Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, О диофантовых задачах для q -дзета-значений, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 936–940

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:16:30

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ДИОФАНТОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ q -ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

В. В. Зудилин

1. Введение. Как обычно, величины, зависящие от числа q и превращающиеся в классические объекты в пределе $q \rightarrow 1$ (по крайней мере формально), называются q -аналогами или q -расширениями. Возможный способ q -расширить значения дзета-функции Римана выглядит следующим образом (здесь $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$):

$$\zeta_q(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{k-1} q^{\nu}}{1 - q^{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu} \rho_k(q^{\nu})}{(1 - q^{\nu})^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ обозначает сумму степеней делителей, а многочлены $\rho_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ могут быть определены рекурсивно с помощью формул $\rho_1 = 1$ и $\rho_{k+1} = (1 + (k-1)x)\rho_k + x(1-x)\rho'_k$ при $k = 1, 2, \dots$ (см. [1, отдел 8, гл. 1, §8, задача 75] для случая $k = 2$). Тогда имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 1 \\ |q| < 1}} (1 - q)^k \zeta_q(k) = \rho_k(1) \cdot \zeta(k) = (k-1)! \cdot \zeta(k), \quad k = 2, 3, \dots; \quad (2)$$

равенство $\rho_k(1) = (k-1)!$ доказано в [2, формула (7)]. Определенные таким образом q -дзета-значения (1) приводят к ряду новых интересных задач в теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел, которые являются расширениями соответствующих задач для обычных дзета-значений; мы формулируем их в п. 3 настоящей заметки. Наша ближайшая цель – продемонстрировать, как некоторые недавние достижения в изучении арифметических свойств чисел $\zeta(k)$, $k = 2, 3, \dots$, успешно переносятся на случай q -дзета-значений. Именно, мы имеем в виду гипергеометрическую конструкцию линейных форм (предложенную в работах Е. М. Никишина [3], Л. А. Гутника [4], Ю. В. Нестеренко [5]) и арифметический метод (Г. В. Чудновский [6], Е. А. Рухадзе [7], М. Хата [8]), дополненный групповым подходом (Дж. Рин и К. Виола [9], [10]). В следующем пункте приводятся новые меры иррациональности чисел $\zeta_q(1)$, $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, и отправной точкой является следующая таблица, иллюстрирующая связь между некоторыми объектами и их q -расширениями (здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа и сокращение ‘l.c.m.’ используется для обозначения наименьшего общего кратного). Мы адресуем читателя к книге [11] и работам [12]–[14], в которых указывается мотивировка и обоснование второго столбца таблицы.

обычные объекты	q -расширения, $p = 1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$
числа $n \in \mathbb{Z}$	‘числа’ $[n]_p = \frac{p^n - 1}{p - 1} \in \mathbb{Z}[p]$
простые $l \in \{2, 3, 5, 7, \dots\} \in \mathbb{Z}$	неприводимые круговые многочлены $\Phi_l(p) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,l)=1}}^l (p - e^{2\pi i k/l}) \in \mathbb{Z}[p]$

обычные объекты	q -расширения, $p = 1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$
гамма-функция Эйлера $\Gamma(t)$	q -гамма-функция Джексона $\Gamma_q(t) = \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{\nu})}{\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{t+\nu-1})} (1 - q)^{1-t}$
факториал $n! = \Gamma(n+1)$ $n! = \prod_{\nu=1}^n \nu \in \mathbb{Z}$	q -факториал $[n]_q! = \Gamma_q(n+1)$ $[n]_p! = \prod_{\nu=1}^n \frac{p^{\nu} - 1}{p - 1} = p^{n(n-1)/2} [n]_q! \in \mathbb{Z}[p]$
$\text{ord}_l n! = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{l^2} \right\rfloor + \dots$	$\text{ord}_{\Phi_l(p)} [n]_p! = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor, \quad l = 2, 3, 4, \dots$
$D_n = \text{l.c.m.}(1, \dots, n)$ $= \prod_{\substack{l \leq n \\ \text{простые}}} l^{\lfloor \log n / \log l \rfloor} \in \mathbb{Z}$	$D_n(p) = \text{l.c.m.}([1]_p, \dots, [n]_p)$ $= \prod_{l=1}^n \Phi_l(p) \in \mathbb{Z}[p]$
асимптотический закон распределения простых чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} = 1$	формула Мертенса $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n(p) }{n^2 \log p } = \frac{3}{\pi^2}$

Если $\psi(x)$ обозначает логарифмическую производную гамма-функции Эйлера и $\{x\} = x - [x]$ – дробную часть числа x , то в соответствии с формулой Мертенса для любого полуинтервала $[u, v) \subset (0, 1)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \log |p|} \sum_{l: \{n/l\} \in [u, v)} \log |\Phi_l(p)| = \frac{3}{\pi^2} (\psi'(u) - \psi'(v)) = \frac{3}{\pi^2} \int_u^v d(-\psi'(x)) \quad (3)$$

(см. [14, лемма 1]), которое можно рассматривать как q -расширение формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\text{простые } l > \sqrt{Cn} \\ \{n/l\} \in [u, v)}} \log l = \psi(v) - \psi(u) = \int_u^v d\psi(x)$$

в арифметическом методе [6]–[10].

2. Рациональные приближения к q -дзета-значениям и базисные преобразования. Пусть a_0, a_1, a_2 и b – положительные целые числа, удовлетворяющие условию $a_1 + a_2 \leq b$. Тогда ряд Гейне

$$F(\mathbf{a}, b) = \frac{\Gamma_q(b - a_2)}{(1 - q)\Gamma_q(a_1)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(t + a_1)\Gamma_q(t + a_2)}{\Gamma_q(t + 1)\Gamma_q(t + b)} q^{a_0 t}$$

является $\mathbb{Q}(p)$ -линейной формой $F(\mathbf{a}, b) = A\zeta_q(1) - B$ со свойством

$$p^{-M} D_m(p) \cdot F(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(1) + \mathbb{Z}[p], \quad (4)$$

где $M = M(\mathbf{a}, b)$ – некоторое (определяемое явно) целое число и m – максимум 6-элементного множества

$$c_{00} = a_0 + a_1 + a_2 - b - 1, \quad c_{01} = a_0 - 1, \quad c_{11} = a_1 - 1, \quad c_{21} = a_2 - 1, \\ c_{12} = b - a_1 - 1, \quad c_{22} = b - a_2 - 1.$$

Полагая $H(\mathbf{c}) = F(\mathbf{a}, b)$ и используя инвариантность величины

$$\frac{F(a_0, a_1, a_2, b)}{\Gamma_q(a_0)\Gamma_q(a_2)\Gamma_q(b - a_2)} = \frac{H(\mathbf{c})}{\Pi_q(\mathbf{c})}, \quad \text{где } \Pi_q(\mathbf{c}) = [c_{01}]_q! [c_{21}]_q! [c_{22}]_q! = p^{-N(\mathbf{c})} \Pi_p(\mathbf{c}),$$

под действием преобразований

$$\begin{aligned}\tau &= (c_{22} \ c_{21} \ c_{01} \ c_{11} \ c_{12} \ c_{00}): (a_0, a_1, a_2, b) \mapsto (a_1, b - a_1, a_0, a_0 + a_2), \\ \sigma &= (c_{11} \ c_{21})(c_{12} \ c_{22}): (a_0, a_1, a_2, b) \mapsto (a_0, a_2, a_1, b),\end{aligned}$$

мы приходим к лучшим, чем в (4), включениям

$$p^{-M} D_m(p) \Omega^{-1}(p) \cdot F(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{Z}[p] \zeta_q(1) + \mathbb{Z}[p] \quad (5)$$

с

$$\Omega(p) = \prod_{l=1}^m \Phi_l^{\nu_l}(p), \quad \nu_l = \max_{\mathfrak{g} \in \langle \tau^2, \sigma \rangle} \text{ord}_{\Phi_l(p)} \frac{\Pi_p(\mathbf{c})}{\Pi_p(\mathfrak{g}\mathbf{c})}. \quad (6)$$

Кроме того, несложные оценки величины $F(\mathbf{a}, b)$ и явные формулы для коэффициента A приводят к соотношениям

$$|F(\mathbf{a}, b)| = |p|^{O(b)}, \quad |A| \leq |p|^{(a_0 + a_1 + a_2)b - (a_1^2 + a_2^2 + b^2)/2 + O(b)} \quad (7)$$

с некоторой абсолютной постоянной в $O(b)$.

Отметим, что нетривиальное преобразование τ величины $H(\mathbf{c})/\Pi_q(\mathbf{c})$ было получено Э. Гейне [15] (в несколько иных обозначениях) еще в 1847 году. Группа преобразований $\mathfrak{G} = \langle \tau, \sigma \rangle$ порядка 12 не имеет обычного аналога, поскольку соответствующие (в пределе $q \rightarrow 1$) гауссовы гипергеометрические ряды являются расходящимися. Мы используем группу $\langle \tau^2, \sigma \rangle$ порядка 6 вместо полной группы $\mathfrak{G}$, чтобы обеспечить выполнение условия $a_1 + a_2 \leq b$. Наконец, выбирая $a_0 = a_2 = 8n + 1$, $a_1 = 6n + 1$, $b = 15n + 2$ и учитывая (5), (7), (3), мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(1)$ является иррациональным с показателем иррациональности, удовлетворяющим неравенству

$$\mu(\zeta_q(1)) \leq 2.42343562 \dots \quad (8)$$

Под показателем иррациональности $\mu = \mu(\alpha)$ вещественного иррационального числа α мы понимаем наименьшее возможное значение μ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|\alpha - a/b| \leq b^{-(\mu+\varepsilon)}$ имеет лишь конечное число решений в целых числах a, b . Оценку (8) можно сравнить с предыдущим результатом $\mu(\zeta_q(1)) \leq 2\pi^2/(\pi^2 - 2) = 2.50828476 \dots$, полученным П. Бундшу и К. Ваананеном в [12] и отвечающим выбору $a_0 = a_1 = a_2 = n + 1$, $b = 2n + 2$ в наших обозначениях.

Аналогичные аргументы с применением более простой группы $\langle \sigma \rangle$ порядка 2 позволяют улучшить оценку $\mu(\log_q(2)) \leq 3.36295386 \dots$. У. Ван Аша [13] для следующего q -расширения числа $\log(2)$:

$$\log_q(2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} q^{\nu}}{1 - q^{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu}}{1 + q^{\nu}}.$$

Именно, в [14] мы получаем неравенство $\mu(\log_q(2)) \leq 3.29727451 \dots$ для $q^{-1} = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

В случае чисел $\zeta_q(2)$ рассмотрим положительные параметры $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, a_2, a_3, b_2, b_3)$, удовлетворяющие условиям $a_j < b_k$ и $a_1 + a_2 + a_3 < b_2 + b_3$, и q -базисный гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\Gamma_q(b_2 - a_2) \Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1 - q)^2 \Gamma_q(a_1)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(t + a_1) \Gamma_q(t + a_2) \Gamma_q(t + a_3)}{\Gamma_q(t + 1) \Gamma_q(t + b_2) \Gamma_q(t + b_3)} q^{(b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3)t} \\ &= \tilde{A} \zeta_q(2) - \tilde{B}.\end{aligned}$$

Тогда $p^{-M} D_{m_1}(p) D_{m_2}(p) \cdot \tilde{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[p]$, где $m_1 \geq m_2$ – два последовательных максимума 10-элементного множества

$$c_{00} = (b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) - 1, \quad c_{jk} = \begin{cases} a_j - 1 & \text{при } k = 1, \\ b_k - a_j - 1 & \text{при } k = 2, 3, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

и, кроме того,

$$|\tilde{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |p|^{O(\max\{b_2, b_3\})}, \quad |\tilde{A}| \leq |p|^{b_2 b_3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)/2 + O(\max\{b_2, b_3\})}.$$

Группа перестановок $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{10}$ множества $\mathbf{c}$, порожденная всеми перестановками параметров a_1, a_2, a_3 , перестановкой b_2, b_3 и перестановкой $(c_{00} \ c_{22})(c_{11} \ c_{33})(c_{13} \ c_{31})$, имеет порядок 120 и известна в связи с доказательством Рина и Виолы [9] новой меры иррациональности для $\zeta(2)$ (см. также [16, § 6]). В обозначении $\tilde{H}(\mathbf{c}) = \tilde{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ величина

$$\frac{\tilde{H}(\mathbf{c})}{[c_{00}]_q! [c_{21}]_q! [c_{22}]_q! [c_{33}]_q! [c_{31}]_q!}$$

инвариантна под действием группы $\mathfrak{S}$. Эта $\mathfrak{S}$ -инвариантность приводит к включениям

$$p^{-M} D_{m_1}(p) D_{m_2}(p) \tilde{\Omega}^{-1}(p) \cdot \tilde{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[p]$$

с величиной $\tilde{\Omega}(p)$, определенной подобно (6). Наконец, полагая $a_1 = 5n+1, a_2 = 6n+1, a_3 = 7n+1$ и $b_2 = 14n+2, b_3 = 15n+2$, мы получаем следующий результат [17].

ТЕОРЕМА 2. Для каждого $q = 1/p, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(2)$ является иррациональным с показателем иррациональности, удовлетворяющим неравенству

$$\mu(\zeta_q(2)) \leq 4.07869374 \dots \quad (9)$$

Количественные оценки типа (9) для $\zeta_q(2)$ ранее не были известны, хотя иррациональность и даже трансцендентность числа $\zeta_q(2)$ для любого алгебраического q с условием $0 < |q| < 1$ следует из теоремы Нестеренко [18].

Отметим, что более простой выбор параметров $a_1 = a_2 = a_3 = n+1, b_2 = b_3 = 2n+2$ также доказывает иррациональность числа $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, а в пределе $q \rightarrow 1$ получаются рациональные приближения Апери [19] к числу $\zeta(2)$.

Хотелось бы подчеркнуть, что использование (кратных) q -интегралов для рядов $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\tilde{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в изучении арифметических свойств чисел $\zeta_q(1), \zeta_q(2)$ по схеме работ [7]–[10] представляется крайне затруднительным. Причина этому – отсутствие концепции q -аналога замены переменной в q -интеграле (см. [20], [21, § 2.2.4]).

3. Общие задачи для q -дзета-значений. Сразу отметим, что для четных $k \geq 2$ ряды $E_k(q) = 1 - 2k\zeta_q(k)/B_k$, где $B_k \in \mathbb{Q}$ – числа Бернулли, известны как *ряды Эйзенштейна*. Поэтому модулярное происхождение (относительно параметра $\tau = \frac{\log q}{2\pi i}$) функций $E_4, E_6, E_8, \dots$ приводит к алгебраической независимости $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ над $\mathbb{Q}[q]$, в то время как остальные четные q -дзета-значения являются многочленами от $\zeta_q(4)$ и $\zeta_q(6)$. В такой интерпретации следствие из теоремы Нестеренко [18] “числа $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$ для алгебраического $q, 0 < |q| < 1$ ” является полным q -расширением следствия из теоремы Линдемана [22] “ $\zeta(2) = \pi^2/6$ трансцендентно”. Кроме того, трансцендентность значений функции

$$1 + 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu q^{2\nu+1}}{1 - q^{2\nu+1}} = \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \quad (10)$$

в алгебраических точках q , $0 < |q| < 1$, также следует из теоремы Нестеренко (доказательство тождества Якоби (10) можно найти, например, в [23, теорема 2]); ряд в левой части (10) является q -аналогом ряда

$$4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1} = \pi.$$

Наилучшая оценка для показателя иррациональности величины (10) в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ получена в работе [24].

Предельные соотношения (2) и предполагаемая алгебраическая структура обычных дзета-значений мотивируют следующие вопросы (мы также рассматриваем $\zeta_q(1)$ как нечетное q -дзета-значение, хотя соответствующий в пределе $q \rightarrow 1$ гармонический ряд является расходящимся).

ЗАДАЧА 1. Доказать, что q -дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(2), \zeta_q(3), \dots$ как функции от q линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$.

ЗАДАЧА 2. Доказать, что q -функциональное множество, включающее три четные q -дзета-значения $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ и все нечетные q -дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(3), \zeta_q(5), \dots$, состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{C}(q)$ функций.

Отвечающие задачам 1, 2 диофантовы задачи состоят в том, чтобы доказать соответствующие линейную и алгебраическую независимости над полем алгебраических чисел для алгебраических q с $0 < |q| < 1$. В этом направлении даже результаты об иррациональности и линейной независимости q -дзета-значений над $\mathbb{Q}$ в точках $q \in \mathbb{Q}$, $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, представлялись бы весьма интересными.

Задача несколько иного типа – создать модель кратных q -дзета-значений, включающую q -дзета-значения (1) и обладающую схожими свойствами с моделью кратных дзета-значений [25].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поля Г., Серё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978.
2. Kaneo M., Kurokawa N., Wakayama M. // E-print math.QA/0206171 (June 2002).
3. Никишин Е. М. // Матем. сб. 1979. Т. 109 (151). № 3 (7). С. 410–417.
4. Гутник Л. А. // Acta Arith. 1983. V. 42. № 3. Р. 255–264.
5. Нестеренко Ю. В. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 865–880.
6. Chudnovsky G. V. // Ann. of Math. (2). 1983. V. 117. № 2. Р. 325–382.
7. Рухадзе Е. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 6. С. 25–29.
8. Hata M. // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 407. № 1. Р. 99–125.
9. Rhin G., Viola C. // Acta Arith. 1996. V. 77. № 1. Р. 23–56.
10. Rhin G., Viola C. // Acta Arith. 2001. V. 97. № 3. Р. 269–293.
11. Гаспер Г., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
12. Bundschuh P., Väänänen K. // Compositio Math. 1994. V. 91. Р. 175–199.
13. Van Assche W. // The Ramanujan J. 2001. V. 5. № 3. Р. 295–310.
14. Zudilin W. // Manuscripta Math. 2002. V. 107. № 4. Р. 463–477.
15. Heine E. // J. Reine Angew. Math. 1847. V. 34. Р. 285–328.
16. Zudilin W. // E-print math.NT/0206176 (August 2001).
17. Зудилин В. В. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 8. С. 49–70.
18. Нестеренко Ю. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 9. С. 65–96.
19. Apéry R. // Astérisque. 1979. V. 61. Р. 11–13.
20. Askey R. // Appl. Anal. 1978. V. 8. Р. 125–141.
21. Exton H. q -Hypergeometric Functions and Applications. Ellis Horwood Ser. Math. Appl. Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1983.
22. Lindemann F. // Math. Annalen. 1882. V. 20. Р. 213–225.
23. Andrews G. E., Lewis R., Liu Z.-G. // Bull. London Math. Soc. 2001. V. 33. Р. 25–31.
24. Matala-aho T., Väänänen K. // Bull. Austral. Math. Soc. 1998. V. 58. Р. 15–31.
25. Waldschmidt M. // J. Théorie des Nombres de Bordeaux. 2000. V. 12. Р. 581–595.