Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кириченко, Ю. В. Яременко, О полусовершенных полудистрибутивных кольцах, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 06:34:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ПОЛУСОВЕРШЕННЫХ ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

В. В. Кириченко, Ю. В. Яременко

В книге А. А. Туганбаева [1, с. 300] в упражнениях 11.76 поставлены следующие три открытых вопроса для нётерова полудистрибутивного кольца A .

- (А) Необходимо ли, что кольцо A является прямым произведением артинова кольца и полупервичного кольца?
- (В) Когда любой конечнопорожденный A -модуль полудистрибутивен?
- (С) Если кольцо A полупервично, является ли оно наследственным?

В первом разделе статьи мы строим примеры, которые дают отрицательные ответы на вопросы (А) и (С). Второй раздел статьи посвящен обсуждению вопроса (В).

Как обычно, все кольца ассоциативные и с единицей, отличной от нуля. Термины “нётерово”, “полудистрибутивное” и т. д. кольцо означают наличие у кольца этих свойств с обеих сторон. Все термины и основные факты, относящиеся к полусовершенным полудистрибутивным кольцам (кратко SPSPD-кольцам), содержатся в статьях [2]–[5] и в книге [1].

1. ПРИМЕР 1. (Отрицательный ответ на вопрос (А) из упражнений 11.76 в [1].) Обозначим через $\mathbb{Z}_p$ кольцо p -целых чисел (p – простое число), $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ – поле из p элементов. Рассмотрим SPSPD-кольцо A матриц второго порядка следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{F}_p \\ \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \end{pmatrix}.$$

Укажем действия умножения и сложения в этом кольце. Обозначим через $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ матричные единицы кольца A . Положим $e_{12}e_{21} = 0$ и $e_{21}e_{12} = 0$. Пусть $\varphi: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ – канонический эпиморфизм.

Если $a \in \mathbb{Z}_p$, то $ae_{11}e_{12} = \varphi(a)e_{12} = e_{12}\varphi(a)$ и $e_{21}ae_{11} = e_{21}\varphi(a) = \varphi(a)e_{21}$. Кроме того, $ae_{11} = e_{11}a$ для всех $a \in \mathbb{Z}_p$ и $ae_{22} = e_{22}a$ для всех $a \in \mathbb{F}_p$. Сложение определяется поэлементно, а умножение доопределяется как умножение матриц второго порядка. Очевидно, кольцо A является неразложимым нётеровым полусовершенным полудистрибутивным кольцом.

Говоря “двухточечный колчан”, мы имеем в виду, что в таком колчане ровно две вершины. Легко видеть, что колчан $Q(A)$ кольца A является двухточечным колчаном с матрицей смежности $[Q(A)]$, которая является следующей $(0, 1)$ -матрицей:

$$[Q(A)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что аналог теоремы о разложении нётерова полуцелного кольца в прямое произведение артинова кольца и полупервичного кольца (см. [6, гл. 25]) не имеет места даже для нётеровых SPSPD-колец с двухточечным колчаном.

Перейдем к ответу на вопрос (С).

Напомним, что *полумаксимальным кольцом* называется полусовершенное полупервичное нётерово справа кольцо A , у которого для любого локального идемпотента $e \in A$ кольцо eAe является дискретно нормированным кольцом (не обязательно коммутативным) [7]. Там же дается описание таких колец.

ТЕОРЕМА 1.1. *Всякое полумаксимальное кольцо изоморфно конечному прямому произведению первичных колец вида:*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}} \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}} \mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}} \mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}} \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix} (*),$$

где $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ – дискретно нормированное кольцо с простым элементом π , α_{ij} – целые рациональные числа, причем $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всех i, j, k ($\alpha_{ii} = 0$ для любого i). Такое кольцо нётерово с двух сторон.

Кольцо $\mathcal{O}$ вложено в его тело частных $\mathcal{D}$, и $(*)$ обозначает совокупность всех тех матриц $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$, у которых $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}} \mathcal{O}$. Ясно, что $M_n(\mathcal{D})$ является классическим кольцом частных кольца A .

Следующая теорема дает описание полупервичных нётеровых справа SPSPD-колец.

ТЕОРЕМА 1.2 [5]. *Следующие условия равносильны для полусовершенного полупервичного нётерова справа кольца A :*

- а) кольцо A полудистрибутивно;
- б) кольцо A является прямым произведением полупростого артинова кольца и полумаксимального кольца.

Теоремы 1.2 и 1.1 сводят описание нётеровых справа полупервичных SPSPD-колец к случаю тел и дискретно нормированных колец.

ПРИМЕР 2. (Отрицательный ответ на вопрос (С) из упражнений 11.76 в [1].) Пусть $\mathbb{Z}_p$ – кольцо p -целых чисел. Рассмотрим следующее кольцо матриц второго порядка:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \right\}.$$

Радикал Джекобсона R кольца A имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что каждый неразложимый проективный A -модуль P имеет ровно один максимальный подмодуль PR (см., например, [8]). Рассмотрим правый идеал J кольца A , состоящий из матриц вида

$$J = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$JR = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2\mathbb{Z}_p & p^2\mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что правый идеал J неразложим как правый модуль и не является проективным, так как содержит ровно два максимальных подмодуля:

$$\begin{pmatrix} p^2\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_p & p^2\mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

– пересечение которых совпадает с JR .

2. В статье [2] мы даем следующее определение кольца дистрибутивно модульного типа (д.м.т. кольца).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Кольцо A называется *кольцом дистрибутивно модульного типа* (д.м.т. кольцом), если каждый конечно представимый правый A -модуль является полудистрибутивным.

Отметим, что для нётеровых справа колец понятия конечно представимого правого модуля и понятие конечно порожденного правого модуля совпадают.

Поэтому в классе нётеровых справа колец задача описания колец, указанных в вопросе (В), т.е. задача об описании колец, над которыми все конечно порожденные правые модули полупервичные, совпадает с задачей описания д.м.т. колец.

Обозначим через R радикал Джекобсона кольца A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [2], [3]. Кольцо A называется *слабопервичным*, если произведение любых его двусторонних идеалов, которые не лежат в радикале Джекобсона R кольца A , отлично от нуля.

Следующая теорема дает характеристику слабопервичных полусовершенных колец.

ТЕОРЕМА 2.1 [2], [3]. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы полусовершенного кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов и $A_{ij} = e_i A e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Для того чтобы кольцо A было слабопервичным, необходимо и достаточно, чтобы A_{ij} было отлично от нуля для всех i, j .

Пользуясь хорошо известным фактом о сопряженности двух разложений $1 \in A$ в сумму локальных идемпотентов, указанных в формулировке теоремы 2.1 [9, гл. 3], можно сформулировать такое следствие из теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Полусовершенное кольцо A слабопервично тогда и только тогда, когда для любого локального идемпотента $e \in A$ множество eAe отлично от нуля.

Для краткости правым 2-кольцом будем называть кольцо, каждый правый идеал которого имеет две образующие.

ТЕОРЕМА 2.2 [2]. Колчан $Q(A)$ нётерова слабопервичного полусовершенного правого 2-кольца состоит не более чем из двух вершин. Если $Q(A)$ состоит из одной вершины, то в этой вершине не более двух петель (петля – это стрелка, начало и конец которой совпадают). Если $Q(A)$ является двухточечным колчаном, то из одной вершины в другую ведет ровно одна стрелка и в каждой вершине не более одной петли.

Через $M_n(B)$ обозначается кольцо всех квадратных матриц порядка n с элементами из кольца B .

ТЕОРЕМА 2.3 [2]. Всякое нётерово слабопервичное полусовершенное правое 2-кольцо A изоморфно кольцу $M_n(B)$, где B – либо локальное правое 2-кольцо, либо $B = P_1 \oplus P_2$, где $P_1 \neq P_2$ (P_1, P_2 – неразложимые проективные B -модули), и колчан $Q(B)$ – это двухточечный колчан, удовлетворяющий условиям теоремы 2.2.

Отметим, что кольцо B является приведенным, т.е. факторкольцо кольца B по его радикалу Джекобсона является прямым произведением тел.

Напомним, что *однорядным кольцом Кёте* мы называем цепное артиново кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [2]. Локальное нётерово кольцо дистрибутивно модульного типа является либо однорядным кольцом Кёте, либо дискретно нормированным кольцом. Такие кольца являются полусовершенными правыми 2-кольцами.

С учетом теоремы 2.3 и замечания 1 следующая теорема дает описание нётеровых полусовершенных правых 2-колец дистрибутивно модульного типа.

ТЕОРЕМА 2.4 [2]. Следующие условия равносильны для приведенного слабопервичного нётерова SPSPD-кольца A дистрибутивно модульного типа с двухточечным колчаном:

- 1) A – д.м.т. кольцо;
- 2) кольцо A является кольцом одного из следующих типов:
 - і) A – полуцепное кольцо;

- ii) $A = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & X \\ Y & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix}$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ – цепные нётеровы кольца, т.е. либо однорядные кольца Кёте, либо дискретно нормированные кольца, X и Y – цепные правые и цепные левые модули над кольцами $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ с необходимой стороны, $YX = R_2$, $R_2^2 = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$ и $YR_1 = R_2Y = 0$.

В статье [10] К. Фуллер ввел важное понятие бирядного артинова кольца и доказал, что всякое артиново кольцо дистрибутивно модульного типа является бирядным [11].

Полусовершенные бирядные кольца введены в [12]. Поскольку всякое артиново кольцо является полусовершенным, мы приведем определение полусовершенного бирядного кольца, которое в артиновом случае превращается в исходное определение К. Фуллера.

Неразложимый правый (левый) модуль M называется *бирядным*, если он дистрибутивен и содержит цепные модули K_1 и K_2 (возможно нулевые) такие, что $K_1 + K_2$ либо M , либо наибольший собственный подмодуль в M , а $K_1 \cap K_2$ либо нуль, либо наименьший подмодуль в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Полусовершенное кольцо A называется *бирядным*, если все правые и все левые неразложимые проективные модули над кольцом A бирядны.

В статье [13] доказано, что нётерово полусовершенное кольцо дистрибутивно модульного типа бирядно. В [2] описаны артиновы кольца дистрибутивно модульного типа, квадрат радикала которых равен нулю.

Отметим, что при исследовании полусовершенных бирядных колец и колец дистрибутивно модульного типа важную роль играет рассмотрение их колчанов (см. [2]–[5], [8], [12], [14], [15]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tuganbaev A. A. *Semidistributive Modules and Rings*: Kluwer Acad. Publ., 1998.
2. Данлыев Х. М., Кириченко В. В., Халецкая З. П., Яременко Ю. В. // *Алгебраические исследования*. К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. С. 5–32.
3. Данлыев Х. М., Кириченко В. В., Яременко Ю. В. // *Докл. НАН Украины*. 1996. Р. 7–9.
4. Кириченко В. В., Валио С., Яременко Ю. В. // *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*. К.: Ин-т математики НАН Украины, 1993. С. 438–456.
5. Кириченко В. В., Хибина М. А. // *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*. К.: Ин-т математики НАН Украины, 1993. С. 457–480.
6. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории*. Ч. 2. М.: Мир, 1979.
7. Завадский А. Г., Кириченко В. В. // *Записки науч. сем. ЛОМИ АН СССР*. 1976. Т. 57. С. 100–116.
8. Кириченко В. В. // *Матем. сб.* 1976. Т. 99. № 4. С. 559–581.
9. Ламбек И. *Кольца и модули*. М.: Мир, 1981.
10. Fuller K. R. // *Comm. Algebra*. 1977. № 5. Р. 997–1008.
11. Fuller K. R. // *Comm. Algebra*. 1980. № 8. Р. 635–661.
12. Кириченко В. В., Костюкевич П. П. // *Укр. матем. ж.* 1986. Т. 36. № 6. С. 719–725.
13. Yaremenko Yu. V. // *Math. Studii*. 1997. V. 8. № 1. Р. 3–10.
14. Кириченко В. В., Яременко Ю. В. // *Укр. матем. ж.* 1988. Т. 40. № 4. С. 435–440.
15. Kirichenko V. V. // *Analele Stiint.* V. 4. № 2. Constanca: Univ. Ovidius, 1996. Р. 89–97.

(В. В. Кириченко) Киевский университет им. Тараса Шевченко

Поступило

(Ю. В. Яременко) Кировоградский государственный университет им. В. Винниченко

15.02.2000