Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Лемма о замыкании для кусочно диффеоморфных отображений окружности, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 310–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:48:44

ЛЕММА О ЗАМЫКАНИИ ДЛЯ КУСОЧНО ДИФФЕОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Введение. Пусть f – кусочно C^r -диффеоморфное отображение окружности S^1 , $r \geq 1$. В статье доказывается, что если $x \in S^1$ – нетривиально рекуррентная точка, то C^r -малым возмущением ее можно сделать периодической точкой при некотором условии о характере возвращаемости точки x (оно формулируется в терминах вводимых далее “ t -разложений”). В качестве следствия мы получаем лемму о замыкании для некоторых потоков с конечным числом неподвижных точек на ориентируемой замкнутой поверхности рода $g \geq 2$.

В основном, лемма о замыкании доказывалась для отображений без точек разрыва. В 1939 году Майер [1] доказал C^r -лемму о замыкании для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S^1 ($r \geq 1$). Независимо этот результат был передоказан в [2]. В случае S^1 справедлива даже усиленная лемма о замыкании для блуждающих цепно рекуррентных точек [3]. Якобсон [4] доказал C^1 -лемму для C^1 -эндоморфизмов интервала и окружности. В [5] Янг получила C^r -лемму о замыкании ($2 \leq r \leq \infty$) для C^r -гладких отображений интервала. Пью доказал C^1 -лемму о замыкании для диффеоморфизмов и векторных полей на компактных многообразиях [6], [7] (см. также [8]).

Авторы благодарят С. Х. Арансона, В. З. Гринеса и М. И. Малкина за плодотворные обсуждения и Д. В. Аносова за критические замечания, способствовавшие улучшению текста.

Основные определения. Пусть $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – окружность, снабженная положительным направлением, которое индуцируется положительным направлением на $\mathbb{R}$ и универсальным накрытием $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\pi(x) = x \bmod 1$. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^k$, $\{b_i\}_{i=1}^k$ – два семейства циклически упорядоченных точек, которые разбивают S^1 на интервалы $I_i = (a_i, a_{i+1})$ и $J_i = (b_i, b_{i+1})$ соответственно, где $a_{k+1} = a_1$, $b_{k+1} = b_1$. Отображение $f: S^1 \rightarrow S^1$ называется *кусочно C^r -диффеоморфным*, $r \geq 0$, если оно взаимно однозначное и ограничение f на каждый интервал I_i есть C^r -гладкий диффеоморфизм на некоторый интервал $J_{\sigma(i)}$. (C^0 -диффеоморфизм является гоомеоморфизмом.) Интервалы I_i называются *интервалами диффеоморфности*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00230, и фонда INTAS, грант № 99-01-00230.

Введем C^r -топологию на множестве кусочно диффеоморфных отображений. Обозначим через $\bar{I}_i(f)$ замыкание интервала I_i . Для данного $\varepsilon > 0$ будем считать, что кусочно диффеоморфное отображение g принадлежит ε -окрестности $U_\varepsilon(f)$ отображения f , если существует ε -близкий к тождественному сохраняющий ориентацию C^r -диффеоморфизм $h: S^1 \rightarrow S^1$ такой, что $h(\bar{I}_i(f)) = \bar{I}_i(g)$ ($i = 1, \dots, k$), и $g \circ h$ ε -близок к f в обычной C^r -топологии на каждом $\bar{I}_i(f)$. Семейство ε -окрестностей $U_\varepsilon(f)$ определяет C^r -топологию. Пространство кусочно диффеоморфных отображений окружности с фиксированным k и наделенное указанной топологией обозначим через $\mathcal{M}^{r+0}(k)$.

Для фиксированного k возьмем множество S символов $J_1, \dots, J_k, A_1, \dots, A_k$. Пусть $f \in \mathcal{M}^{r+0}(k)$. Для точки $x \in S^1$ определим последовательность $i_f(x) \in S^\mathbb{N}$ следующим образом. Положим $i_f(x) = (i_0(x), \dots, i_n(x), \dots)$, где $i_n(x) = J_i$, если $f^n(x) \in I_i$, и $i_n(x) = A_i$, если $f^n(x) = a_i$. В последнем случае будем считать $i_m(x) = A_i$ для всех $m \geq n$. Последовательность $i_f(x)$ называется *маршрутом* точки x относительно f .

Обозначим $A^\infty = \bigcup_{i=0}^\infty f^{-i}(A)$ и $B^\infty = \bigcup_{i=0}^\infty f^i(B)$, где $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_k\}$. Если $f^{-i}(a_s) = b_p$ для некоторых $1 \leq p, s \leq k, i \geq 1$, то положим $f^{-i-1}(a_s) = f^{-1}(b_p) = \emptyset$. Через $O(x) = \bigcup_{n=0}^\infty f^n(x)$ будем обозначать орбиту точки $x \notin A^\infty \cup B^\infty$.

Точка $x \notin A^\infty$ (соответственно B^∞) называется ω -рекуррентной (соответственно α -рекуррентной), если она содержится в своем ω -предельном (соответственно α -предельном) множестве. Точка называется *рекуррентной*, если она ω - и α -рекуррентна. Рекуррентная точка называется *нетривиальной*, если она не является периодической. Очевидно, орбита рекуррентной точки состоит из рекуррентных точек. Поэтому можно естественным образом ввести понятие рекуррентной орбиты.

Пусть $x \in I_\nu = I = [a_\nu, a_{\nu+1}]$ – нетривиально рекуррентная точка кусочно гомеоморфного отображения f . Далее будем предполагать, что положительная полуорбита точки x пересекает оба интервала (a_ν, x) и $(x, a_{\nu+1})$. (Это ограничение техническое, поскольку существует точка положительной полуорбиты, для которой данное условие выполняется.) Пусть $q_1(r)$ – первая положительная итерация такая, что $f^{q_1(r)}(x) \in (x, a_{\nu+1})$. Определим по индукции $q_n(r)$ как первую итерацию такую, что $f^{q_n(r)}(x) \in (x, f^{q_{n-1}(r)}(x))$. Аналогично определяются числа $q_n(l)$ (например, $q_1(l)$ – первая положительная итерация такая, что $f^{q_1(l)}(x) \in (a_\nu, x)$).

Рассмотрим блок $B_n^r = \langle i_0(x), \dots, i_{q_n(r)}(x) \rangle \subset i_f(x)$ и определим $r_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ как максимальное число повторений блока B_n^r в $i_f(x)$ после символа $i_{q_n(r)}(x)$. Формально, $i_k(x) = i_{k+jq_n(r)}(x)$ для $0 \leq j \leq r_n, 0 \leq k \leq q_n(r)$. Последовательность $R(x) = \{r_1(x), \dots, r_n(x), \dots\}$ называется *правым t -разложением точки x* . Поменяв числа $q_n(r)$ на $q_n(l)$, получим определение *левого t -разложения* точки x , которое мы обозначим через $L(x)$.

Леммы о замыкании.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что кусочно диффеоморфное отображение $f \in \mathcal{M}^{r+0}(k)$, $r \geq 1$, возрастает на каждом интервале диффеоморфности. Пусть $x \in S^1$ – нетривиально рекуррентная точка и $L(x) = \{l_i\}_1^\infty$, $R(x) = \{r_i\}_1^\infty$ – ее левое и правое t -разложения соответственно. Если*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} l_n \geq 3, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} r_n \geq 3,$$

то для любой окрестности $U(f)$ отображения f (в C^r -топологии) существует $g \in \mathcal{M}^{r+0}(k) \cap U(f)$, имеющее периодическую точку x .

Отметим, хоть это и не понадобится в дальнейшем, что утверждаемое в теореме выполняется также и для всех образов точки x .

Простейший пример отображения, к которому применима теорема 1, дает поворот $f: x \mapsto \exp(2\pi i \mu)x$ с иррациональным μ . Такое преобразование можно считать перекладыванием двух интервалов Ψ_1 и Ψ_2 (в выборе которых есть известный произвол). Пусть y, z – концы этих интервалов, $\Lambda_1 = \{f^j(y)\}_{j=-\infty}^\infty$, $\Lambda_2 = \{f^j(z)\}_{j=-\infty}^\infty$, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Заметим, что для любого $x \in S^1 \setminus \Lambda$ последовательность $\{q_n(r)\}$ (соответственно $\{q_n(l)\}$) содержит подпоследовательность $\{q_{n_k}(r)\}$ (соответственно $\{q_{n_k}(l)\}$), состоящую из знаменателей подходящих дробей числа μ с четными (соответственно нечетными) номерами. Используя это, можно показать, что при надлежащем выборе

точек y, z и x последняя имеет требуемые t -разложения. При этом можно считать орбиты Λ_1 и Λ_2 дизъюнктными.

Преобразование поворота – не слишком удачный пример в нашей ситуации, так как для него лемма о замыкании очевидна. Незначительная модификация поворота, однако, дает пример содержательный. Рассмотрим диффеоморфизм $\varphi: S^1 \mapsto S^1$ (см. [6]) со следующими свойствами:

- 1) $h \circ \varphi = f \circ h$, где отображение $h: S^1 \mapsto S^1$ непрерывно и сюръективно;
- 2) $h(\Omega_1) = y, h(\Omega_2) = z$ для некоторых непустых открытых интервалов Ω_1 и Ω_2 ;
- 3) множество блуждающих точек отображения φ состоит из φ -образов интервалов Ω_1 и Ω_2 .

Переопределим φ на интервалах Ω_1 и Ω_2 таким образом, чтобы новое отображение ψ было разрывным. К примеру, пусть ψ аффинно отображает Ω_1 на $\varphi(\Omega_2)$ и Ω_2 на $\varphi(\Omega_1)$. Тогда t -разложения точки $x' = h^{-1}(x)$ относительно отображения ψ совпадают с соответствующими t -разложениями x относительно f . Чтобы это увидеть, заметим, что любые два ψ -образа точки x' принадлежат разным интервалам диффеоморфности отображения ψ тогда и только тогда, когда соответствующие f -образы точки x принадлежат разным интервалам Ψ_1 и Ψ_2 .

Прежде чем формулировать следствия из теоремы 1, дадим необходимые определения. Пусть Δ – плоскость Лобачевского, которую мы будем рассматривать в виде единичного диска $|z| < 1$ комплексной z -плоскости, наделенного метрикой $ds = 2|dz|/(1 - |z|^2)$. Граница диска Δ называется *абсолютом* и обозначается S_∞ . Любая ориентируемая замкнутая поверхность $M = M_g^2$ рода $g \geq 2$ есть факторпространство Δ/Γ , где Γ – фуксова группа. Известно, что в качестве фундаментальной области группы Γ можно взять геодезический многоугольник D с четным числом сторон, которые попарно отождествляются с помощью образующих $\Gamma_D \subset \Gamma$. Обозначим через N сеть, получаемую действием группы Γ на границу ∂D многоугольника D .

Следуя [10] и [11], припишем каждой стороне D элемент Γ_D следующим образом: если сторона s отождествляется со стороной $\gamma_j(s)$, то s приписывается элемент $\gamma_j \in \Gamma_D$. Каждому ребру сети N приписывается элемент, который соответствует стороне D , конгруэнтной данному ребру. Таким образом, любой направленной геодезической $\bar{g} \in \Delta$ ставится в соответствие двусторонняя последовательность из образующих, которая описывает последовательность ребер, пересекаемых геодезической. Отметим, что так как каждое ребро N конгруэнтно двум сторонам многоугольника D , то ребра N имеют двойную кодировку, одну “внутреннюю” и одну “внешнюю”. Для кодирования геодезической применяется “внутренняя”. Полученную последовательность мы будем называть *кодом Кобе–Морса* и обозначать через $[\bar{g}]$. Так как конгруэнтные геодезические имеют одинаковую (с точностью до сдвига) кодировку, то определяется код Кобе–Морса $[g]$ геодезической $g \subset M$ на поверхности.

В работе [12] каждой точке абсолюта S_∞ поставлено в соответствие так называемое f -разложение, которое представляет собой одностороннюю последовательность образующих $\Gamma_D \subset \Gamma$. Объединяя f -разложения идеальных концевых точек геодезической $\bar{g} \subset \Delta$, мы получим *BS-разложение* геодезической $\bar{g}$.

Полностью аналогично предыдущему, каждому символу $i_0 \in [g]$ кода Кобе–Морса (или *BS-разложения*) геодезической g и соответствующей этому символу точке приписываются левое и правое t -разложения, которые мы будем обозначать через $l_n(i_0)$ и $r_n(i_0)$ ($n \geq 0$) соответственно. Для символа s_0 *BS-разложения* левое и правое t -разложения обозначим через $L_n(s_0)$ и $R_n(s_0)$ ($n \geq 0$) соответственно.

Как следствие теоремы 1 получаем следующие две леммы о замыкании для векторных полей на замкнутых ориентируемых поверхностях M_g^2 рода $g \geq 2$ (необходимые определения о траекториях векторных полей см. в [4]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $X \in \chi^r(M_g^2)$ ($1 \leq r \leq \infty, g \geq 2$) – векторное поле, имеющее $E(X) < \infty$ особенностей только седлового типа (т.е. каждый сектор особенности гиперболический). Пусть l – нетривиально рекуррентная траектория поля X , проходящая через точку $t \in l$. Предположим, что существует символ $i_0 \in [g]$ со следующими свойствами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(i_0) \geq 3E(X) + 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n(i_0) \geq 3E(X) + 1, \quad (1)$$

где $[g]$ – код Кобе–Морса геодезической g , соответствующей l ; тогда найдется векторное

поле $Y \in \chi^r(M_g^2)$, произвольно близкое к X (в C^r -топологии), с периодической траекторией, проходящей через точку m .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \in \chi^r(M_g^2)$ ($1 \leq r \leq \infty$, $g \geq 2$) – векторное поле, имеющее $E(X) < \infty$ особенностей типа седло, и пусть l – нетривиально рекуррентная траектория поля X , проходящая через точку $m \in l$. Предположим, что BS -разложение геодезической g , соответствующей l , имеет символ s_0 со следующими свойствами:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_n(s_0) \geq 3E(X) + 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} L_n(s_0) \geq 3E(X) + 1; \quad (2)$$

тогда найдется векторное поле $Y \in \chi^r(M_g^2)$, произвольно близкое к X (в C^r -топологии), с периодической траекторией, проходящей через точку m .

Гутierrez [14] доказал C^r -лемму о замыкании для векторных полей с конечным числом особенностей на торе в предположении, что число вращения векторного поля имеет непостоянный тип (это означает, что непрерывная дробь, в которую раскладывается число вращения, образует неограниченную последовательность). Следствия 1, 2 являются продолжениями результата работы [14] на ориентируемую замкнутую поверхность $M = M_g^2$ рода $g \geq 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Майер А. Г. // Ученые записки Горьк. госуниверситета. 1939. Т. 12. С. 215–229.
2. Peixoto M. M. // Topology. 1962. V. 1. P. 101–120; // Topology. 1963. V. 2. P. 179–180.
3. Арanson С. Х., Жужома Е. В., Медведев В. С. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 323–331.
4. Якобсон М. В. // Матем. сб. 1971. Т. 85. С. 183–188.
5. Young L. S. // Invent. Math. 1979. V. 54. P. 179–187.
6. Pugh C. // Amer. J. Math. 1967. V. 89. P. 956–1009.
7. Pugh C. // Amer. J. Math. 1967. V. 89. P. 1010–1021.
8. Pugh C., Robinson C. // Ergodic Theory Dynamical Systems. 1983. V. 3. P. 261–313.
9. Denjoy A. // J. Math. Pure et Appl. 1932. V. 11. P. 333–375.
10. Koebe P. // Sitzung. der Preuss. Akad. der Wissenschaften, 1929. P. 414–457.
11. Morse M. // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 33–51.
12. Bowen R., Series C. // Publ. IHES. 1979. V. 50. P. 153–170.
13. Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. // Transl. of Math. Monographs (AMS). 1996. V. 153. P. 325.
14. Gutierrez C. // Ergodic Theory. Dynamical Systems. 1986. V. 6. P. 45–56.

(Е. В. Жужома) Нижегородский государственный технический университет

Поступило

(В. С. Медведев) Научно-исследовательский институт прикладной математики

16.02.2000

и кибернетики при Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского

E-mail: zhuzhoma@focus.nnov.su, medvedev@unn.ac.ru