Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Бучаев, О базисности производных цепочек собственных функций некоторых краевых задач, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 308–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:32:50

О БАЗИСНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕПОЧЕК СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Я. Г. Бучаев

Рассмотрим краевую задачу

$$l(y, \lambda) = \lambda^n y + \lambda^{n-1} l_1(y) + \dots + l_n(y) = 0, \quad (1)$$

$$U_j(y, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda) y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda) y^{(k)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

здесь

$$l_s(y) = \sum_{\nu=0}^s p_{\nu s}(x) y^{(\nu)}, \quad p_{ss} = \text{const}, \quad p_{nn} \neq 0,$$

$a_{jk}(\lambda), b_{jk}(\lambda)$ – произвольные полиномы от λ , где λ – спектральный параметр.

В работе Шкаликова [1] определены различные классы задач вида (1), (2) (нормальные, почти нормальные и регулярные), построены пространства $W_{2,U}^r$, в которых эти задачи допускают естественную линейаризацию, и доказаны теоремы о полноте, разложении и базисности собственных функций операторов-линеаризаторов в этих пространствах. Доказательство L_p -аналогов результатов о базисности [1] является нетривиальной задачей и составляет основную цель настоящей работы. По аналогии с [1] мы конструируем пространства $W_{p,U}^r$, $p > 1$, в которых задача (1), (2) допускает линейаризацию, и доказываем, что в случае усиленно регулярной задачи при дополнительном условии правильной асимптотики собственных значений собственные функции оператора-линеаризатора задачи образуют базис Шаудера в $W_{p,U}^r$. В случае $p = 2$ в [1] теорема о базисности получена без дополнительного условия правильной асимптотики собственных значений (или соизмеримости определяющих точек квазиполинома, отвечающего характеристическому определителю задачи). Но при $p \neq 2$ в нашем методе доказательства это условие существенно используется. В работе [1] предшествовали результаты многих авторов (подробную библиографию см. в [1]). Отметим, что в случае обыкновенного дифференциального оператора L_p -базисность доказана Гомилко и Радзиевским [2].

Назовем число κ_j *порядком* краевого условия $U_j(y, \lambda) = 0$ вида (2), если линейная форма $U_j(y, \lambda)$ содержит переменные $\lambda^\nu y^{(k)}(0)$ или $\lambda^\nu y^{(k)}(1)$ при $\nu + k = \kappa_j$ и не содержит таких переменных при $\nu + k > \kappa_j$. Число $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ назовем *суммарным порядком* краевых условий (2). Будем называть краевые условия *нормированными*, если любые n краевых условий, им эквивалентных, т.е. полученных из (2) линейными комбинациями, имеют не меньший суммарный порядок. Далее считаем, что краевые условия (2) нормированы, причем $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$.

Для удобства предположим, что коэффициенты $p_{\nu s}(x)$ в уравнении (1) суть бесконечно дифференцируемые функции. Рассмотрим характеристическое уравнение для уравнения (1)

$$\omega^n + p_{11}\omega^{n-1} + \dots + p_{n-1}n - 1\omega + p_{nn} = 0$$

и обозначим через $\omega_1, \dots, \omega_n$ его корни. Положим

$$\mu_{jk} = \sum_{\alpha \in j_k} \omega_\alpha,$$

где j_k , $k = 1, \dots, n$, – произвольный набор из k различных натуральных чисел, изменяющихся от 1 до n . При $k = 0$ положим $\mu_{jk} = 0$. Пусть корни характеристического уравнения простые. Тогда комплексную плоскость можно разбить на конечное число секторов $S_1, \dots, S_{2n}$, $h \leq 2n$, в каждом из которых уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$,

причем эти решения и их производные до порядка $n - 1$ допускают при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в этих секторах асимптотические разложения

$$y_k^{(s-1)}(x, \lambda) = \omega_k^{s-1} \lambda^{s-1} e^{\omega_k \lambda x} \left(\sum_{\nu=0}^N \lambda^{-\nu} \eta_{ks\nu}(x) + O(\lambda^{-N-1}) \right), \quad (3)$$

$k, s = 1, \dots, n$, причем число N можно взять произвольно большим.

Собственные значения задачи (1), (2) определяются нулями характеристического определителя задачи $\Delta(\lambda) = \det \|U_j(y_k)\|_{j,k=1}^n$, где функции y_k в секторах $S_1, \dots, S_{2h}$ определены формулой (3).

Используя разложение (3) и вспоминая определение чисел μ_{jk} , получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa} \sum_{j_k} [F^{j_k}]_r \cdot e^{\lambda \mu_{j_k}},$$

где $\varkappa$ — приведенный суммарный порядок краевых условий.

Будем говорить, что нули *на характеристического определителя* $\Delta(\lambda)$ имеют *правильную асимптотику*, если их можно разбить на конечное число серий, каждая из которых имеет асимптотику

$$\lambda_{k,j} = \alpha_j k + c_j + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Отметим в комплексной плоскости всевозможные точки μ_{j_k} и обозначим через M наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки (может случиться, что M — отрезок). Точки μ_{j_k} , которые оказались на границе многоугольника M , назовем *граничными*, а точки, лежащие в вершинах M , — *угловыми*.

Известно [3], что необходимым и достаточным условием правильности асимптотики нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ является следующее условие: граничные точки на каждой стороне многоугольника M делят эту сторону на соизмеримые части.

Краевую задачу (1), (2) назовем *регулярной*, если все числа $F_0^{j_k}$ в разложениях $[F^{j_k}]_r$, отвечающих угловым точкам μ_{j_k} , отличны от нуля.

Регулярную краевую задачу назовем *усиленно регулярной*, если нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным числом $\delta > 0$.

Построим оператор H_r , линеаризующий задачу (1), (2), и пространства $W_{p,U}^r$, в которых действует этот оператор. Пусть $\mathcal{W}_p^k = \mathcal{W}_p^k[0, 1]$ — соболевское пространство функций на отрезке $[0, 1]$. При $r \geq 0$ рассмотрим пространство $W_p^r = \mathcal{W}_p^{r+n-1} \oplus \mathcal{W}_p^{r+n-2} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_p^r$, элементы которого будем обозначать через $\tilde{v} = (v_0, \dots, v_{n-1})$.

Положим

$$\begin{aligned} H\tilde{v} &= H(v_0, \dots, v_{n-1}) = (v_1, \dots, v_{n-2}, -l_n(v_0) - \dots - l_0(v_{n-1})), \\ H^1\tilde{v} &= H\tilde{v}, \quad H^\nu\tilde{v} = H(H^{\nu-1}\tilde{v}), \quad \nu = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

В линейных формах $U_j(y, \lambda)$, определяющих краевые условия (2), заменим переменные $\lambda^\nu y^k(0)$ на $(H^\nu\tilde{v})_0^{(k)}(0)$, а переменные $\lambda^\nu y^k(1)$ на $(H^\nu\tilde{v})_0^{(k)}(1)$, где через $(H^\nu\tilde{v})_0^{(k)}(x)$ обозначается k -я производная первой компоненты вектор-функции $H^\nu\tilde{v}$. После такой замены получим линейные формы $U_j(\tilde{v})$, не содержащие параметра λ . Легко проследить, что значения $U_j(\tilde{v})$ определены, если $\tilde{v} \in W_p^r$ при $r \geq \max(0, \varkappa_j - n + 2)$; в частности, значения $U_j(H^k\tilde{v})$ определены, если $\tilde{v} \in W_p^r$ при $r \geq \max(0, \varkappa_j + k - n + 2)$.

Фиксируем целое число $r \geq 0$ и выберем число q_r , $0 \leq q_r \leq n$, так, что $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_{q_r} > n + r - 2$ и $n + r - 2 \geq \varkappa_{q_r+1} \geq \dots \geq \varkappa_n$. Совокупность вектор-функций $\tilde{v} \in W_p^r$ таких, что $U_j(H^k\tilde{v}) = 0$, $j = q_r + 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, n + r - \varkappa_j - 2$, образует замкнутое подпространство конечной коразмерности в W_p^r , которое мы обозначим через $W_{p,U}^r$. В пространстве $W_{p,U}^r$ определим оператор $\mathcal{H}_r$ равенством (4) с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{H}_r) = W_{p,U}^{r+1}$.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА. Пусть задача (1), (2) усиленно регулярна, а корни ее характеристического определителя имеют правильную асимптотику. Тогда оператор $\mathcal{H}_r$ имеет дискретный спектр, а система собственных и присоединенных функций $\{\tilde{y}_k\}$ образует базис в пространстве $W_{p,U}^r$.

Отметим важный частный случай этой теоремы. Если краевые условия усиленно регулярны и не зависят от λ , а $p_n(x, \lambda) = \lambda^n + p(x)$, то из нашей теоремы, как уже отмечалось, вытекает результат для краевых условий (2).

В заключение автор благодарит проф. А. А. Шкаликова за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229. 2. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 1. С. 47–55. 3. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.