Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, О скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 949–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:32:16

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

С. А. Теляковский

Пусть 2π -периодическая функция f имеет ограниченную вариацию,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

– ее ряд Фурье, $s_n(f, x)$ – частная сумма порядка n ряда (1) и для всех x выполняется условие

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)). \quad (2)$$

Введем обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$g_x(t) := f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad t \in [0, \pi],$$

$V(f, [\alpha, \beta])$ – вариация функции f на отрезке $[\alpha, \beta]$, $V(f)$ – полная вариация функции f на периоде. Через C будут обозначаться абсолютные положительные постоянные, в разных случаях различные.

В силу (2) функция $g_x(t)$ непрерывна в нуле, поэтому

$$V(g_x, [0, t]) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \quad (3)$$

Согласно теореме Дирихле–Жордана в каждой точке x ряд Фурье функции f сходится к значению $f(x)$, т.е.

$$f(x) - s_n(f, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Боянич [1] установил следующую оценку скорости сходимости в (4):

$$|f(x) - s_n(f, x)| \leq \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n V\left(g_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right). \quad (5)$$

Заметим, что в силу (3) выражение в правой части неравенства (5) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $n_1 = 1 < n_2 < \dots$ – последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{n_j} \leq \frac{A}{n_m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $A > 1$ – некоторая постоянная. Это условие равносильно представимости последовательности $\{n_j\}$ в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей (см. [2, с. 24]). Некоторые другие условия, равносильные (6), были получены в [3, лемма 1].

В [4, теорема 2] установлен следующий результат, усиливающий соотношение (4). Если функция f имеет ограниченную вариацию и последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (6), то ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \quad (7)$$

сходится в каждой точке x и его сумма ограничена числом $CAV(f)$, где A – множитель из оценки (6).

В [5] показано, что условие (6) на последовательность $\{n_j\}$ не является в этом утверждении необходимым, но вместе с тем, оно не может быть существенно ослаблено.

Цель настоящей работы – показать, что усиление, аналогичное (7), допускает и оценка (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01210, и программ “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96047, и INTAS, грант № 99-01080.

ТЕОРЕМА 1. Если функция f имеет ограниченную вариацию и последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (6), то для всех n и x справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(f, x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{n_i-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| + \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &\leq \frac{CA}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} V\left(gx, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $n_{i-1} \leq n < n_i$ и A – множитель из оценки (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим остаток ряда (7). Так как

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) d \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} dg_x(t), \end{aligned}$$

то

$$\left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} \right| dV(gx, [0, t])$$

и, значит,

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} \right| dV(gx, [0, t]). \quad (9)$$

Разобьем промежутки интегрирования в интеграле из (9) на два отрезка: $[0, \pi/n_i]$ и $[\pi/n_i, \pi]$. Согласно теореме 1 из [4] справедлива равномерная по t оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} \right| \leq CA.$$

С ее помощью получаем

$$\int_0^{\pi/n_i} \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} \right| dV(gx, [0, t]) \leq CAV\left(gx, \left[0, \frac{\pi}{n_i}\right]\right). \quad (10)$$

Далее, в [6, лемма 1] фактически доказана оценка

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} \right| \leq \frac{CA}{n_i t}, \quad 0 < t \leq \pi.$$

Пользуясь этой оценкой, находим

$$\int_{\pi/n_i}^{\pi} \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kt}{k} \right| dV(gx, [0, t]) \leq \frac{CA}{n_i} \int_{\pi/n_i}^{\pi} \frac{1}{t} dV(gx, [0, t]). \quad (11)$$

Для оценки интеграла из правой части неравенства (11) повторяем соответствующие рассуждения из работы [1]:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/n_i}^{\pi} \frac{1}{t} dV(gx, [0, t]) &= \frac{1}{t} V(gx, [0, t]) \Big|_{\pi/n_i}^{\pi} + \int_{\pi/n_i}^{\pi} V(gx, [0, t]) \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \frac{1}{\pi} V(gx, [0, \pi]) + \frac{1}{\pi} \int_1^{n_i} V\left(gx, \left[0, \frac{\pi}{t}\right]\right) dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n_i-1} V\left(gx, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (9)–(12) вытекает следующая оценка остатка ряда (7):

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \frac{CA}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} V\left(gx, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right). \quad (13)$$

Если число $n+1$ не входит в последовательность $\{n_j\}$, то, чтобы оценить выражение

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n_i-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| + \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right|, \quad (14)$$

добавим в последовательность $\{n_j\}$ число $n+1$. Так как для полученной новой последовательности выполняется условие вида (6), если заменить в нем A на $2A$, это позволяет в силу (13) оценить выражение (14) суммой

$$\frac{CA}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} V\left(gx, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right).$$

Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что функция f не только имеет ограниченную вариацию, но и удовлетворяет некоторым условиям непрерывности.

Как отмечено в [1], если функция f непрерывна всюду, то

$$V(gx, [0, \delta]) \leq V(f, [x - \delta, x + \delta]) \leq 2\omega(V(f, [-\pi, t]), \delta), \quad (15)$$

где $\omega(V(f, [-\pi, t]), \delta)$ – модуль непрерывности функции $V(f, [-\pi, t])$. Поэтому из (5) следует оценка

$$|f(x) - s_n(f, x)| \leq \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n \omega\left(V(f, [-\pi, t]), \frac{\pi}{k}\right), \quad (16)$$

которая эквивалентна (с точностью до числового множителя) результату, полученному Натансоном [7].

А из (8) в силу (15) получаем следующее усиление оценки (16):

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n_i-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| + \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \frac{CA}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \omega \left(V(f, [-\pi, t]), \frac{\pi}{k} \right), \quad n_{i-1} \leq n < n_i. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь, что можно сказать, если функция ограниченной вариации непрерывна в некоторой точке или на части периода.

В [6, теорема 3] доказано, что если функция f имеет ограниченную вариацию и, кроме того, непрерывна в точке x_0 , то ряд (7) сходится в этой точке равномерно. А если f непрерывна во всех точках отрезка $[\alpha, \beta]$, то ряд (7) сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$.

Оба эти утверждения можно вывести из оценки (8).

В самом деле, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то в этой точке непрерывна также функция $V(f, [-\pi, x])$. Поэтому по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти положительное δ , для которого выполняется оценка

$$V(f, [x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta]) < \varepsilon.$$

Пусть N таково, что $\pi/N \leq \delta$. Тогда для всех $k > N$ и x таких, что $|x - x_0| \leq \delta$, имеем

$$V \left(g_x, \left[0, \frac{\pi}{k} \right] \right) \leq V \left(f, \left[x - \frac{\pi}{k}, x + \frac{\pi}{k} \right] \right) < \varepsilon.$$

Значит, согласно (8) для этих x и $n_i > N$ выполняется оценка

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| < \frac{CA}{n_i} \left(\sum_{k=1}^N V \left(g_x, \left[0, \frac{\pi}{k} \right] \right) + \sum_{k=N+1}^{n_i} \varepsilon \right) < \frac{CA}{n_i} NV(f) + CA\varepsilon. \quad (18)$$

Так как за счет выбора числа i величину

$$\frac{CA}{n_i} NV(f)$$

можно сделать сколь угодно малой, то из (18) вытекает равномерная сходимость ряда (7) в точке x_0 .

Подобными рассуждениями устанавливается и равномерная сходимость ряда (7) на отрезке $[\alpha, \beta]$, если функция f непрерывна во всех точках этого отрезка. Будем считать, что отрезок $[\alpha, \beta]$ принадлежит интервалу $(-\pi, \pi)$.

Действительно, вместе с $f(x)$ функция $V(f, [-\pi, x])$ непрерывна во всех точках отрезка $[\alpha, \beta]$. Пользуясь равномерной непрерывностью функции $V(f, [-\pi, x])$ на $[\alpha, \beta]$ и ее непрерывностью в точках α и β , видим, что по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [\alpha, \beta]$

$$V(f, [x - \delta, x + \delta]) < \varepsilon.$$

Поэтому если $\pi/N < \delta$, то для $k > N$ и всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива оценка

$$V \left(g_x, \left[0, \frac{\pi}{k} \right] \right) \leq V \left(f, \left[x - \frac{\pi}{k}, x + \frac{\pi}{k} \right] \right) < \varepsilon.$$

Значит, если $n_i > N$, то в силу (8) для всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива оценка (18), из которой следует равномерная на $[\alpha, \beta]$ сходимость ряда (7).

В заключение отметим, что если функция f непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то из (8) можно получить оценку скорости равномерной сходимости ряда (7) на отрезках вида $[\alpha + \delta, \beta - \delta]$, $\delta > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию на периоде и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, а последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (6). Если $0 < \delta < (\beta - \alpha)/2$, то для всех $x \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$ и $n_i > [\pi/\delta]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(x) - s_{n_i-1}(f, x)| &\leq \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &\leq \frac{CA}{n_i} \left(\sum_{k=[\pi/\delta]+1}^{n_i} \omega \left(V(f, [\alpha, x]), \frac{\pi}{k} \right) + \frac{V(f)}{\delta} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\omega(V(f, [\alpha, x]))$ – модуль непрерывности функции $V(f, [\alpha, x])$ как функции, заданной на $[\alpha, \beta]$.

В самом деле, для $x \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$ при $k > [\pi/\delta]$ имеем

$$V \left(g_x, \frac{\pi}{k} \right) \leq 2 \omega \left(V(f, [\alpha, x]), \frac{\pi}{k} \right).$$

Поэтому для этих x и $n_i > [\pi/\delta]$ оценка (19) вытекает из (8).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bojanić R. // Publications de l'institut mathématique (Beograd). 1979. Т. 26 (40). С. 57–60.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. Стечкин С. Б. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 385–412.
4. Теляковский С. А. // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.
5. Попов А. Ю., Теляковский С. А. // Изв. вузов. Матем. 2000. Т. 1. С. 51–55.
6. Теляковский С. А. // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 318–326.
7. Натансон Г. И. // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. 1972. Т. 7. С. 154–155.