Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О рекурсии третьего порядка типа Аперри для $\zeta(5)$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 796–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:46:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О РЕКУРСИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА АПЕРИ ДЛЯ $\zeta(5)$

В. В. Зудилин

В 1978 году Р. Апері [1], [2] предъявил последовательности рациональных приближений к $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$, доказывающие иррациональность каждого из этих чисел. Одним из ключевых ингредиентов доказательства Апері были разностные уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами для числителей и знаменателей указанных приближений. Недавно В. Н. Сорокин [3] и автор [4], [5] независимо получили аналогичное разностное уравнение второго порядка для $\zeta(4)$. Полученная рекурсия не дает диофантовых приближений к $\zeta(4) = \pi^4/90$, доказывающих иррациональность, однако представляет некоторый алгоритм быстрого вычисления этой постоянной. Цель данной заметки – указать на возможное обобщение указанных результатов для числа $\zeta(5)$, иррациональность которого так до сих пор и не установлена.

1. Формулировка основного результата. Рассмотрим разностное уравнение

$$(n+1)^6 a_0(n)q_{n+1} + a_1(n)q_n - 4(2n-1)a_2(n)q_{n-1} - 4(n-1)^4(2n-1)(2n-3)a_0(n+1)q_{n-2} = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_0(n) &= 41218n^3 - 48459n^2 + 20010n - 2871, \\ a_1(n) &= 2(48802112n^9 + 89030880n^8 + 36002654n^7 - 24317344n^6 - 19538418n^5 \\ &\quad + 1311365n^4 + 3790503n^3 + 460056n^2 - 271701n - 60291), \\ a_2(n) &= 3874492n^8 - 2617900n^7 - 3144314n^6 + 2947148n^5 + 647130n^4 \\ &\quad - 1182926n^3 + 115771n^2 + 170716n - 44541, \end{aligned}$$

и определим три линейно независимых решения $\{q_n\}$, $\{p_n\}$ и $\{\tilde{p}_n\}$ начальными условиями

$$\begin{aligned} q_0 &= -1, \quad q_1 = 42, \quad q_2 = -17934, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{87}{2}, \quad p_2 = -\frac{1190161}{64}, \\ \tilde{p}_0 &= 0, \quad \tilde{p}_1 = \frac{101}{2}, \quad \tilde{p}_2 = -\frac{344923}{16} \end{aligned}$$

(здесь и далее символом $\{x_n\}$ мы обозначаем последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$).

ТЕОРЕМА 1. *Последовательности*

$$\ell_n = q_n \zeta(5) - p_n, \quad \tilde{\ell}_n = q_n \zeta(3) - \tilde{p}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

также удовлетворяющие разностному уравнению (1), знакопостоянны:

$$\ell_n > 0, \quad \tilde{\ell}_n < 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

и имеют место предельные соотношения

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\ell_n|}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{\ell}_n|}{n} = \log |\mu_2| = -1.08607936 \dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_n|}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |p_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{p}_n|}{n} = \log |\mu_3|,\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\mu_1 = -0.02001512 \dots, \quad \mu_2 = 0.33753726 \dots, \quad \mu_3 = -2368.31752213 \dots \quad (5)$$

– корни характеристического многочлена $\mu^3 + 2368\mu^2 - 752\mu - 16$ рекурсии (1).

Отметим, что последовательности $\{q_n\}$, $\{p_n\}$ и $\{\tilde{p}_n\}$ являются знакочередующимися:

$$(-1)^{n-1}q_n > 0, \quad (-1)^{n-1}p_n > 0, \quad (-1)^{n-1}\tilde{p}_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 1 дает алгоритм быстрого вычисления числа $\zeta(5)$. Именно, последовательность рациональных чисел p_n/q_n сходится к $\zeta(5)$ со скоростью $|\mu_2/\mu_3| < 1.42521964 \cdot 10^{-4}$ (см. таблицу).

n	p_n/q_n	$ \zeta(5) - p_n/q_n $
0	0	1.036927755 ...
1	$\frac{29}{28}$	0.001213469 ...
2	$\frac{24289}{23424}$	0.000000182 ...
3	$\frac{7682021239}{7408444032}$	$< 2.80 \cdot 10^{-11}$
4	$\frac{24943788950905}{24055474286592}$	$< 4.13 \cdot 10^{-15}$
5	$\frac{81875586674776013003}{78959779279372800000}$	$< 6.02 \cdot 10^{-19}$
6	$\frac{282653756112686336975107}{272587704119854963200000}$	$< 8.71 \cdot 10^{-23}$
7	$\frac{215903781003833520407770175189}{208214873150908926517286400000}$	$< 1.26 \cdot 10^{-26}$
10		$< 3.71 \cdot 10^{-38}$
20		$< 1.32 \cdot 10^{-76}$
50		$< 5.52 \cdot 10^{-192}$

Дальнейшее построение указанных решений разностного уравнения (1) приводит к включениям

$$4D_n^2q_n \in \mathbb{Z}, \quad 4D_n^7p_n \in \mathbb{Z}, \quad 4D_n^5\tilde{p}_n \in \mathbb{Z}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(см. соотношения (14) и (15)), где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$, хотя вычисления на основе рекурсии (1) показывают, что

$$q_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^5p_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^3\tilde{p}_n \in \mathbb{Z}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Включения (6) не позволяют доказать иррациональность числа $\zeta(5)$, поэтому мы не акцентируем внимание на арифметических свойствах последовательностей $\{q_n\}$, $\{p_n\}$, $\{\tilde{p}_n\}$ и указываем лишь на прикладное значение теоремы 1.

2. Вспомогательные рекурсии. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды

$$\begin{aligned}r_n &= n!^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{\prod_{j=1}^n (k-j) \cdot \prod_{j=1}^n (k+n+j)}{\prod_{j=0}^n (k+j)^6}, \\ \tilde{r}_n &= -n!^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{\prod_{j=0}^n (k-j) \cdot \prod_{j=0}^n (k+n+j)}{\prod_{j=0}^n (k+j)^6},\end{aligned}\quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

являются $\mathbb{Q}$ -линейными формами от $1, \zeta(3), \zeta(5)$:

$$r_n = u_n \zeta(5) + w_n \zeta(3) - v_n, \quad \tilde{r}_n = \tilde{u}_n \zeta(5) + \tilde{w}_n \zeta(3) - \tilde{v}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} r_0 &= \zeta(5), & r_1 &= 9\zeta(5) + 33\zeta(3) - 49, & r_2 &= 469\zeta(5) + \frac{6125}{4}\zeta(3) - \frac{74463}{32}, \\ \tilde{r}_0 &= \zeta(3), & \tilde{r}_1 &= 2\zeta(5) + 12\zeta(3) - \frac{33}{2}, & \tilde{r}_2 &= 552\zeta(5) + 1764\zeta(3) - \frac{43085}{16}. \end{aligned}$$

Применяя к рядам (7) алгоритм созидательного телескопирования [6, гл. 6] в духе работ [4], [5], [7], мы приходим к разностным уравнениям

$$n(n+1)^5 b_0(n-1)u_{n+1} - 2nb_1(n)u_n - b_2(n)u_{n-1} + 2(n-1)^5(2n-1)b_0(n)u_{n-2} = 0, \quad (8)$$

где

$$b_0(n) = -a_0(-n), \quad b_1(n) = a_2(-n), \quad b_2(n) = -a_1(-n),$$

и

$$n^3(n+1)^3 \tilde{b}_0(n-1)u_{n+1} - 2n\tilde{b}_1(n)u_n - \tilde{b}_2(n)u_{n-1} + 2n(n-1)^4(2n-3)\tilde{b}_0(n)\tilde{u}_{n-2} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0(n) &= 41218n^7 + 35648n^6 - 932n^5 - 13190n^4 - 5128n^3 + 811n^2 + 957n + 174, \\ \tilde{b}_1(n) &= 3874492n^{12} - 14084302n^{11} + 12425954n^{10} + 8641603n^9 - 15230839n^8 - 1369195n^7 \\ &\quad + 8618417n^6 - 623249n^5 - 2785973n^4 + 308165n^3 + 495325n^2 - 40670n - 37632, \\ \tilde{b}_2(n) &= 2(48802112n^{13} - 201803328n^{12} + 267014032n^{11} - 69927236n^{10} \\ &\quad - 95912858n^9 + 37524471n^8 + 30257812n^7 - 9523224n^6 - 8524312n^5 \\ &\quad + 2138687n^4 + 1507490n^3 - 398634n^2 - 111012n + 33408). \end{aligned}$$

Отметим, что каждая из рекурсий (8) и (9) имеет один и тот же характеристический многочлен $\lambda^3 - 188\lambda^2 - 2368\lambda + 4$; корни этого многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, упорядоченные в порядке возрастания модулей, связаны с корнями (5) следующими соотношениями:

$$\mu_1 = \lambda_1 \lambda_2, \quad \mu_2 = \lambda_1 \lambda_3, \quad \mu_3 = \lambda_2 \lambda_3.$$

ТЕОРЕМА 2. *Последовательности линейных форм $\{r_n\}$ и их коэффициентов $\{u_n\}, \{w_n\}, \{v_n\}$ удовлетворяют разностному уравнению (8). Кроме того, имеют место неравенства*

$$r_n > 0, \quad u_n > 0, \quad w_n > 0, \quad v_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

и предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |r_n|}{n} = \log \lambda_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |u_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |w_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |v_n|}{n} = \log \lambda_3. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 3. *Последовательности линейных форм $\{\tilde{r}_n\}$ и их коэффициентов $\{\tilde{u}_n\}$, $\{\tilde{w}_n\}$, $\{\tilde{v}_n\}$ удовлетворяют разностному уравнению (9). Кроме того, имеют место неравенства*

$$\tilde{r}_n < 0, \quad \tilde{u}_n > 0, \quad \tilde{w}_n > 0, \quad \tilde{v}_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

и предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{r}_n|}{n} = \log \lambda_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{u}_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{w}_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{v}_n|}{n} = \log \lambda_3. \quad (13)$$

Отметим, что результат Васильева [8] и наша теорема [4] (см. также [9]) о совпадении совершенно уравновешенных гипергеометрических рядов с некоторым обобщением интеграла Бейкера [10] приводят к включениям

$$\begin{aligned} 2u_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^2 w_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^5 v_n \in \mathbb{Z}, \\ 2\tilde{u}_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^2 \tilde{w}_n \in \mathbb{Z}, \quad 2D_n^5 \tilde{v}_n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Наконец, искомые последовательности (2) определяются формулами

$$\begin{aligned} \ell_n &= \tilde{w}_n r_n - w_n \tilde{r}_n = (u_n \tilde{w}_n - \tilde{u}_n w_n) \zeta(5) - (\tilde{w}_n v_n - w_n \tilde{v}_n), \\ \tilde{\ell}_n &= u_n \tilde{r}_n - \tilde{u}_n r_n = (u_n \tilde{w}_n - \tilde{u}_n w_n) \zeta(3) - (u_n \tilde{v}_n - \tilde{u}_n v_n), \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

так что

$$q_n = u_n \tilde{w}_n - \tilde{u}_n w_n, \quad p_n = \tilde{w}_n v_n - w_n \tilde{v}_n, \quad \tilde{p}_n = u_n \tilde{v}_n - \tilde{u}_n v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Для доказательства неравенств (3) и предельных соотношений (4) остается воспользоваться оценками (10), (12), соотношениями (11), (13) и теоремой Пуанкаре.

3. Заключительные замечания. Другой алгоритм быстрого вычисления $\zeta(5)$ и $\zeta(3)$ (также не приводящий к достаточно хорошим диофантовым приближениям этих постоянных), основанный на бесконечном матричном произведении

$$\prod_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{n}{2(2n+1)} & \frac{1}{2n(2n+1)} & \frac{1}{n^4} \\ 0 & -\frac{n}{2(2n+1)} & \frac{5}{4n^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta(5) \\ 0 & 0 & \zeta(3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

предложен недавно Р. У. Госпером [11]. Однако в письмах [11] отсутствует описание аналитических и арифметических свойств возникающих рациональных приближений. Отметим также алгоритм Е. А. Карацубы [12] для вычисления дзета-функции Римана в целых положительных точках.

Приведенная в п. 2 схема позволяет также построить рекурсию третьего порядка для совместных рациональных приближений к $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$. Именно, рассмотрим разностное уравнение

$$(n+1)^4 \tilde{a}_0(n) q_{n+1} - \tilde{a}_1(n) q_n + 4(2n-1) \tilde{a}_2(n) q_{n-1} - 4(n-1)^2 (2n-1)(2n-3) \tilde{a}_0(n+1) q_{n-2} = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(n) &= 946n^2 - 731n + 153, \\ \tilde{a}_1(n) &= 2(104060n^6 + 127710n^5 + 12788n^4 - 34525n^3 - 8482n^2 + 3298n + 1071), \\ \tilde{a}_2(n) &= 3784n^5 - 1032n^4 - 1925n^3 + 853n^2 + 328n - 184, \end{aligned}$$

и определим три линейно независимых решения $\{q'_n\}$, $\{p'_n\}$ и $\{\tilde{p}'_n\}$ начальными условиями

$$q'_0 = 1, \quad q'_1 = 14, \quad q'_2 = 978, \quad p'_0 = 0, \quad p'_1 = 17, \quad p'_2 = \frac{9405}{8}, \quad \tilde{p}'_0 = 0, \quad \tilde{p}'_1 = 23, \quad \tilde{p}'_2 = \frac{6435}{4}.$$

ТЕОРЕМА 4. (Знакоположительные) последовательности $\{q'_n\}$, $\{p'_n\}$ и $\{\tilde{p}'_n\}$, а также последовательности

$$\ell'_n = q'_n \zeta(3) - p'_n, \quad \tilde{\ell}'_n = q'_n \zeta(2) - \tilde{p}'_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\ell'_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{\ell}'_n|}{n} = \log |\mu_2| = -1.31018925 \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q'_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |p'_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{p}'_n|}{n} = \log |\mu_3|,$$

где

$$\mu_{1,2} = 0.07260980 \dots \pm i0.25981363 \dots, \quad \mu_3 = 219.85478039 \dots$$

— корни характеристического многочлена $\mu^3 - 220\mu^2 + 32\mu - 16$ рекурсии (16).

На этот раз вспомогательным рекурсиям удовлетворяют гипергеометрические ряды

$$r'_n = -n!^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n (k-j)}{\prod_{j=0}^n (k+j)^3}, \quad \tilde{r}'_n = n!^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^n (k-j)}{\prod_{j=0}^n (k+j)^3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

являющиеся $\mathbb{Q}$ -линейными формами от $1, \zeta(2), \zeta(3)$.

Так же, как и в случае разностного уравнения (1), явные вычисления приводят к включениям

$$q'_n \in \mathbb{Z}, \quad D_n^3 p'_n \in \mathbb{Z}, \quad D_n^2 \tilde{p}'_n \in \mathbb{Z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

что значительно лучше ожидаемых.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Apéry R. // *Astérisque*. 1979. V. 61. P. 11–13.
2. Van der Poorten A. // *Math. Intelligencer*. 1978/79. V. 1. № 4. P. 195–203.
3. Сорокин В. Н. Об одном алгоритме быстрого вычисления $\zeta(4)$. Препринт. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2002.
4. Zudilin W. Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values. *Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen* (June 29–30, 2001) // *J. Théorie Nombres Bordeaux*. 2003 (to appear).
5. Zudilin W. // *E-print math.NT/0201024* (January 2002).
6. Petkovšek M., Wilf H. S., Zeilberger D. *A = B*. Wellesley (M.A.): A. K. Peters, Ltd., 1997.
7. Zudilin W. // *E-print math.NT/0202159* (February 2002).
8. Vasilyev D. V. Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math. 2001.
9. Зудилин В. В. // *УМН*. 2002. Т. 57. № 4. С. 177–178.
10. Beukers F. // *Bull. London Math. Soc.* 1979. V. 11. № 3. P. 268–272.
11. Gosper R. W. Letters of 24.10.2000 and 25.10.2000 // *Favorite Mathematical Constants* / ed. S. Finch. <http://pauillac.inria.fr/algo/bsolve/constant/apery/infrprd.html>, 2000.
12. Карацуба Е. А. // *Проблемы передачи информации*. 1995. Т. 31. № 4. С. 69–80.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступило
27.05.2002