Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Приходько, Стохастические конструкции перемешивающих систем положительного локального ранга, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 316–319

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:31:16

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИХ СИСТЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЛОКАЛЬНОГО РАНГА

А. А. Приходько

Автоморфизм T пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, имеет ранг 1, если существует последовательность разбиений $\xi_n = \{C_n, TC_n, T^2C_n, \dots, T^{h-1}C_n, Y_n\}$, сходящаяся к разбиению на точки (это означает, что любое измеримое множество сколь угодно точно приближается ξ_n -измеримыми множествами). Автоморфизм называется *перемешивающим*, если для любых измеримых множеств A и B выполнено $\mu(T^t A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$ при $n \rightarrow \infty$. Пример перемешивающего автоморфизма T ранга 1 приведен в работе Орнштейна [1]. Им было доказано, что T не имеет собственных факторов и коммутирует только со своими степенями. Позднее методами теории джойннингов были обнаружены другие интересные свойства преобразований такого типа.

Идея Орнштейна состоит в “рандомизации” общей конструкции преобразования ранга 1 (см., например, [2]). Тогда если параметры конструкции распределены достаточно случайно, то полученная система является перемешивающей почти наверное. Известно, что автоморфизмы Орнштейна (почти наверное) обладают сингулярным максимальным спектральным типом (см. работы Абдалави [2] и Бургена [3]).

Мы предлагаем новую стохастическую конструкцию перемешивающих систем (автоморфизмов и потоков) ранга 1, а также систем положительного локального и бесконечного ранга, обладающих рядом дополнительных метрических свойств. В нашей конструкции достаточные условия перемешивания имеют явное выражение через статистические параметры системы (см. теорему 1). Все результаты работы формулируются для потоков, аналогичные теоремы верны и для автоморфизмов.

Основные результаты теории систем конечного ранга изложены в обзоре [4].

1. Перемешивающие системы ранга 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Назовем пару (U, φ) *башней высоты h* относительно измеримого потока (T^t) на пространстве Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, если $U \in \mathcal{A}$ и отображение $\varphi: U \rightarrow [0, h]$ обладает следующими свойствами:

- отображение φ измеримо: для любого $B \in \mathcal{B}[0, h]$ множество $\varphi^{-1}B \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{B}[0, h]$ – σ -алгебра борелевских подмножеств $[0, h]$;
- $T^t \varphi^{-1}B = \varphi^{-1}S^t B$, если B – борелевское подмножество $[0, h]$ и $S^t B \subseteq [0, h]$, где $S^t x = x + t$.

Скажем, что поток (T^t) имеет β -ранг, если существует последовательность башен (U_n, φ_n) со следующими свойствами:

- $\mu(U_n) \rightarrow \beta$ при $n \rightarrow \infty$;
- для любого измеримого множества A найдется последовательность множеств $\tilde{A}_n \in \mathcal{A}(\varphi_n)$ такая, что $\mu(A \Delta \tilde{A}_n) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, где $\mathcal{A}(\varphi_n)$ есть σ -алгебра множеств вида $\varphi_n^{-1}(B) \cup E$, где $B \in \mathcal{B}[0, h_n]$, $E \subseteq X \setminus U_n$.

Число $\beta(T)$, равное супремуму всех β , удовлетворяющих сформулированным условиям, называют *локальным рангом* потока. Говорят, что (T^t) – поток *ранга 1*, если (T^t) имеет β -ранг с $\beta = 1$.

Конструкция потока ранга 1. На шаге 0 рассмотрим множество вида $U_0 = C_0 \times [0, h_0]$, где $C_0 = [0, \alpha_0]$ и $\alpha_0 > 0$. Зададим наш поток как специальный поток над C_0 . Это означает, что точка (c, y) под действием потока движется равномерно и прямолинейно в вертикальном направлении до тех пор, пока y не окажется равным $\rho_0(c)$ (функция ρ_0 называется *функцией возвращения*), а затем мгновенно “перескакивает” в точку $S_0(c)$, где S_0 – некоторый автоморфизм пространства

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01104, и Гранта государственной поддержки научных школ, грант № 96-15-96135.

(C_0, λ) и λ – мера Лебега. Таким образом, фазовое пространство $X = \{(c, y) : 0 \leq y \leq \rho_0(c), c \in C_0\}$, а мера μ с точностью до нормирующего множества совпадает с мерой Лебега. Разделим отрезок C_0 на q_0 равных отрезков $C_{0,1}, \dots, C_{0,q_0}$ (мы пренебрегаем концами отрезков, поскольку все объекты рассматриваются с точностью до множеств меры 0). Определим функцию возвращения на всех отрезках, кроме последнего, следующим образом: $\rho_0(c) = h_0 + s_{0,j}$, если $c \in C_{0,j}$, где $s_{0,j}$ – заданные положительные числа. При этом потребуем, чтобы $S_0(c)$ равнялось $c + \alpha_0/q_0$ при $c \notin C_{0,q_0}$. Заметим, что $S_0(C_{0,j}) = C_{0,j+1}$, если $j < q_0$.

На шаге 1 мы доопределим функцию возвращения и автоморфизм S_0 “почти на всем” отрезке C_{0,q_0} . Заметим, что поскольку множества $C_{0,j}$, $j = 2, \dots, q_0$, являются итерациями под действием S_0 множества $C_{0,1}$, задание функции ρ_0 эквивалентно заданию функции возвращения ρ_1 относительно отрезка $C_{0,1}$. Точнее, положим $C_1 = C_{0,1} = [0, \alpha_1]$ и рассмотрим наш поток как специальный над C_1 с функцией возвращения ρ_1 и автоморфизмом S_1 . При этом

$$\rho_1(c) = h_1 + \rho_0(S^{q_0-1}c), \quad S_1 = S_0^{q_0}, \quad h_1 = q_0 h_0 + \sum_j s_{0,j}.$$

Как и раньше, поделим отрезок C_1 на q_1 равных частей и определим ρ_1 на отрезке $C_{1,j}$ как $h_1 + s_{1,j}$, а автоморфизм S_1 пусть, как и раньше, осуществляет сдвиг на α_1/q_1 вправо, если $c \notin C_{1,q_1}$. Повторяя эту конструкцию, мы полностью определим как функцию возвращения ρ_0 , так и S_0 . Нетрудно доказать, что построенный поток является потоком ранга 1 с последовательностью аппроксимирующих башен (U_n, φ_n) , где

$$U_n = \bigcup_{t=0}^{h_n} T^t C_n, \quad h_n = q_{n-1} h_{n-1} + \sum_j s_{n-1,j}$$

и φ_n задано естественным образом. Предъявленная конструкция задается следующими параметрами: последовательностями h_n и q_n , а также величинами $s_{n,j}$.

Стохастическая конструкция. Будем считать, что высоты h_n фиксированы, а $s_{n,j}$ являются независимыми случайными величинами с распределением ξ_n (одинаковым для всех $s_{n,j}$ при фиксированном n). При этом количество q_n отрезков в нашей конструкции тоже случайно и определяется последовательностью $s_{n,1}, s_{n,2}, \dots$. Относительно величин ξ_n будем предполагать следующее:

- а) $0 \leq \xi_n \leq h_n$;
- б) величина ξ_n имеет плотность p_n , являющуюся функцией ограниченной вариации.

Обозначим $\sigma_n^2 = D\xi_n$ дисперсию величины ξ_n , и пусть $\kappa_n = h_n^2/\sigma_n^2$. Тогда верна

ТЕОРЕМА 1. Пусть поток (T^t) является результатом предложенной выше конструкции, зависящей от параметров h_n, ξ_n , и пусть для некоторых констант $0 < \chi < 1$, $\gamma, \varepsilon, C_1, C_2 > 0$ выполнены следующие условия:

- 1) $\|(1 + C_1 \sigma_n^2 x^2)^{1/2} \hat{p}_n(x)\|_\infty = 1$;
- 2) $\prod_{j < n} q_j \leq C_2 q_n^\gamma$;
- 3) $\|q_{n-1}^{-\chi} h_n p_n\|_\infty \rightarrow 0$;
- 4) $\kappa_n / q_n^{1-\chi-\varepsilon} \rightarrow 0$;

где $\hat{p}_n(x)$ – преобразование Фурье функции $p_n(t)$. Тогда поток (T^t) является перемешивающим с вероятностью 1.

Приведем конкретный пример. Фиксируем распределение ξ на $\mathbb{R}_+$ с плотностью $p(t)$ и дисперсией, равной 1, такое, что $\xi \leq M < \infty$. Пусть ξ_n имеет плотность $p_n = p(t/\sigma_n)/\sigma_n$. И пусть также $h_n = 2^{m^n}$ и $\sigma_n = 2^{\alpha m^n}$. Тогда поток (T^t) будет перемешивающим почти наверное, если $\alpha > 3/(2+m)$.

2. Перемешивающие системы положительного локального ранга. В этом пункте мы опишем стохастическую конструкцию потока заданного локального ранга $\beta \in (0, 1)$, которая в основном опирается на конструкцию потока ранга 1, описанную в предыдущем пункте.

Фиксируем $\beta \in (0, 1)$ и рассмотрим последовательность наборов башен $(U_n^{(k)}, \varphi_n^{(k)})$ высоты h_n , $k = 0, \dots, r_n$, которые мы будем отождествлять с множествами $C_n^{(k)} \times [0, h_n]$. Далее, выберем, как и раньше, последовательность случайных величин ξ_n . Нетрудно построить стационарный случайный процесс

$$\Psi_n: \mathbb{R} \rightarrow ([0, h_n] \times \{0, \dots, r_n\}) \sqcup \{\mathfrak{s}\}$$

такой, что

- a) если $\Psi_n(t) = (0, k)$, то $\Psi_n(t + u) = (t, k)$ при $0 \leq u \leq h_n$;
- b) если $\Psi_n(t) = h_n$, то за точкой t следует интервал длины s , на котором $\Psi_n(t) \equiv \mathfrak{s}$ и в правом конце которого Ψ_n обращается в 0, причем длины всех таких интервалов независимы и распределены как ξ_n ;
- c) вторая координата $\Psi_n(t)$, которая постоянна на каждом из отрезков, где $\Psi_n(t) \neq \mathfrak{s}$, является реализацией бернуллиевского процесса с алфавитом $\{0, 1, \dots, r_n\}$ и вероятностным вектором $\{\beta, (1 - \beta)/r_n, \dots, (1 - \beta)/r_n\}$.

Возьмем $r_{n+1} + 1$ независимых копий процесса Ψ_n , и пусть $\psi_n^{(k)}$ – “ограничение” соответствующей копии на $[0, h_{n+1}]$, понимаемое в следующем смысле. Если некоторый (максимальный) отрезок, на котором $\Psi_n(t) \neq \mathfrak{s}$, целиком содержится в $[0, h_{n+1}]$, то на нем $\psi_n^{(k)}(t) = \Psi_n(t)$; во всех остальных точках $\psi_n^{(k)}(t) = \mathfrak{s}$.

Отображения $\psi_n^{(k)}$ задают вложение башен $U_n^{(k)}$ в $U_{n+1}^{(k)}$. А именно, будем считать, что множество $T^t C_n^{(m)}$ совпадает с объединением множеств вида $T^u C_{n+1}^{(k)}$, удовлетворяющих условию $\psi_n^{(k)}(u) = (t, m)$. Нетрудно проверить, что отображения $\psi_n^{(k)}$ однозначно определяют поток, действующий таким образом, как описано выше. Заметим, что при определенных ограничениях на r_n почти наверное $\mu(U_n^{(0)}) \sim \beta$ и $\mu(U_n^{(k)}) \sim (1 - \beta)/r_n$, $k > 0$.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится еще одно понятие. Самоприсоединением (второго порядка) потока (T^t) называется мера ν на прямом произведении $X \times X$, имеющая стандартные проекции на прямые сомножители и инвариантная относительно потока $(T^t \times T^t)$. Говорят, что поток (T^t) обладает свойством минимальности самоприсоединений второго порядка, если все его эргодические самоприсоединения второго порядка исчерпываются мерами $\mu \times \mu$ и $(T^a \times \text{Id})\Delta$, $a \in \mathbb{R}$, где $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в дополнение к сказанному ранее в этом пункте h_n и ξ_n удовлетворяют еще условиям теоремы 1 и пусть $r_n = n$. Тогда построенный выше поток почти наверное является перемешивающим, причем

- 1) $\beta(T) = \beta$;
- 2) (T^t) имеет бесконечный ранг;
- 3) (T^t) обладает свойством минимальности самоприсоединений второго порядка.

Модифицируя рассмотренную конструкцию, можно построить примеры систем, обладающих свойством минимальности самоприсоединений и таких, что $\beta(T) = 0$. Для этого нужно рассмотреть последовательность башен $(U_n^{(k)}, \varphi_n^{(k)})$, $k = 1, \dots, n$, аналогичную построенной выше, с той лишь разницей, что для построения процесса Ψ_n мы берем вероятностный вектор $(1/r_n, \dots, 1/r_n)$. Заметим, что все известные примеры автоморфизмов со свойством минимальности самоприсоединений являются системами ранга 1 (первая из таких конструкций была предложена Рудольфом в [5]). Среди потоков исключением являются некоторые орициклические потоки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ornstein D. S. // Proc. Sixth Berkley Sympos. Math. Statist. Probab. Univ. of California Press, 1970. P. 347–356. 2. el Abdalaoui H. Étude spectral des transformations d'Ornstein. Thèse de l'Université de Rouen. 3. Bourgain J. // Israel J. Math. 1993. V. 84. P. 53–63. 4. Ferenczi S. // Colloquium Mathematicum. 1997. V. 73. № 1. P. 35–65. 5. Rudolph D. J. // J. d'Analyse Math. 1979. V. 35. P. 97–122.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `apri7@geocities.com`

Поступило
15.02.2000
Исправленный вариант
04.04.2000