Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, Замечание об описании
фреймов общего вида, *Матем. заметки*, 2002, том 72, вы-
пуск 6, 941–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:07:32

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОПИСАНИИ ФРЕЙМОВ ОБЩЕГО ВИДА

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова

Пусть H – гильбертово пространство. Система ненулевых элементов $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\} \subset H$ называется *фреймом*, если выполнены неравенства

$$A\|g\|_H^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |(g, \varphi_j)|^2 \leq B\|g\|_H^2 \quad \forall g \in H, \quad (1)$$

где $0 < A \leq B < \infty$ – абсолютные постоянные, а $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ – норма и скалярное произведение в H . Постоянные B и A называются соответственно *верхней* и *нижней границами* фрейма Φ , а их отношение $\kappa = B/A$ называется *коэффициентом обусловленности* и обозначается $\kappa(\Phi)$. В случае, когда $\kappa(\Phi) = 1$, т.е. $A = B$, фрейм Φ называется *жестким*. Фреймы были введены в 1952 году в работе Даффина и Шеффера [1] (см. также [2]), однако некоторые результаты о фреймах содержались в неявном виде и в более ранних работах. В частности, следующий результат известен в квантовой теории информации и некоторых областях функционального анализа как теорема Наймарка и датируется 1940 годом.

ТЕОРЕМА А (см. [3, гл. 10], [4], [9]). *Для любого жесткого фрейма $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ в гильбертовом пространстве H найдутся гильбертово пространство $H' \supset H$ и ортонормированный базис $\Psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ пространства H' такие, что*

$$\varphi_j = \pi_{H' \rightarrow H}(\psi_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\pi_{H' \rightarrow H}$ – оператор ортогонального проектирования из H' в H .

Ближкие к теореме А результаты содержатся также в работе Козлова 1948 года, где, по существу, исследовались жесткие фреймы (см. [5], а также [6] и [7, теорема 8.3]). Недавно результаты смежные с теоремой А были получены Лукашенко [8].

В последние годы фреймы нашли разнообразные приложения в прикладной математике, в частности, при построении алгоритмов сжатия изображений. В этой связи представляется естественным дать описание фреймов общего вида, аналогичное теореме А. Мы не нашли соответствующего результата в литературе и устанавливаем его в этой заметке. Приводимое ниже доказательство с нашей точки зрения проще, чем известные доказательства теоремы Наймарка (рассуждения ниже, в предположении, что $\kappa(\Phi) = 1$, аналогичны проверке элементарного факта из линейной алгебры о возможности дополнения ортонормированного набора векторов $\{v_i, i = 1, 2, \dots, s\} \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq s < n$, до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$; весьма прозрачен конечномерный вариант установленной ниже теоремы 1 и в случае, когда $\kappa(\Phi) > 1$).

Прежде, чем формулировать и доказывать наш результат, введем некоторые обозначения. Пусть Λ – некоторое счетное множество с заданным на нем порядком (иными словами, мы считаем, что фиксировано взаимно однозначное отображение Λ на натуральный ряд $\mathbb{N}$). Через $\ell^2(\Lambda)$ обозначим гильбертово пространство наборов чисел $\{c_\omega, \omega \in \Lambda\}$, занумерованных элементами из Λ с нормой

$$\left(\sum_{\omega \in \Lambda} |c_\omega|^2 \right)^{1/2}.$$

Классическое гильбертово пространство $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ соответствует случаю, когда $\Lambda = \mathbb{N}$ и на Λ задан естественный порядок. В этом случае для j -го элемента a_j последовательности $a = \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \in \ell^2$ используем также обозначение $(a)_j$. Система элементов $\Psi = \{\psi_\omega : \omega \in \Lambda\}$ гильбертова пространства H' называется *базисом Рисса* в H' , если Ψ полна в H' и для любого набора чисел $\{c_\omega : \omega \in \Lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$ выполняются оценки

$$A^{1/2} \left(\sum_{\omega \in \Lambda} |c_\omega|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega \psi_\omega \right\|_{H'} \leq B^{1/2} \left(\sum_{\omega \in \Lambda} |c_\omega|^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $0 < A \leq B < \infty$ – абсолютные постоянные (о базисах Рисса см., например, [7, с. 17]; обычно $\Lambda = \mathbb{N}$; отметим еще, что свойство системы быть базисом Рисса не зависит от порядка элементов этой системы).

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы система элементов $\Phi = \{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ гильбертова пространства H являлась фреймом с границами A и B , $A \leq B$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось гильбертово пространство H' , содержащее H , и базис Рисса $\Psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ в H' со свойством (2) (при $\Lambda = \mathbb{N}$) такие, что*

$$\varphi_j = \pi_{H' \rightarrow H}(\psi_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Ниже для определенности считаем, что H – действительное гильбертово пространство. Следующий факт, по существу, хорошо известен.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть Λ – некоторое счетное множество и $V = \{v_\omega : \omega \in \Lambda\}$ – базис Рисса в гильбертовом пространстве H , причем для всех $c \in \ell^2(\Lambda)$*

$$A^{1/2} \left(\sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\|_H \leq B^{1/2} \left(\sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega^2 \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где $A > 0$, B – абсолютные постоянные. Тогда сопряженная к V система

$$V^* = \{v_\mu^* : \mu \in \Lambda\}$$

является базисом Рисса в сопряженном пространстве H^* и выполняется оценка

$$\frac{1}{B^{1/2}} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu v_\mu^* \right\|_{H^*} \leq \frac{1}{A^{1/2}} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

(Напомним, что сопряженная система однозначно определяется соотношениями

$$\langle v_\mu^*, v_\omega \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \omega, \\ 0, & \text{если } \mu \neq \omega, \end{cases}$$

где $\langle f, g \rangle$ – значение функционала $f \in H^*$ на элементе $g \in H$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полнота и минимальность системы V^* вытекает из общих результатов о базисах (см. [7, гл. 1]). Проверим справедливость неравенств (4). Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu v_\mu^* \right\|_{H^*} &= \sup_{\{c_\omega\} : \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\|_H \leq 1} \left\langle \sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu v_\mu^*, \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\rangle \\ &= \sup_{\{c_\omega\} : \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\|_H \leq 1} \sum_{\omega \in \Lambda} \beta_\omega c_\omega \geq \frac{1}{B^{1/2}} \left(\sum_{\omega \in \Lambda} \beta_\omega^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

так как в силу (3) имеет место включение

$$\left\{ \{c_\omega\} : \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\|_H \leq 1 \right\} \supset \left\{ \{c_\omega\} : \left(\sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{B^{1/2}} \right\}.$$

Аналогично,

$$\left\| \sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu v_\mu^* \right\|_{H^*} = \sup_{\{c_\omega\} : \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\|_H \leq 1} \sum_{\omega \in \Lambda} \beta_\omega c_\omega,$$

и в силу включения

$$\left\{ \{c_\omega\} : \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega v_\omega \right\|_H \leq 1 \right\} \subset \left\{ \{c_\omega\} : \left(\sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{A^{1/2}} \right\}$$

мы имеем

$$\left\| \sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu v_\mu^* \right\|_{H^*} \leq \frac{1}{A^{1/2}} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} \beta_\mu^2 \right)^{1/2}.$$

Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 вытекает, что для любого базиса Рисса $V = \{v_\omega : \omega \in \Lambda\}$ со свойством (3) и для любого элемента $f \in H^*$ выполняются соотношения

$$A \|f\|_{H^*}^2 \leq \sum_{\omega \in \Lambda} \langle f, v_\omega \rangle^2 \leq B \|f\|_{H^*}^2. \quad (5)$$

Действительно, применяя утверждение 1 для разложения функционала f по базису $\{v_\mu^* : \mu \in \Lambda\}$:

$$f = \sum_{\omega \in \Lambda} \langle f, v_\omega \rangle v_\omega^*,$$

мы получаем (5). Используя изометрию пространств H и H^* , мы из (5) выводим, что в условиях утверждения 1 для любого $g \in H$ выполнено

$$A \|g\|_H^2 \leq \sum_{\omega \in \Lambda} (g, v_\omega)^2 \leq B \|g\|_H^2. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Пусть $\Psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ – базис Рисса в H' , $H' \supset H$, и выполнены соотношения (2) при $\Lambda = \mathbb{N}$. Пусть также $\varphi_j = \pi_{H' \rightarrow H}(\psi_j)$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда для любого элемента $g \in H$ выполнено

$$(g, \varphi_j) = (g, \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

а, значит, для любого $g \in H$

$$A \|g\|_H^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (g, \varphi_j)^2 \leq B \|g\|_H^2,$$

т.е. система $\{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ – фрейм.

Необходимость. Не ограничивая общности, считаем, что $H = \ell^2$. Образует бесконечную матрицу R , j -й столбец которой совпадает с последовательностью $\varphi_j \in \ell^2$, $j = 1, 2, \dots$. Пусть v_i , $i = 1, 2, \dots$, – строки матрицы R . Тогда неравенства (1) означают, что для любой последовательности $\alpha = \{\alpha_i : i = 1, 2, \dots\} \in \ell^2$ выполнены оценки

$$A \|\alpha\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i \right\|_{\ell^2}^2 \leq B \|\alpha\|_{\ell^2}^2. \quad (7)$$

Пусть L – замыкание (по норме ℓ^2) линейной оболочки системы $V = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$. В силу (7) $\dim L = \infty$ и V – базис Рисса в L . Рассмотрим ортогональное дополнение $L^\perp$ к L в ℓ^2 . Пусть $W = \{w_\nu : \nu \in M\}$ – произвольный ортогональный базис в $L^\perp$, причем

$$\forall \nu \in M \quad A \leq \|w_\nu\|_{\ell^2}^2 \leq B, \quad (8)$$

где M – некоторое счетное, конечное или пустое (в зависимости от размерности подпространства $L^\perp$) множество индексов, $M \cap \mathbb{N} = \emptyset$ и элементы системы W “занумерованы” точками из M . Пусть $\Lambda = \mathbb{N} \cup M$ и система $\Gamma = \{\gamma_\omega : \omega \in \Lambda\} \subset \ell^2$ задается соотношениями

$$\gamma_\omega = \begin{cases} v_i & \text{если } \omega = i \in \mathbb{N}, \\ w_\nu & \text{если } \omega = \nu \in M. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда легко видеть, что Γ – базис Рисса в ℓ^2 , причем

$$\left(A \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega \gamma_\omega \right\|_{\ell^2} \leq \left(B \sum_{\omega \in \Lambda} c_\omega^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Действительно, для любого элемента $g \in \ell^2$ имеет место разложение

$$g = g_L + g_{L^\perp},$$

где

$$g_L = \pi_{\ell^2 \rightarrow L}(g), \quad g_{L^\perp} = \pi_{\ell^2 \rightarrow L^\perp}(g).$$

Если

$$g_L = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i v_i, \quad g_{L^\perp} = \sum_{\nu \in M} \beta_\nu w_\nu,$$

то в силу ортогональности g_L и $g_{L^\perp}$, а также неравенств (7) и (8)

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \|g_L\|_{\ell^2}^2 + \|g_{L^\perp}\|_{\ell^2}^2 \leq B \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu \in M} \beta_\nu^2 \|w_\nu\|_{\ell^2}^2 \leq B \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu \in M} \beta_\nu^2 \right), \\ \|g\|^2 &= \|g_L\|_{\ell^2}^2 + \|g_{L^\perp}\|_{\ell^2}^2 \geq A \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu \in M} \beta_\nu^2 \|w_\nu\|_{\ell^2}^2 \geq A \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^2 + \sum_{\nu \in M} \beta_\nu^2 \right), \end{aligned}$$

что доказывает (10).

Зафиксировав произвольный порядок на множестве Λ , рассмотрим “матрицу”

$$\tilde{R} = \{r_{\omega, j} : \omega \in \Lambda, j \in \mathbb{N}\},$$

где для всех $\omega \in \Lambda$ и $j \in \mathbb{N}$

$$r_{\omega, j} = \begin{cases} (v_\omega)_j, & \text{если } \omega \in \mathbb{N}, \\ (w_\omega)_j, & \text{если } \omega \in M. \end{cases}$$

Пусть $\psi_j, j = 1, 2, \dots$, – “ j -й столбец матрицы $\tilde{R}$ ”, т.е. набор чисел $\{r_{\omega, j} : \omega \in \Lambda\} \subset \ell^2(\Lambda)$. Пусть

$$\pi_0 = \pi_{\ell^2(\Lambda) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})}$$

– оператор ортогонального проектирования из гильбертова пространства $\ell^2(\Lambda)$ на его подпространство $\ell^2(\mathbb{N})$. Тогда ясно, что $\pi_0(\psi_j) = \varphi_j, j = 1, 2, \dots$, и нам остается проверить, что система $\{\psi_j\}$ – базис Рисса в $H' = \ell^2(\Lambda)$ и справедливы неравенства (2). Неравенства (10) означают, что для любого элемента $c = \{c_\omega\} \in \ell^2(\Lambda)$ выполнено

$$A \|c\|_{\ell^2(\Lambda)}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} (c, \psi_j)^2 \leq B \|c\|_{\ell^2(\Lambda)}^2. \quad (11)$$

Из (11) вытекает полнота системы $\{\psi_j\}$ в $\ell^2(\Lambda)$. Далее, для любой последовательности $\rho = \{\rho_j\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ рассмотрим ряд в $\ell^2(\Lambda)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j.$$

Тогда (см. (9))

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j \right\|_{\ell^2(\Lambda)}^2 = \sum_{\omega \in \Lambda} (\rho, \gamma_{\omega})^2. \quad (12)$$

Так как $\Gamma = \{\gamma_{\omega}\}$ – базис Рисса в ℓ^2 и имеет место (10), то мы можем воспользоваться соотношением (6) и, учитывая (12), получить, что

$$A \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j \right\|_{\ell^2(\Lambda)}^2 \leq B \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2.$$

Теорема 1 доказана.

В заключение, пользуясь случаем, сделаем дополнение к теореме 1 нашей недавней заметки [10]. Аналогично [10] могут оцениваться снизу величины

$$\gamma_n(W, \Phi, D) = \sup_{f \in W \wedge_n, \{c_j\}_{j \in \Lambda_n}: (\sum c_j^2)^{1/2} \leq D \|f\|} \inf_{\{c_j\}_{j \in \Lambda_n}: (\sum c_j^2)^{1/2} \leq D \|f\|} \left\| f - \sum_{j \in \Lambda_n} c_j \varphi_j \right\|_H,$$

где $W \subset H$, $\Phi = \{\varphi_j\}$ – фрейм в H , а Λ_n пробегает семейство всех n -элементных подмножеств $\mathbb{N}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin R., Schaeffer A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 2. P. 341–266.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск: РХД, 2001.
3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
4. Наймарк М. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 3. С. 277–318.
5. Козлов В. Я. // Матем. сб. 1948. Т. 23. № 3. С. 441–474.
6. Олевский А. М. // Матем. заметки. 1969. Т. 6. С. 737–747.
7. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999.
8. Лукашенко Т. П. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 57–72.
9. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002.
10. Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 2. С. 312–315.