Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, О стартовом управлении системами с сосредоточенными параметрами, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 721–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:40:38

УДК 517.92

О СТАРТОВОМ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМАМИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов

В данной работе рассматривается задача о стартовом управлении в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены достаточные условия для разрешимости задачи в игровой постановке. Изучены структуры области управления игроков. Библиография: 3 названия.

1. Рассматривается однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = Az, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; A – постоянная квадратная матрица порядка n .

Пусть даны постоянная матрица B (порядка $r \times n$), число $T > 0$ и действительно-значная векторная функция

$$m(t) = (m_1(t), \dots, m_r(t))', \quad 0 \leq t \leq T$$

($'$ – знак транспонирования).

Задача стартового управления состоит в следующем (ср. [1], [2]). Найти начальный вектор $z^0 \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы для всех $t \in [0, T]$ имело место равенство

$$Bz(t) = m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $z(0) = z^0$.

Настоящая работа посвящена решению сформулированной выше задачи стартового управления. В следующем пункте формулируется основная задача работы и доказываются необходимый и достаточный признак ее разрешимости (теорема 1).

В третьем пункте рассматривается игровая задача, связанная с задачей стартового управления. Получено достаточное условие ее разрешимости (теорема 2). Далее изучается дискретный аналог модельной задачи о распространении тепла в стержне, выясняется структура множества управляемости R (утверждения 1, 2). Утверждение 3 полностью решает поставленную в п. 3 игровую задачу.

В случае, когда R содержит более одного элемента, решается экстремальная задача (см. (14)). В конце работы рассмотрены примеры, иллюстрирующие эффективность теоремы 2 (утверждение 4 и следствие).

2. Рассмотрим семейство

$$\Sigma = \{Be^{tA}a, 0 \leq t \leq T: a \in \mathbb{R}^n\}. \quad (3)$$

Ясно (см. [1]), что Σ – конечномерное пространство векторных аналитических функций, определенных на $[0, T]$.

Легко заметить, что для того чтобы задача стартового управления была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы $m(\cdot) \in \Sigma$.

Таким образом, задача стартового управления сводится к изучению структуры множества

$$R = \{z^0 \in \mathbb{R}^n: Be^{tA}z^0 = m(t), 0 \leq t \leq T\}, \quad (4)$$

в частности, его одноточечности. Если множество R содержит более одного элемента, то целесообразно ввести некоторый функционал, экстремум которого необходимо найти.

Введем в рассмотрение линейный оператор F , действующий из $\mathbb{R}^n$ в $C([0, T], \mathbb{R}^r)$ по правилу

$$Fz^0 = Be^{tA}z^0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Нетрудно заметить, что одноточечность множества R эквивалентна условию $\text{Ker } F = 0$. В то же время справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы $\text{Ker } F = \{0\}$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\text{rank } K = n,$$

где

$$K = \begin{bmatrix} B \\ BA \\ BA^2 \\ \dots \\ BA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $\text{Ker } F = \{0\}$, но $\text{rank } K < n$. Тогда между столбцами матрицы K существует линейная зависимость, т.е. существует ненулевой вектор $z^0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $Kz^0 = 0$. Отсюда следует, что

$$Bz^0 = 0, \quad BAz^0 = 0, \quad BA^2z^0 = 0, \quad \dots, \quad BA^{n-1}z^0 = 0.$$

По известной теореме Гамильтона–Кэли

$$A^n = \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I, \quad (6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа.

Следовательно,

$$BA^n z^0 = \alpha_1 BA^{n-1} z^0 + \alpha_2 BA^{n-2} z^0 + \dots + \alpha_n Bz^0 = 0.$$

Из (6) легко вывести, что для всех $s = n + 1, n + 2, \dots$

$$BA^s z^0 = 0.$$

Значит,

$$Be^{tA}z^0 = B\left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots\right)z^0 = 0$$

для каждого $t \in [0, T]$. Из этого тождества вытекает включение $z^0 \in \text{Ker } F$, противоречащее условию $\text{Ker } F = \{0\}$.

Необходимость. Пусть $\text{rank } K = n$, но ядро оператора F содержит ненулевой вектор z^0 . Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$Be^{tA}z^0 \equiv 0. \quad (7)$$

При $t = 0$ имеем $Bz^0 = 0$. Дифференцируя тождество (7) и положив $t = 0$, получим равенства $BAz^0 = 0$, $BA^2z^0 = 0$, $\dots$, $BA^{n-1}z^0 = 0$.

Следовательно, между столбцами матрицы K существует линейная зависимость, означающая, что ранг матрицы K меньше n . Мы пришли к противоречию, ибо по предположению $\text{rank } K = n$. Теорема доказана.

3. Разобьем множество компонент начальных векторов $z^0 \in \mathbb{R}^n$ на две части, для простоты положив

$$z^0 = (x^0, y^0), \quad x^0 \in \mathbb{R}^q, \quad y^0 \in \mathbb{R}^{q'}, \quad q + q' = n, \quad q \geq 1, \quad q' \geq 1. \quad (8)$$

Предположим, что выбором вектора x^0 распоряжается игрок I (преследователь), выбором вектора y^0 – игрок II (преследуемый, убегающий).

Задача игрока I: путем выбора x^0 добиться выполнения равенства (2).

Задача игрока II: путем выбора y^0 помешать выполнению этого равенства. При выборе x^0 , y^0 игроки располагают различной информацией. Ниже уточняется, какой информацией пользуются игроки при решении своих задач.

Пусть

$$Q = \{y^0 \in \mathbb{R}^{q'} : \exists x^0 \in \mathbb{R}^q, z^0 = (x^0, y^0) \in R\}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. 1) Допустим, что существует вектор $x^0 \in \mathbb{R}^q$ такой, что $\{x^0\} \times \mathbb{R}^{q'} = R$. Тогда, независимо от порядка выбора векторов x^0 и y^0 игроками I и II соответственно, выигрывает игрок I.

2) Предположим, что $Q \neq \mathbb{R}^{q'}$. Тогда, независимо от порядка ходов, выигрывает игрок II.

3) Пусть $Q = \mathbb{R}^{q'}$, но $\{x^0\} \times \mathbb{R}^{q'} = R$ для произвольной точки x^0 . Тогда, если первым делает выбор игрок I, а вторым, зная этот выбор – II, то выигрывает игрок II, а если первым делает выбор игрок II, а вторым, зная этот выбор, – I, то выигрывает игрок I (выигрыш игрока – достижение своей цели).

Приведем основные этапы ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. 1) Игроку I достаточно выбрать x^0 . Тогда для любого вектора $y^0 \in \mathbb{R}^{q'}$ имеем $z^0 = (x^0, y^0) \in R$.

2) Так как по условию проекция Q множества R на пространства $\mathbb{R}^{q'}$ не совпадает с $\mathbb{R}^{q'}$, найдется $y^0 \in \mathbb{R}^{q'} \setminus Q$ такой, что для произвольного вектора $x^0 \in \mathbb{R}^q$ имеем $z^0 = (x^0, y^0) \notin R$.

3) Пусть x^0 – произвольный вектор, выбранный игроком I. По условию множество $\{x^0\} \times \mathbb{R}^{q'} \in R$. Поэтому найдется вектор $y^0 \in \mathbb{R}^{q'}$ такой, что $z^0 = (x^0, y^0) \in R$. Значит, для достижения своей цели игроку II достаточно, зная x^0 , выбрать y^0 .

Достаточность. Пусть $(i_1, \dots, i_s, n+1) = 1$, но R содержит не менее двух элементов. Через $z'(t)$, $z''(t)$, $0 \leq t \leq T$, обозначим решения системы (1), соответствующие двум различным элементам множества R (заметим, по определению R в (4) $z'_{i_j}(t) = z''_{i_j}(t) = m_j(t)$, $0 \leq t \leq T$, $j = 1, \dots, s$).

Введем следующие обозначения:

$$i_0 = 0, \quad i_{s+1} = n+1, \quad v(t) = z'(t) - z''(t), \quad v_{i_0}(t) = v_{i_{s+1}}(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Очевидно, имеем $v_i(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $i = i_1, \dots, i_s$.

1) Пусть $n_1 = \min |i_j - i_k| = |i' - i''|$, где минимум берется по всем j, k таким, что $j \neq k$, $j, k = 0, 1, \dots, s+1$.

Используя уравнение (1), можно убедиться, что $v_{i+k n_1}(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, 2, \dots$, но множество этих индексов $\{i' + k n_1\}$ не может содержать индексы $i_0, \dots, i_{s+1}$ (естественно, здесь предполагается, что $n_1 > 1$), иначе $(i_1, \dots, i_{s+1}, n+1) = n_1$ — противоречие.

Переобозначим через $i_0, \dots, i_{s_1+1}$ все индексы i , для которых $v_i(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$.

2) Пусть $n_2 = \min |i_j - i_k| = |j' - j''|$, где минимум берется по всем j, k : $j \neq k$, $j, k = 0, 1, \dots, s_1+1$. Опять же, используя уравнение (1), можно убедиться, что $v_{j'+k n_2}(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, 2, \dots$, но эти новые индексы $(j' + k n_2)$ не могут совпасть со всеми индексами $i_0, \dots, i_{s_1+1}$ (при $n_2 > 1$), иначе $(i_1, \dots, i_s, n+1) = n_2$.

Заметив очевидное неравенство $n_2 < n_1$ и продолжив этот процесс, убедимся, что на каждом шаге итерации множество индексов вида $\{i_j\}$ увеличивается по крайней мере на один элемент. Поэтому через конечное число шагов получается, что $v_i(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $i = 1, \dots, n$, а это противоречит неединственности R . Утверждение 1 доказано.

Теперь займемся изучением структуры множества R . Пусть R состоит из единственного элемента. Как найти этот элемент, зная функции $m_1(\cdot), \dots, m_s(\cdot)$?

Допустим, что известно решение $z = z(t)$, $0 \leq t \leq T$, уравнения (1), соответствующее этому элементу ($z_{i_j}(t) = m_j(t)$, $0 \leq t \leq T$, $j = 1, \dots, s$). Подставив это решение в (1), имеем тождество; не нарушая общности, примем $i_1 < (n+1)/2$. Тогда имеем

$$z_{i_1-1}(t) + z_{i_1+1}(t) = \dot{m}_1(t) + 2m(t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Аналогично,

$$z_{i_1-2}(t) + z_{i_1+2}(t) = \dot{\psi}_1(t) + 2\psi_1(t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Продолжив этот процесс, приходим к следующему соотношению:

$$z_0(t) + z_{2i_1}(t) = \dot{\psi}_{i_1-1} + 2\psi_{i_1-1}(t) = \psi_{i_1}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Отсюда

$$z_{2i_1}(t) = \psi_{i_1}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Аналогично, повторив описанную процедуру, имеем

$$z_{k i_1}(t) = \psi_{(k-1)i_1}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots.$$

Отметим, что $\psi_j(\cdot)$ – известные функции, выражаемые с помощью функции $m_{i_1}(\cdot)$ и ее производных. В силу того, что числа ki_1 , $k = 0, 1, \dots$, не могут совпасть со всеми числами $i_0, i_1, \dots, i_{s+1}$ одновременно, и используя рассуждения, которые были применены при доказательстве достаточности утверждения 1, имеем

$$z_i(t) = \psi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда получаем, что

$$(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0)) \quad (11)$$

– единственный элемент множества R .

Пусть теперь множество R содержит более одного элемента. Тогда из утверждения 1 следует, что $(i_1, \dots, i_s, n+1) = p > 1$ и имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Множество R состоит из векторов, разность любых двух из которых имеет вид*

$$(a_1, \dots, a_{p-1}, 0, -a_{p-1}, \dots, -a_1, 0, a_1, \dots, a_{p-1}, 0, \dots), \quad (12)$$

где a_i , $i = 1, \dots, p-1$, – действительные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z'(t), z''(t)$, $0 \leq t \leq T$, – два решения уравнения (1), соответствующие двум различным элементам множества R . Если положить $\varphi(t) = z'(t) - z''(t)$, $0 \leq t \leq T$, то после подстановки в (1) легко убедиться, что $\varphi_{kp}(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, \dots$. Кроме того, функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_{p-1}(t)$, $0 \leq t \leq T$, являются решением системы (10) и удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) &= -\varphi_{2p-i}(t) = \varphi_{2p+i}(t) = \dots = -\varphi_{(q-1)p-i}(t) \\ &= \varphi_{(q-1)p+i}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, p-1, \end{aligned} \quad (13)$$

где $qp = n+1$, и ограничиваемся случаем, когда q – нечетное число (противоположный случай рассматривается аналогично).

Из равенства (13) при $t = 0$ следует, что любые два элемента множества R отличаются друг от друга на элемент вида (12). Это и рассуждения, использованные при доказательстве необходимости утверждения 1, доказывают утверждение 2.

Теперь займемся решением следующей задачи: найти

$$\min \|a\| = \|a^0\|, \quad a \in R, \quad (14)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Если R содержит единственный элемент, то поставленная задача решается очевидным образом: $a_1^0 = \psi_1(0), \dots, a_n^0 = \psi_n(0)$ (см. (11)). Поэтому изучим случай, когда R содержит более одного элемента. Без доказательства приводим следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Решением задачи (14) является

$$\begin{aligned} a_{kp-j}^0 &= \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+1} i \psi_{(j-1)(q-1)+i} \right) + \sum_{i=k}^{q-1} (-1)^i \psi_{(j-1)(q-1)+i}, \\ k &= 2, 4, \dots, q-1, \quad j = 1, 2, \dots, p-1; \\ a_{kp+j}^0 &= \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+1} i \psi_{(j-1)(q-1)+i} \right) + \sum_{i=k+1}^{q-1} (-1)^{i+1} \psi_{(j-1)(q-1)+i}, \\ k &= 0, 2, 4, \dots, q-1, \quad j = 1, 2, \dots, p-1; \\ a_{kp}^0 &= \psi_{(q-1)(p-1)+k}, \quad k = 1, 2, \dots, q-1, \end{aligned}$$

где числа ψ_i , $i = 1, 2, \dots, (q-1)p$, находятся с помощью функций $m_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, s$, и их производных.

Теперь, разбив управляющий параметр на две части, рассмотрим игровую задачу. При этом в зависимости от разбиения возникают разные ситуации, рассмотренные в теореме 2.

а) Если множество R состоит из единственного элемента (см. утверждение 1), то выполнено условие 2) теоремы 2. Значит, независимо от порядка ходов выигрывает игрок II.

б) Пусть множество R содержит более одного элемента (см. утверждение 2).

Если игрок II управляет компонентами вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in R$ с соответствующими индексами, каждый из которых принадлежит множествам

$$R_j = \{j, 2p-j, 2p+j, \dots, (q-1)p-j, (q-1)p+j\}, \quad j = 1, \dots, p-1,$$

(игрок I управляет остальными компонентами), то выполнено условие 3) теоремы 2.

в) Если игрок II управляет компонентами с соответствующими индексами, по меньшей мере два из которых принадлежат одному из множеств R_j , $j = 1, \dots, p-1$, то выполнено условие 2) теоремы 2.

5. Примеры. Пусть уравнение (1) имеет вид (ср. [1])

$$\dot{z}_1 = z_2 + z_3, \quad \dot{z}_2 = -az_2, \quad \dot{z}_3 = -bz_3, \quad (15)$$

где $z_i \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $i = 1, 2, 3$; a, b – константы.

Пусть

$$B = (\tilde{I}, \tilde{0}, \tilde{0}), \quad (16)$$

где $\tilde{I}$ – единичная квадратная матрица порядка n , $\tilde{0}$ – нулевая квадратная матрица порядка n . Число T считаем произвольным положительным, функцию $m(t)$, $0 \leq t \leq T$, – принадлежащей семейству Σ (см. (3)).

Элементарные вычисления показывают (мы их опускаем), что

$$Bz(t) = z_{10} + e_1(t)z_{20} + f_1(t)z_{30}, \quad (17)$$

где

$$(z_{10}, z_{20}, z_{30}) = z^0, \quad e_1(t) = \int_0^t e^{-as} ds, \quad f_1(t) = \int_0^t e^{-bs} ds.$$

Придавая векторам z_{10}, z_{20}, z_{30} всевозможные значения, мы получим семейство Σ . Ясно, что каждая компонента каждого элемента Σ есть линейная комбинация константы 1, функций $e_1(\cdot)$ и $f_1(\cdot)$. Следовательно, и каждая компонента функции $m(\cdot)$ должна представлять одну из таких комбинаций. Если это условие выполнено, то задача стартового управления, очевидно, разрешима для произвольной тройки $\{B, T, m(\cdot)\}$.

Далее, ясно, что начальный вектор z^0 , решающий эту задачу (при фиксированных B, T и $m(\cdot)$), определяется однозначно. Следовательно, при любом порядке ходов выигрывает игрок II.

Пусть теперь в уравнении (1) $n = 2$, $B = (1, 0)$, T — произвольное положительное число, $m(\cdot)$ — произвольный элемент Σ . Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. 1) Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $a_{12} \neq 0$. Тогда множество R (см. (4)) состоит из единственного элемента.

2) Если $a_{12} = 0$, то множество $R = \{m(0)\} \times \mathbb{R}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $z_1(t) = m(t)$, $0 \leq t \leq T$, то $\dot{m}(t) = a_{11}m(t) + a_{12}z_2(t)$ на $[0, T]$. Следовательно, $z_2(t) = (a_{12})^{-1}[\dot{m}(t) - a_{11}m(t)]$ на $[0, T]$, т.е. компонента $z_2(t)$ решения $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, для которого $z_1(t) = m(t)$, $0 \leq t \leq T$, определяется однозначно. Также однозначно определяется $z_2(0) = (a_{12})^{-1}[\dot{m}(0) - a_{11}m(0)]$. Так как и $z_1(0) = m(0)$ определяется однозначно числом $m(0)$, начальный вектор $z^0 = (z_{10}, z_{20})$ по функции $m(\cdot)$ определяется однозначно. Значит, R — одноэлементное множество.

2) Пусть теперь $a_{12} = 0$. Тогда $\dot{m}(t) = a_{11}m(t)$ и $m(t) = m(0)e^{a_{11}t}$, $0 \leq t \leq T$. После подстановки функции $m(\cdot)$ в уравнение $\dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2$ получим неоднородное уравнение $\dot{z}_2 = a_{22}z_2 + a_{21}m(t)$, которое, очевидно, имеет бесконечное число решений, однозначно определяемых начальными значениями z_{20} решения $z_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, этого уравнения. Следовательно, $R = \{m(0)\} \times \mathbb{R}^1$.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Если $a_{12} \neq 0$, то независимо от порядка ходов выигрывает игрок II (теорема 2).

2) Если $a_{12} = 0$, то независимо от порядка ходов выигрывает игрок I (теорема 2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. II. М.: Наука, 1988.
- [2] Авдонин С. А., Иванов С. А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМК ВО, 1989.
- [3] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Национальный университет республики Узбекистан, г. Ташкент

Поступило

20.06.2001

Исправленный вариант

13.03.2003