Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич, О геометрии $\mathfrak{J}$ -пространств и о свойствах обращающих операторов, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 477–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:54:14

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ГЕОМЕТРИИ $\mathfrak{J}$ -ПРОСТРАНСТВ И О СВОЙСТВАХ ОБРАЩАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич

1. В [1], [2] свойства пространств с индефинитной метрикой изучались в их связи с продолжениями линейных сжатий. В настоящем сообщении нас будет интересовать сохранение некоторых свойств сжатий при “незначительном” (“на конечномерное подпространство”) уменьшении областей определения последних. Ниже мы будем использовать “индефинитную” терминологию из [3].

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{B}$ – нереплексивное банахово пространство. Тогда существует линейный функционал $f \in \mathfrak{B}^*$, обладающий следующими свойствами:

- f не достигает своей нормы на единичной сфере S пространства $\mathfrak{B}$;
- существует (замкнутое) подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$ такое, что $\dim \mathfrak{B}/\mathfrak{L} = 1$ и $f|_{\mathfrak{L}}$ достигает своей нормы на $S \cap \mathfrak{L}$.

Доказательство следует из теоремы Джеймса [4, гл. 1, теорема 3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{B}_+$ нереплексивно, $\dim \mathfrak{B}_- \geq 1$. Тогда в $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_+ \dot{+} \mathfrak{B}_-$ существует положительное подпространство $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}_+ \mathfrak{L} = \mathfrak{B}_+$, не являющееся равномерно положительным, однако содержащее равномерно положительное подпространство $\mathfrak{L}_1$ такое, что $\dim \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1 = 1$.

Покажем, что в гильбертовых пространствах ситуация является иной.

В следующих двух леммах мы ограничимся рассмотрением ограниченного линейного оператора $T: H \rightarrow H$, где H – гильбертово пространство. Более общий случай ограниченного линейного оператора $T: H_1 \rightarrow H_2$, где H_1 и H_2 – гильбертовы пространства, легко сводится к рассматриваемому нами случаю.

ЛЕММА 2. Оператор T достигает своей нормы на единичной сфере в точности тогда, когда $\|T\|^2 \in \sigma_p(T^*T)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть неотрицательную форму

$$((\|T\|^2 - T^*T)x, y)$$

и заметить, что единичные векторы, на которых $\|T\|$ достигается, совпадают с единичными изотропными векторами этой формы.

ЛЕММА 3. Пусть оператор T не достигает своей нормы на единичной сфере. Если $\mathfrak{L} \subset H$ – подпространство, $\dim H/\mathfrak{L} < \infty$, то $\|T|_{\mathfrak{L}}\| = \|T\|$.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00391 и № 00-15-96100.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 имеем $\|T\|^2 \in \sigma_c(T^*T)$. Пусть $B|_{\mathcal{L}} = T|_{\mathcal{L}}$ и $B(\mathcal{L}^\perp) = \{0\}$. Поскольку $B^*B - T^*T$ – компактный оператор, из теоремы Г. Вейля (см., например, [5, гл. VII, теорема 1]) следует, что $\|T\|^2 \in \sigma_c(B^*B)$. Значит, $\|B\| \geq \|T\|$, откуда $\|B\| = \|T\|$, что и требовалось доказать.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathcal{L}$ – дефинитное, но не равномерно дефинитное подпространство пространства Крейна, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$, $\dim \mathcal{L}/\mathcal{L}_1 < \infty$, то и $\mathcal{L}_1$ не является равномерно дефинитным.*

Заметим, что в доказательстве леммы 3 использована не конечномерность, а лишь компактность оператора $T - B$. Поэтому справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathcal{L}$ – подпространство гильбертова пространства H . Пусть $A: H \rightarrow H_1$ – ограниченное линейное отображение пространства H в гильбертово пространство H_1 ; оператор $A|_{\mathcal{L}}$ достигает своей нормы на единичной сфере пространства $\mathcal{L}$; оператор $A|_{\mathcal{L}^\perp}$ компактен. Тогда оператор A достигает своей нормы на единичной сфере пространства H .*

Авторы признательны Е. Т. Шавгулидзе, сообщившему одному из них формулировку и (основанную на иных, чем в тексте, идеях) доказательство этого предложения для случая $\dim H/\mathcal{L} < \infty$.

Авторам неизвестно, как обстоит дело в случае рефлексивных банаховых, отличных от гильбертовых, пространств: в каких случаях имеют место аналогии предложения 1, в каких – теоремы 1?

2. Пусть $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ – нормированные пространства. Оператор $A \in \mathcal{N}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$ мы будем называть *обращающим*, если для любого $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, $\|X\| \leq 1$, оператор $I + AX$ – биекция $\mathfrak{N}_1$ на себя. Легко видеть, что в случае $\max\{\dim \mathfrak{N}_1, \dim \mathfrak{N}_2\} \geq 2$ в этом определении достаточно ограничиться операторами $X \in \mathcal{N}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, $\|X\| = 1$.

Легко видеть также, что $\|Ax\| < \|x\|$ при $x \in \mathfrak{N}_2 \setminus \{0\}$. Справедливо ли неравенство $\|A\| < 1$ для любого обращающего оператора? В случае гильбертовых пространств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ ответ положительный [6]–[8]. Рассмотрение общей ситуации – тема настоящего сообщения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нормированное пространство N назовем *пространством Джеймса*, если для любого $f \in N^*$ существует вектор $x_0 \in N$, $\|x_0\| = 1$, такой, что $f(x_0) = \|f\|$.

Банахово пространство N является пространством Джеймса в точности тогда, когда оно рефлексивно [4, гл. 1, теорема 3]. В то же время уже в сепарабельном случае существуют неполные пространства Джеймса [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mathfrak{N}_1$ полно, $\dim \mathfrak{N}_1 \geq 1$. Для того чтобы произвольный обращающий оператор $A \in \mathcal{N}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$ был строгим сжатием (т.е. оператором с нормой, меньшей 1), необходимо, чтобы $\mathfrak{N}_2$ было пространством Джеймса. В случае $\dim \mathfrak{N}_1 < \infty$ это условие является также и достаточным.*

В случае $\dim \mathfrak{N}_1 = \infty$ мы располагаем лишь частичным обращением “необходимой” части предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $\mathfrak{N}_2$ – пространство Джеймса и A – компактный обращающий оператор, то A – строгое сжатие.*

Пространство $\mathfrak{N}_1$ в этом предложении полным не предполагается. Условие же “ $\mathfrak{N}_2$ – пространство Джеймса” существенно: при доказательстве “необходимой” части предложения 3 можно ограничиться рассмотрением одномерных обращающих операторов.

Вопрос о норме обращающего оператора часто возникает при решении прикладных задач (см., например, [10]), и приведенные результаты, как правило, достаточны для приложений. Однако эти результаты лишь иллюстрируют основной вопрос: справедливо ли для произвольного некомпактного обращающего оператора A в рефлексивном банаховом пространстве (хотя бы в случае $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$) неравенство $\|A\| < 1$? Ответ авторам неизвестен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иохвидов И. С. // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 2. С. 259–261. 2. Иохвидов И. С. // Изв. АН МССР. 1968. № 1. С. 60–80. 3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986. 4. Diestel J. Geometry of Banach Spaces—Selected Topics. Lecture Notes in Math. V. 485. Berlin–New York: Springer, 1975. 5. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 6. Крейн М. Г., Шмультян Ю. Л. // Матем. исследования. 1966. Т. 1. № 1. С. 131–161. 7. Крейн М. Г., Шмультян Ю. Л. // Матем. исследования. 1966. Т. 1. № 2. С. 172–210. 8. Крейн М. Г., Шмультян Ю. Л. // Матем. исследования. 1967. Т. 2. № 3. С. 64–96. 9. James R. C. // Israel. J. Math. 1971. V. 9. № 4. P. 511–512. 10. Khatskevich V., Senderov V. Basic Properties of Linear Fractional Mappings of Operator Balls; Schroeder's Equation. Operator Theory and Its Applications. V. 25: Fields Institute Communications, 2000.

(Т. Я. Азизов) Воронежский государственный университет

(В. А. Сендеров) г. Москва

(В. А. Хацкевич) International College of Technology, Ort Braude, Israel

E-mail: azizov@tom.vsu.ru

Поступило

21.07.2000