Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Логинов, О вложении аналитических луп Муфанг в альтернативные алгебры, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 313–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:56:37

О ВЛОЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЛУП МУФАНГ В АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Е. К. Логинов

1. Мальцевым [1] и Кузьминым [2] было установлено соответствие между локальными аналитическими лупами Муфанг и конечномерными алгебрами Мальцева над полем вещественных чисел, аналогичное классическому соответствию Ли между локальными группами Ли и алгебрами Ли. Позже Кердман [3] показал, что эти результаты полностью переносятся на аналитические лупы Муфанг. А именно, существует единственная с точностью до изоморфизма односвязная аналитическая лупа Муфанг G в целом с данной касательной алгеброй Мальцева и любая связная аналитическая лупа Муфанг G' с той же касательной алгеброй может быть получена из G факторизацией по дискретной центральной нормальной подлупе, причем пространство односвязной аналитической лупы Муфанг, имеющей разрешимую касательную алгебру Мальцева, гомеоморфно евклидову пространству. В данной заметке устанавливается связь между аналитическими лупами Муфанг и лупами обратимых элементов альтернативных алгебр над полем вещественных чисел.

2. Напомним основные понятия теории линейных представлений луп Муфанг (см. [4]). Пусть G – лупа Муфанг. Лупа G выделяется из класса всех луп тождествами

$$ab \cdot ca = a(bc \cdot a), \quad a(b \cdot cb) = (ab \cdot c)b, \quad (cb \cdot c)a = c(b \cdot ca),$$

которые называют *центральным*, *правым* и *левым тождеством Муфанг* соответственно. Хорошо известно, что в произвольной лупе два из них являются следствием третьего. Пусть M – линейное пространство над полем F и (ρ_a, λ_a) – обратимые линейные преобразования M , где $a \in G$. Определим на множестве $\tilde{G} = G \times M$ умножение

$$(a, x)(b, y) = (ab, x\rho_b + y\lambda_a). \quad (1)$$

Если отображения $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$ таковы, что полученный группоид $\tilde{G}$ снова является лупой Муфанг, то векторное пространство M называется G -модулем, а упорядоченная пара отображений (ρ, λ) – *линейным представлением* лупы G . Если G – аналитическая лупа Муфанг, то дополнительно требуется, чтобы и лупа $\tilde{G}$ была аналитической. Часто удобно использовать краткие обозначения xa и ax вместо введенных выше $x\rho_a$ и $x\lambda_a$.

Линейное представление (ρ, λ) называется *точным*, если ядро этого представления $\text{Ker}(\rho, \lambda) = \{a \in G \mid \rho_a = \lambda_a = \text{id}\}$ совпадает с единицей лупы G . Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Ядро $\text{Ker}(\rho, \lambda)$ линейного представления лупы Муфанг является ее нормальной подлупой.*

Пусть $F[G]$ – формальная линейная оболочка лупы Муфанг G и M – некоторый G -модуль. Продолжим представление $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$ лупы G на $F[G]$ по F -линейности. Получим представление $(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda}): F[G] \rightarrow \text{End } M$ алгебры $F[G]$ в смысле Эйленберга [5]. Связь представлений (ρ, λ) и $(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$ описывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пара отображений $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$ является линейным представлением лупы Муфанг G тогда и только тогда, когда выполняются тождества $x(b \cdot ab) = (xb \cdot a)b$, $(ab \cdot a)x = a(b \cdot ax)$ и ассоциатор (a, b, x) кососимметричен для всех $a, b \in F[G]$ и $x \in M$.*

Заметим, что ядро $\text{Ker}(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda}) = \{a \in F[G] \mid \tilde{\rho}_a = \tilde{\lambda}_a = 0\}$ построенного представления является идеалом в $F[G]$. Причем справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Факторалгебра $F[G]/\text{Ker}(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$ альтернативна.*

Сформулированные предложения (см. [4]) позволяют доказать следующий критерий вложимости луп Муфанг в лупы обратимых элементов альтернативных алгебр.

ТЕОРЕМА 1. *Лупа Муфанг G вкладывается в лупу обратимых элементов альтернативной алгебры тогда и только тогда, когда она обладает точным представлением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть лупа G вложена в лупу обратимых элементов альтернативной алгебры A . Выделим в A подалгебру B , порожденную элементами лупы G . Операторы R_a и L_a правого и левого умножения элементов B на элемент $a \in G$ обратимы, удовлетворяют условиям предложения 2 и совпадают с тождественным оператором, только если $a = e$, где e – единица лупы G . Поэтому пара отображений (R, L) лупы G в группу $\text{Aut } B$ автоморфизмов линейного пространства B , сопоставляющих элементу $a \in G$ операторы R_a и L_a , является точным представлением лупы Муфанг G .

Обратно, пусть лупа G обладает точным представлением $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$. Продолжим представление (ρ, λ) с G на $F[G]$ по F -линейности. Получим представление $(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda}): F[G] \rightarrow \text{End } M$ формальной линейной оболочки $F[G]$. Гомоморфизм $\tilde{\varphi}: F[G] \rightarrow F[G]/\text{Ker}(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$ алгебр индуцирует гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow G/H$ луп. Покажем, что подлупа H совпадает с ядром $\text{Ker}(\rho, \lambda)$ представления (ρ, λ) .

Действительно, если $g \in \text{Ker}(\rho, \lambda)$, то $e - g \in \text{Ker}(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$ и $0 = \varphi(e - g) = \varphi(e) - \varphi(g)$. Поэтому $g \in H$ и $\text{Ker}(\rho, \lambda) \subseteq H$. Обратно, если $g \in H$, то $0 = \varphi(e) - \varphi(g) = \varphi(e - g)$. Следовательно, $e - g \in \text{Ker}(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$, $g \in \text{Ker}(\rho, \lambda)$ и $H \subseteq \text{Ker}(\rho, \lambda)$. Таким образом, $H = \text{Ker}(\rho, \lambda)$. Отсюда ввиду точности представления (ρ, λ) следует вложение лупы G в лупу обратимых элементов факторалгебры $F[G]/\text{Ker}(\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$, которая по предложению 3 альтернативна. Теорема доказана.

3. Пусть G – аналитическая лупа Муфанг в целом. В окрестности U единицы операция умножения в G выражается через операции сложения и умножения в касательной алгебре Мальцева M с помощью ряда Кемпбелла–Хаусдорфа

$$ab = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[[x, y], y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \dots$$

Определим отображения $(\rho, \lambda): U \rightarrow \text{Aut } M$ равенствами

$$\rho_b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (R_y)^n, \quad \lambda_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-R_x)^n,$$

где R_y и R_x – операторы правого умножения на элементы y и x соответственно, а B_n – числа Бернулли. Очевидно, операторы ρ_b и λ_a аналитичны, обратимы и удовлетворяют условиям предложения 2. Поэтому отображения $(\rho, \lambda): U \rightarrow \text{Aut } M$ определяют представление локальной лупы U и наделяют множество $\tilde{U} = U \times M$ структурой локальной аналитической лупы Муфанг. Ясно, что построенное представление является точным.

Пусть $\tilde{G}$ – аналитическая лупа Муфанг, локально изоморфная лупе $\tilde{U}$ и содержащая G в качестве подлупы. Поскольку связная лупа алгебраически порождается элементами любой окрестности единицы и для любых элементов g_i, g_j локальной лупы Муфанг U справедливы тождества

$$\lambda_{g_j g_i} = \rho_{g_i} \lambda_{g_i} \lambda_{g_j} \rho_{g_i}^{-1}, \quad \rho_{g_i g_j} = \lambda_{g_i} \rho_{g_i} \rho_{g_j} \lambda_{g_i}^{-1},$$

умножение в $\tilde{G}$ может быть представлено в виде (1), где элементы a, b лежат в лупе G , а операторы ρ_b, λ_a порождаются операторами $\rho_{g_j}, \lambda_{g_i}$. Таким образом, определено представление $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } M$ лупы G . Из точности представления локальной лупы U и предложения 1 следует, что ядро $H = \text{Ker}(\rho, \lambda)$ построенного представления – дискретная нормальная подлупа G . Из связности лупы G следует, что H находится в ее центре. Поэтому существует регулярное представление $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut } F[H]$, где $\rho_a = R_a, \lambda_a = L_a$, если $a \in H$, и $\rho_a = \lambda_a = \text{id}$, если $a \notin H$. Индуцированное представление $(\rho, \lambda): G \rightarrow \text{Aut}(M \otimes F[H])$, очевидно, является точным. Таким образом, из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. *Всякая аналитическая лупа Муфанг вкладывается в лупу обратимых элементов некоторой альтернативной алгебры над полем вещественных чисел.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. // Матем. сб. 1955. Т. 36. С. 569–576.
2. Кузьмин Е. Н. // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. С. 3–22.
3. Кердман Ф. С. // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. С. 523–555.
4. Логинов Е. К. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 66–73.
5. Eilenberg S. // Ann. Soc. Polon. Mat. 1948. V. 21. P. 125–134.

Ивановский государственный университет
E-mail: loginov@ivanovo.ac.ru

Поступило
29.05.2000