphi_{y_0} h_0.$$

То есть h_0 – регулярный элемент.

Если $y_0 \notin V_1$, то рассмотрим $\bar{V}_1 = V_1 \cap V \neq \emptyset$. В силу нашего предположения $\bar{V}_1 \subsetneq V$. Заметим, что $\bar{V}_1 = \{\bar{v}_1 \in L : (f_1 g)(\bar{v}_1) \neq 0\}$. Возьмем $y_1 \in \bar{V}_1$. Для него существует x_1 такой, что $x_1 = P^{-1}y_1$, причем $y_1 = \varphi_{y_1} h_1$, где

$$\varphi_{y_1} = \prod_{j=r+1}^n (1 + x_j^{(1)} \text{ad } e_j),$$

а h_1 – компонента x_1 , лежащая в H .

Как выше, рассмотрим $f_2 = \tau_r \varphi_{y_1}^{-1}$ и

$$V_2 = \{v_2 \in L : f_2(v_2) \neq 0\}.$$

Если $y_1 \in V_2$, то $f_2(y_1) = \tau_r \varphi_{y_1}^{-1}(y_1) = \tau_r \varphi_{y_1}^{-1}(\varphi_{y_1} h_1) = \tau_r(h_1) \neq 0$. То есть h_1 – регулярный элемент.

Если же $y_1 \notin \bar{V}_2$, то рассматриваем $\bar{V}_2 = V_2 \cap \bar{V}_1$, которое в силу нашего предположения строго содержится в $\bar{V}_1$.

Пусть уже построена цепочка $V = \bar{V}_0 \supset \bar{V}_1 \supset \dots \supset \bar{V}_i$, где

$$\bar{V}_k = \{\bar{v}_k \in L : (f_k \cdots f_1 g)(\bar{v}_k) \neq 0\}, \quad k = 1, \dots, i,$$

и $f_k = \tau_r \varphi_{y_{k-1}}^{-1}$ для некоторого элемента $y_{k-1} \in \bar{V}_{k-1}$, не принадлежащего $\bar{V}_k$.

Тогда, как при переходе от $\bar{V}_1$ к $\bar{V}_2$, строим $\bar{V}_{i+1} = V_{i+1} \cap \bar{V}_i$, где

$$V_{i+1} = \{v_{i+1} \in L : f_{i+1}(v_{i+1}) \neq 0\}, \quad f_{i+1} = \tau_r \varphi_{y_i}^{-1},$$

если для выбранного $y_i \in \bar{V}_i$ не выполняется условие принадлежности к V_{i+1} .

Предположим, что существует бесконечная строго убывающая цепочка открытых множеств

$$\bar{V}_0 \supset \bar{V}_1 \supset \dots \supset \bar{V}_i \supset \dots, \quad \bar{V}_i \subset K^n.$$

Рассмотрим замкнутые подмножества

$$W_i = \{w_i \in K^{n+1} : (f_i \cdots f_1 g Y - 1)w_i = 0\}.$$

Существует биекция π_i между точками множеств W_i и $\bar{V}_i$, которая является проекцией: $\pi_i(w_1^i, \dots, w_n^i, w_{n+1}^i) = (w_1^i, \dots, w_n^i)$, а $w_{n+1}^i = 1/\psi_i(w_1^i, \dots, w_n^i)$, $\psi_i = f_i \cdots f_1 g$, $(w_1^i, \dots, w_{n+1}^i) \in W_i$, $(w_1^i, \dots, w_n^i) \in \bar{V}_i$. Но существование строго убывающей цепочки замкнутых множеств в K^{n+1} противоречит нётеровости кольца многочленов $K[x_1, \dots, x_n, Y]$. Следовательно, существует i такое, что $W_i = W_{i+1}$, а поэтому и $\bar{V}_i = \bar{V}_{i+1}$. Но $\bar{V}_{i+1} = V_{i+1} \cap \bar{V}_i$, т.е. $\bar{V}_i \subset V_{i+1} = \{v_{i+1} : \tau_r \varphi_{y_i}^{-1}(v_{i+1}) \neq 0\}$. По построению $y_i \in \bar{V}_i$ и $y_i = \varphi_{y_i} h_i$. В силу этих условий имеем $\tau_r(h_i) = \tau_r \varphi_{y_i}^{-1}(y_i) \neq 0$. Итак, h_i – регулярный элемент, принадлежащий картановской подалгебре H с энгелевым разложением. Как было отмечено выше, это доказывает пункты 1 и 2.

Пусть теперь $H = C(h)$, $H' = C(h')$ – две картановские подалгебры с энгелевым разложением, а h, h' – соответствующие регулярные элементы. Пусть $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_n$ – два базиса в L , согласованные с этими разложениями, причем $e_1, \dots, e_r$ – базис H , $e'_1, \dots, e'_r$ – базис H' . Рассмотрим соответствующие полиномиальные отображения P и P' в L . По ним определяются множества U, U' и V, V' , когда $f = \tau_r P$, $f' = \tau_r P'$. В качестве $\bar{V}_0$ возьмем $V \cap V'$. Тогда для любого $y_0 \in \bar{V}_0$ определяем $x_0 = P^{-1}y_0$ и $x'_0 = (P')^{-1}y_0$ и соответственно

$$\varphi_{y_0} = \prod_{j=r+1}^n (1 + x_j^0 \operatorname{ad} e_j) \quad \text{и} \quad \varphi'_{y_0} = \prod_{j=r+1}^n (1 + x'_j{}^0 \operatorname{ad} e'_j).$$

Затем определяем $f_1 = \tau_r \varphi_{y_0}^{-1}$ и $f'_1 = \tau_r (\varphi'_{y_0})^{-1}$, а также

$$V_1 = \{v_1 \in L : f_1(v_1) \neq 0\}, \quad V'_1 = \{v'_1 \in L : f'_1(v'_1) \neq 0\}.$$

Если $y_0 \in V_1 \cap V'_1$, то $\tau_r(h_0) \neq 0$, $\tau_r(h'_0) \neq 0$, где h_0 и h'_0 – компоненты векторов x_0 и x'_0 , лежащие в H и H' , причем $y_0 = \varphi_{y_0} h_0$, $y_0 = \varphi'_{y_0} h'_0$. Тогда $h_0 = \varphi_{y_0}^{-1} \varphi'_{y_0} h'_0$ и $\varphi_{y_0}^{-1} \varphi'_{y_0}$ – отображение из формулировки теоремы.

В противном случае определяем $\bar{V}_1 = V_1 \cap V'_1 \cap \bar{V}_0$. Повторяя рассуждение из доказательства пунктов 1, 2, приходим к цепочке $\bar{V}_0 \supset \bar{V}_1 \supset \dots \supset \bar{V}_i \supset \dots$, где $\bar{V}_i = V_i \cap V'_i \cap \bar{V}_{i-1}$, $f_i = \tau_r \varphi_{y_{i-1}}^{-1}$, $f'_i = \tau_r (\varphi'_{y_{i-1}})^{-1}$ для некоторого $y_{i-1} \in \bar{V}_{i-1}$. Заканчивая как ранее, получаем, что существует y_i , для которого $y_i = \varphi_{y_i} h_i = \varphi'_{y_i} h'_i$, где h_i, h'_i – регулярные элементы, содержащиеся в картановских подалгебрах H, H' . Тогда $h_i = \varphi_{y_i}^{-1} \varphi'_{y_i} h'_i$ и, как уже отмечалось при $i = 0$, отображение $\varphi_{y_i}^{-1} \varphi'_{y_i}$ удовлетворяет условию теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Премет А. А. // Изв. АН. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 788–800.
2. Премет А. А. // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 4. С. 542–557.
3. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 4.
- Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.