Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Трофимов, Об одном свойстве универсального метрического пространства Урысона, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 319–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:53:40

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА УРЫСОНА

В. И. Трофимов

В работе [1] Урысоном построено замечательное метрическое пространство U , обладающее следующими свойствами:

- 1) U – полное пространство со счетной базой;
- 2) U содержит изометрический образ любого метрического пространства со счетной базой;
- 3) U метрически однородно, т.е. для любых его конечных изометричных подпространств A и B существует изометрия пространства U , переводящая A в B .

Согласно [1, теорема IV] метрическое пространство U однозначно (с точностью до изометрии) определяется свойствами 1)–3).

Пусть A и B – подпространства метрического пространства U и φ – изометрия пространства A на пространство B . Если A и B конечны, то согласно 2) существует такая изометрия ψ пространства U , что $\psi(A) = B$. Заметим, что фактически в [1, с. 760–762] доказывается существование в этом случае даже изометрии ψ пространства U со свойством $\psi|_A = \varphi$. В то же время, согласно теореме XII из [1] для бесконечных A и B изометрии ψ пространства U со свойством $\psi(A) = B$ может не существовать. Так (см. [1, с. 773]), если $S(x, \varepsilon)$ – сфера радиуса $\varepsilon > 0$ с центром $x \in U$ метрического пространства U , то, с одной стороны, существует изометрия φ' подпространства $S(x, \varepsilon) \cup \{x\}$ метрического пространства U на некоторое содержащееся в $S(x, \varepsilon)$ подпространство метрического пространства U , а с другой стороны, не существует изометрии пространства U , отображающей $S(x, \varepsilon)$ на собственное подмножество множества $S(x, \varepsilon)$. Следовательно, для изометричных подпространств $A = S(x, \varepsilon)$, $B = \varphi'(S(x, \varepsilon))$ метрического пространства U не существует изометрии ψ пространства U со свойством $\psi(A) = B$. После завершения таким образом доказательства теоремы XII б [1, с. 773] формулируется в качестве открытого следующий

ВОПРОС. Нельзя ли любые два конгруэнтных *счетных* множества в U перевести друг в друга изометрическим отображением пространства U на себя?

(В принятой в [1] терминологии конгруэнтные множества в U – это изометричные подпространства метрического пространства U .) Однако отрицательный ответ на сформулированный вопрос легко следует из доказанных в [1] результатов (что было анонсировано в [2]). Ниже приводятся соответствующие рассуждения.

Согласно [1, теорема VIII] существует такое счетное подпространство C метрического пространства U , что $\overline{C} = S(x, \varepsilon)$ (здесь и далее используются введенные ранее обозначения). Содержащееся в $S(x, \varepsilon)$ подпространство $\varphi'(C)$ метрического пространства U изометрично C . Предположим, что существует изометрия ψ' пространства U , для которой $\psi'(C) \subseteq \varphi'(C)$. Тогда

$$\psi'(S(x, \varepsilon)) = \psi'(\overline{C}) \subseteq \overline{\psi'(C)} \subseteq \overline{\varphi'(C)} \subseteq S(x, \varepsilon),$$

причем в силу $\varphi'(x) \in S(x, \varepsilon)$ и $\rho(\varphi'(x), \varphi'(C)) = \rho(x, C) = \varepsilon$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ – расстояние в U , имеем $\overline{\varphi'(C)} \neq S(x, \varepsilon)$. Таким образом, изометрия ψ' пространства U отображает $S(x, \varepsilon)$ на собственное подмножество множества $S(x, \varepsilon)$. Как было отмечено, последнее согласно [1, с. 773] невозможно. Итак, для счетных изометричных подпространств C и $\varphi'(C)$ метрического пространства U не существует изометрии пространства U , отображающей C в $\varphi'(C)$.

Как было отмечено рецензентом, рассматриваемый выше вопрос из [1] отсутствует в работе [3], являющейся ранней версией [1]. Обе эти работы были отредактированы для печати П. С. Александровым уже без участия П. С. Урысова (подробности см. в [1, с. 776–777]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Урысон П. С. // Труды по топологии и другим областям математики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1951. С. 747–777.
2. Trofimov V. I. // Paul Erdős and his Mathematics. Research Communications of the Conference Held in the Memory of Paul Erdős. Janos Bolyai Math. Soc.: Budapest, 1999. P. 255.
3. Urysohn P. S. // Bull. Sci. Math. 1927. V. 51. P. 43–64, 74–90.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: trofimov@imm.uran.ru

Поступило
01.03.1999