Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, М. И. Карлов, Множества с внешним чебышевским слоем, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 303–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:01:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

МНОЖЕСТВА С ВНЕШНИМ ЧЕБЫШЕВСКИМ СЛОЕМ

А. Р. Алимов, М. И. Карлов

Введение. Пусть X – действительное банахово пространство. Для непустого множества $M \subset X$ отображение $P_M: X \rightarrow 2^M$, определяемое как

$$P_M x := \left\{ y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M) := \inf_{z \in M} \|x - z\| \right\}, \quad x \in X,$$

называется *метрической проекцией* на множество M ; множество

$$T(M) := \{x \in X \mid \#P_M x = 1\}$$

называется *множеством точек существования и единственности* для M [1].

Множества M , обладающие свойством $T(M) = X$, называются *чебышевскими*. Структура таких множеств активно изучалась многими авторами (см. обзоры [1], [2]). В ряде работ [3]–[8] рассматривался случай $\{x \in X \mid \rho(x, M) < a\} \subset T(M)$ для некоторого $a > 0$. Множества такого вида называются *множествами с чебышевским слоем величины a* (в англоязычной литературе множества с чебышевским слоем называются “sets of positive reach”).

В этой работе мы исследуем множества M со свойством

$$\{x \in X \mid \rho(x, M) > a\} \subset T(M) \quad \text{для некоторого } a \geq 0,$$

которые будем называть *множествами с внешним чебышевским слоем величины a* . Не сложно заметить, что каждое множество M , которое можно представить в виде $M = N \setminus C$, где N – чебышевское множество, $C \subset \text{int } N$, $\sup_{x \in C} \rho(x, \text{bd } C) \leq a$ для некоторого $a \geq 0$, является множеством с внешним чебышевским слоем величины a (здесь $\text{int } N$ – внутренность множества N , $\text{bd } C$ – граница C). Множества M такого вида назовем *a -червявыми чебышевскими множествами*.

В теореме 1 доказывается, что в произвольных конечномерных банаховых пространствах для любого $a \geq 0$ классы замкнутых множеств с внешним чебышевским слоем величины a и замкнутых a -червявых чебышевских множеств совпадают. В теореме 2 устанавливается, что в строго выпуклых конечномерных банаховых пространствах для каждого $a \geq 0$ совпадают классы уже произвольных множеств с внешним чебышевским слоем величины a и произвольных a -червявых чебышевских множеств. Пример 1 показывает существенность ограничений на множество и на пространство в теоремах 1 и 2 соответственно.

1. Замкнутые множества с внешним чебышевским слоем. В этом пункте доказывается следующая

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00212, работа второго автора – при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00378.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\dim X < \infty$, $a \geq 0$, множество $M \subset X$ замкнуто. Тогда M имеет внешний чебышевский слой величины a в том и только в том случае, когда M является a -червявым чебышевским множеством.

Напомним, что пространство X называется *строго выпуклым* (обозначение $X \in (R)$), если его единичная сфера $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ не содержит отрезков [1].

Для доказательства теоремы потребуются следующие известные утверждения [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Пусть $M \subset X$ непустое множество. Тогда для любых $x, x' \in X$ выполнено неравенство

$$|\rho(x, M) - \rho(x', M)| \leq \|x - x'\|.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ II. Пусть $M \subset X$ – непустое множество, $x \in X$, $y \in P_M x$, $z \in [y, x]$. Тогда $y \in P_M z$. (Если, кроме того, $X \in (R)$, то $P_M z = \{y\}$.)

Приведем некоторые используемые в дальнейшем обозначения.

Если $x, y \in X$, то $[\overrightarrow{y, x}] := \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ обозначает луч (возможно вырожденный в точку) с началом в точке y , проходящий через x .

Для $x \in X$ и $r > 0$ будем через $B(x, r)$ обозначать замкнутый шар с центром x радиуса r .

Для непустого множества $M \subset X$ и $a \geq 0$ обозначим

$$F_a(M) := \{x \in X \mid \rho(x, M) > a\}.$$

Пусть $M, G \subset X$. Множество M называется *солнцем относительно G* , если для любой точки $x \in G$ найдется точка $y \in P_M x$, удовлетворяющая условию $y \in P_M z$ для любых $z \in [\overrightarrow{y, x}] \cap G$ таких, что $[z, x] \subset G$ (в случае $G = X$ определение солнца относительно G превращается в классическое определение солнца [1]).

В работе Власова [9, теорема 5] фактически содержится доказательство следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ III. Пусть $\dim X < \infty$, $M \subset X$, множество $G \subset T(M)$ открыто, и пусть функция P_M непрерывна на G . Тогда M – солнце относительно G .

ЛЕММА 1. Пусть $\dim X < \infty$, множество $M \subset X$ замкнуто, $G \subset T(M)$. Тогда метрическая проекция P_M непрерывна на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть P_M разрывна в некоторой $x \in G$, т.е. найдется число $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$, $x_n \rightarrow x$, такие, что $\|y_n - y\| \geq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $P_M x_n = \{y_n\}$, $P_M x = \{y\}$ (можем считать, что $x \neq y$). В силу утверждения I последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Пусть $\hat{y}$ – предельная точка $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ясно, что $\hat{y} \neq y$. Из утверждения I также следует, что

$$\|x - \hat{y}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \rho(x, M).$$

Так как M замкнуто, то $\hat{y} \in M$, т.е. $y, \hat{y} \in P_M x$, что противоречит включению $x \in T(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что M имеет внешний чебышевский слой величины $a \geq 0$. Из утверждения I следует, что $F_a(M)$ – открытое множество и $\text{bd}(F_a(M)) \subset \{x \in X \mid \rho(x, M) = a\}$. Для любой точки $x \in F_a(M)$ положим

$$\ell(x) := [\overrightarrow{y, x}], \quad \ell(x) := \ell(x) \setminus \{y\}, \quad \ell_{>}(x) := \ell(x) \setminus [y, x], \quad \text{где } P_M x = \{y\}.$$

Докажем, что для каждого $x \in F_a(M)$ выполнено

$$P_M(x') = P_M x \quad \text{для всех } x' \in \ell_{>}(x). \quad (1)$$

Согласно утверждению III и лемме 1 M – солнце относительно $F_a(M)$. Поэтому для доказательства (1) достаточно показать, что $\ell_{>}(x) \subset F_a(M)$ для каждого $x \in F_a(M)$. Предположим, что $\ell_{>}(x_0) \setminus F_a(M) \neq \emptyset$ для некоторого $x_0 \in F_a(M)$. Тогда можно выбрать точку $z \in \ell_{>}(x_0)$ таким образом, что $[x_0, z] \subset F_a(M)$, $z \notin F_a(M)$. Следовательно, $\rho(z, M) = a$. Поэтому согласно

утверждению I $\rho(\xi, M) < \rho(x_0, M)$ для некоторого $\xi \in (x_0, z)$. Но это невозможно, так как M — солнце относительно $F_a(M)$ и, значит,

$$\rho(\xi, M) = \|\xi - y_0\| = \|\xi - x_0\| + \|x_0 - y_0\| > \|x_0 - y_0\| = \rho(x_0, M)$$

(где $P_M x_0 = \{y_0\}$).

Рассмотрим множество

$$G = \bigcup_{x \in F_a(M)} \dot{\ell}(x)$$

и покажем, что $G \subset T(M)$. Пусть $\xi \in G$, т.е. $\xi \in \dot{\ell}(x)$ для некоторой $x \in F_a(M)$. Если $\xi \in \ell_{>}(x)$, то $\xi \in T(M)$ согласно (1). Пусть $\xi \in [x, y)$ (где $P_M x = \{y\}$). Тогда $y \in P_M \xi$ по утверждению II. С другой стороны, если $y' \in P_M \xi$, то из неравенства треугольника

$$\|x - y'\| \leq \|x - \xi\| + \|\xi - y'\| = \|x - \xi\| + \|\xi - y\| = \|x - y\| = \rho(x, M),$$

т.е. $y' = y$ в силу того, что $x \in F_a(M) \subset T(M)$.

Покажем, что для любой точки $z \in \overline{G}$ найдется элемент $x \in F_a(M)$ такой, что $z \in [x, y]$, где $P_M x = \{y\}$. Выберем последовательность $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ такую, что $\xi_n \rightarrow z$. Пусть $\xi_n \in \dot{\ell}(x_n)$, где $x_n \in F_a(M)$, $P_M x_n = \{y_n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можем считать, что точки x_n выбраны так, что $\|x_n - y_n\| = 2a + \|\xi_n - y_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Для всех $n \in \mathbb{N}$ согласно утверждению I выполнено неравенство $\|\xi_n - y_n\| \leq \|z - \xi_n\| + \rho(z, M)$, т.е. последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ также ограничена. Пусть x и y — предельные точки последовательностей $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ соответственно. Без ограничения общности можем считать, что $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Из утверждения I имеем

$$\rho(x, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \geq 2a,$$

т.е. $x \in F_a(M)$. По лемме 1 P_M непрерывна в x , поэтому $P_M x = \{y\}$. (Из построения точек x и y видно, что $z \in [x, y]$.)

Докажем, что

$$\text{bd } G \subset \text{bd } M. \quad (2)$$

Выберем $z \in \overline{G}$. Пусть $\rho(z, M) = 0$. Из определения G видно, что $\overline{G} \cap \text{int } M = \emptyset$. Поэтому $z \in \text{bd } M$. Предположим теперь, что $\rho(z, M) > 0$. Для доказательства (2) достаточно показать, что $z \in \text{int } G$. Если $\rho(z, M) > a$, то $z \in F_a(M) \subset \text{int } G$. Поэтому считаем, что $0 < \rho(z, M) \leq a$.

Пусть $z \in (x, y)$, где $x \in F_a(M)$, $P_M x = \{y\}$, и пусть $\|x - z\| = c > 0$, $\|z - y\| = b > 0$. Выберем $0 < \varepsilon < b$ так, что $B(x, \varepsilon) \subset F_a(M)$. Определим отображение $f: B(x, \varepsilon) \rightarrow X$ следующим образом:

$$f(x') = x' + 2a \frac{y' - x'}{\|y' - x'\|}, \quad x' \in B(x, \varepsilon), \quad P_M x' = \{y'\}.$$

По лемме 1 метрическая проекция P_M непрерывна в $B(x, \varepsilon)$, поэтому отображение f также непрерывно. Пусть $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon)$, $x_1 \neq x_2$, $P_M x_i = \{y_i\}$, $f(x_i) = z_i$, $i = 1, 2$. Если $x_2 \in \dot{\ell}(x_1)$, то $y_1 = y_2$ и, следовательно, $z_1 \neq z_2$. Пусть $x_2 \notin \dot{\ell}(x_1)$. Предположим, что $z_1 = z_2$. Тогда $z_2 = \ell(x_1) \cap \ell(x_2)$ и, значит, $y_1 \neq y_2$. Отсюда в силу утверждения II $P_M z_2$ содержит не менее двух точек, что противоречит $z_2 \in G \subset T(M)$. Поэтому f взаимно однозначно и непрерывно отображает $B(x, \varepsilon)$ на его образ W . А так как $B(x, \varepsilon)$ — компакт, то W гомеоморфен $B(x, \varepsilon)$. Поэтому $z = f(x) \in \text{int } W \subset \text{int } G$.

Рассмотрим множество $N = X \setminus G$. Так как $G \subset X \setminus M$, то

$$M \subset N. \quad (3)$$

Из (2) имеем

$$\text{bd } N = \text{bd } G \subset \text{bd } M. \quad (4)$$

Докажем, что N – чебышевское множество. Пусть $x \notin N$. Тогда согласно (3) $x \notin M$. Значит, $P_N x = P_{\text{bd } N} x$, $P_M x = P_{\text{bd } M} x$. Отсюда, используя (3) и (4), получаем, что $P_N x = P_M x$, т.е. $P_N x$ одноточечно, так как $x \in G \subset T(M)$.

Пусть $z \in \text{bd } N$. Тогда $z \in \bar{G}$. Следовательно, $z \in [x, y]$ для некоторых $x \in F_a(M)$, $P_M x = \{y\}$. Значит, $P_M z$ одноточечно. Из (4) получаем, что $z \in \text{bd } M$. Поэтому $P_M z = \{z\}$, т.е. $z \in M$. Значит, для множества $C = N \setminus M$ выполнено $C \subset \text{int } N$.

Если $\sup_{x \in C} \rho(x, \text{bd } C) > a$, то $C \cap F_a(M) \neq \emptyset$. Следовательно, $C \cap G \neq \emptyset$, поскольку $F_a(M) \subset G$. Но $C \subset \text{int } N$, т.е. $C \subset N = X \setminus G$, что противоречит $C \cap G \neq \emptyset$. Поэтому M – a -червявое чебышевское множество.

2. Множества с внешним чебышевским слоем в строго выпуклых пространствах. В этом пункте показывается, что в теореме 1 при усилении требований на геометрию пространства X можно отказаться от условия замкнутости множества M (теорема 2). Пример 1 показывает, что ограничения на структуру пространства X в теореме 2 и на свойства множества M в теореме 1 являются существенными.

Напомним, что (R) обозначает класс всех строго выпуклых пространств.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\dim X < \infty$, $X \in (R)$, $a \geq 0$, $M \subset X$. Тогда M имеет внешний чебышевский слой величины a в том и только том случае, когда M является a -червявым чебышевским множеством.

ЛЕММА 2. Пусть $\dim X < \infty$, $X \in (R)$, $M \subset X$, множество $G \subset T(M)$ открыто. Тогда проекция P_M непрерывна на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть P_M разрывна в некоторой $x \in G$. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 1, можно показать, что $\|x - \hat{y}\| = \rho(x, M)$ для некоторой $\hat{y} \neq y$, где $P_M x = \{y\}$. Тогда $\hat{y} \in P_N x$, где $N = M \cup \{\hat{y}\}$. На интервале $(x, \hat{y})$ выберем точку $z \in G$. Согласно утверждению II $P_N z = \{\hat{y}\}$. Поэтому $P_M z = \emptyset$, что противоречит условию леммы.

С учетом леммы 2 доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Пусть X – двумерное банахово пространство с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, $x = (x_1, x_2) \in X$ (ясно, что $X \notin (R)$), и пусть $M = M_1 \cup M_2$, где $M_1 = \{x = (x_1, x_2) \in X \mid x_1 < 0, x_1 \leq x_2 \leq -x_1\}$, $M_2 = \{(1, 0)\} \subset X$ (ясно, что M незамкнуто) (см. рис. 1). Тогда множество M для любого $a \geq 1/2$ имеет внешний чебышевский слой величины a , однако не является a -червявым чебышевским множеством ни для какого $0 \leq a < +\infty$.

Действительно, нетрудно проверить, что для любого $x = (x_1, x_2) \in X$

$$P_M x = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } 0 \leq x_1 < \frac{1}{2}, -x_1 \leq x_2 \leq x_1; \\ M_2, & \text{если } x_1 \geq \frac{1}{2}, -x_1 \leq x_2 \leq x_1; \\ \{x\}, & \text{если } x \in M_1; \\ \left\{ \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} \right) \right\}, & \text{если } x_2 > |x_1|; \\ \left\{ \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right\}, & \text{если } x_2 < -|x_1|. \end{cases}$$

Таким образом, $X \setminus U \subset T(M)$, где $U = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 < 1/2, -x_1 \leq x_2 \leq x_1\} \subset \{x \in X \mid \rho(x, M) \leq 1/2\}$, т.е. M имеет внешний чебышевский слой величины $1/2$. Предположим, что M можно представить в виде $M = N \setminus C$, где N – чебышевское множество, $C \subset \text{int } N$, $\sup_{x \in C} \rho(x, \text{bd } C) \leq a$ для некоторого $0 \leq a < +\infty$. Ясно, что тогда $\text{bd } N \subset \text{bd } M$. Следовательно, связное множество $L = X \setminus M$ разбивается на два непересекающихся открытых (в топологии L) подмножества $\text{int } N \cap L$ и $(X \setminus \bar{N}) \cap L = X \setminus \bar{N}$. Поскольку $\bar{N} \neq X$, то $(X \setminus \bar{N}) \cap L \neq \emptyset$ и, значит, $\text{int } N \cap L = \emptyset$. Следовательно, $\text{bd } N \cap \text{int } L = \emptyset$. Отсюда $N \subset \bar{M}$. Учитывая вложение $M \subset N$, получаем,

Рис. 1

что $N = M$ либо $N = \overline{M}$ (так как M и $\overline{M}$ отличаются только на одну точку). В обоих случаях N , вопреки предположению, не является чебышевским множеством. Полученное противоречие показывает, что M не является a -червивым чебышевским множеством ни для какого $0 \leq a < +\infty$.

Работа была написана во время пребывания первого автора в Математическом институте Университета Эрланген–Нюрнберг. Первый автор выражает благодарность этому институту за гостеприимство и Правительству Баварии за финансовую поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов Л. П. // УМН. 1973. Т. 28. № 6 (174). С. 3–66.
2. Балаганский В. С., Власов Л. П. // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 125–188.
3. Rice J. Approximation of Functions. V. 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.
4. Fu H. J. G. // Duke Math. J. 1985. V. 52. № 4. P. 1025–1046.
5. Federer H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 93. № 3. P. 418–491.
6. Chui C. K., Smith P. W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 49. P. 66–70.
7. Abatzoglou T. // Pacific J. Math. 1980. V. 87. № 2. P. 233–244.
8. Карлов М. И. // Материалы Международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. Т. 1. М.: Изд. мех.-мат. фак-та МГУ, 1996. С. 184–185.
9. Власов Л. П. // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 6. С. 265–272.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: alimov@shade.msu.ru

Поступило
29.12.1997
Исправленный вариант
17.03.2000