Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Левин, Письмо в редакцию, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 479–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:01:03

1. Теорема 2 работы [1] не доказана в полной общности. Действительно, в обозначениях [1] $g_n \rightarrow \tilde{g}$ вне конечного множества $C \subset J_f$. Случай, когда функция $\tilde{g}$ не является константой, невозможен (см. [1]). Если $\tilde{g} \equiv c$, то случай $c \notin C$ также невозможен, так как иначе для достаточно большого фиксированного n последовательность итераций g_n нормальна в c . Случай $c \in C$ пропущен в доказательстве. Рассмотрим два подслучая.

(А) $J(g)$ – исключительное множество Жюлиа (т.е. J_f – сфера Римана, окружность или отрезок). Тогда по определению класса $R_d(f)$ все g_n имеют общую с f меру максимальной энтропии μ . Если U – малая окрестность точки множества $J_f \setminus C$, то множества $u_n = g_n(u)$ также стремятся к точке c . С другой стороны, $\mu(u_n) \geq \mu(u) > 0$. Это ведет к противоречию. Действительно, существует k_0 такое, что для любого $k > k_0$ точка $f^k(c)$ не является критической для f (иначе существовала бы периодическая орбита в J_f , содержащая критическую точку f). Следовательно, для фиксированного k такого, что $d^{k-k_0} \cdot \mu(u) \geq 1$, и любого достаточно большого n мы имеем $\mu(f^k(u_n)) \geq d^{k-k_0} \cdot \mu(u_n) \geq 1$, противоречие.

(В) J_f не исключительное и $c \in C$. Этот подслучай остается открытым. Таким образом, для произвольной функции f утверждение теоремы 2 остается гипотезой (назовем ее гипотезой Г1).

2. Подчеркнем, что теорема 2 не используется в доказательстве других результатов [1], а также последующей работы [2]. В частности, основной результат [1] (именно теорема 1), теоремы 3 и 4 так же, как все доказательства и результаты [2] остаются без изменений.

Заметим, что в доказательстве теоремы 3 (1) в [1] (в части, где предполагается $|\lambda_2| = 1$) нужно определить функции H_1 и H_2 , голоморфные в окрестности точки a , так, что $H_1 = g$ и $f \circ H_2 = f^2$, $H_2(a) = a$. Тогда $H_2'(a)$ равно выбранному значению $\lambda_2^{1/p}$, где $p \geq 1$ кратность корня $x = a$ в уравнении $f(x) = b$. Далее рассматриваем две возможности как в статье: либо существует такое целое $q \geq 1$, что $(\lambda_2^{1/p})^q = 1$, либо нет. Заметим, что $H_2^n \neq \text{id}$ для $n \geq 1$, так как иначе $f = f^{n+1}$. В исключительном случае $\mu_f = \mu_g = \mu$ мы имеем $\mu(H_1 \circ H_2(A)) \geq d \cdot m \cdot \mu(A)$. Так как $|H_1'(a)| = |(H_1 \circ H_2)'(a)| = |\lambda_1| > 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B(a, \varepsilon))}{\ln \varepsilon}$$

одновременно равен $\ln d / \ln |\lambda_1|$ и не меньше чем $\ln(dm) / \ln |\lambda_1|$, противоречие. Остаток доказательства теоремы 3 остается без изменений.

3. Для следующих классов функций теорема 2 (т.е. гипотеза Г1) доказана:

- 1) J_f исключительное (см. случай (А) выше);
- 2) f удовлетворяет условию теоремы 3 (2); тогда, как следует из теоремы 3 и замечания 2 (см. также [2, с. 2186, (A2)]), все g_n имеют общую с f меру максимальной энтропии, и, как мы знаем, это невозможно (см. случай (А) выше).

В частности, теорема 2 доказана для всех гиперболических рациональных функций f .

4. В [3] сформулирована следующая гипотеза (назовем ее гипотезой Г2): если J – неискл. множество Жюлиа рациональной функции f и A – трансформация Мёбиуса такая, что $A(J) = J$, то $A^q = \text{id}$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$. Гипотеза Г2 более слабая чем Г1: если гипотеза Г1 справедлива для функции f , то гипотеза Г2 справедлива для той же f (иначе существовало бы бесконечное множество функций $A_0^{-n} f_0 A^n$ с тем же множеством Жюлиа). При дополнительном предположении гипотеза Г2 доказана в следующем предложении, которое обобщает основной результат работы [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – трансформация Мёбиуса такая, что $A(J) = J$ и неподвижная точка трансформации A является (пре)периодической точкой для f . Если J – неискл. множество Жюлиа, то $A^q = \text{id}$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем теорему 1 и следуем доказательству теоремы 3 из [1].

1) Если A – иррациональное вращение, то множество Жюлиа локально диффеоморфно произведению интервала и множества Кантора. Это невозможно (см. доказательство этого факта, предложенное А. Ерёмовым в [1]).

2) Пусть A не является вращением. Можно предположить (переходя к итерации f), что $A(0) = 0$, $f(0) = a$, $f(a) = a$. Пусть $\lambda = f'(a)$. Тогда $|\lambda| \geq 1$, так как $a \in J$. Существует голоморфная в нуле функция H_1 такая, что $f \circ H_1 = f^2$ и $H_1(0) = 0$, $|H_1'(0)| = |\lambda|^{1/p}$, где $p \geq 1$ – кратность $x = 0$ в уравнении $f(x) = a$. Обозначим $H_2 = A$ и $R = H_2^{-1} \circ H_1^{-1} \circ H_2 \circ H_1$ (ср. с доказательством предложения 1 в [1]). Если $R = \text{id}$, то H_1 и H_2 коммутируют и $H_i(0) = 0$. Так как H_2 трансформация Мёбиуса, то H_1 также мёбиусово, в противоречии с $f \circ H_1 = f^2$. Если R – нетождественное отображение, имеем $R'(0) = 1$. Рассмотрим два случая.

2а) $A'(0) = 1$. После замены $z \mapsto 1/z$, можно предположить, что $H_2(z) = A(z) = z + 1$, $R(z)$ голоморфно в ∞ и $R(z) = z + b_0 + b_1/z + \dots$. Выберем точку $x \in J$ достаточно близко к ∞ . Рассмотрим отображения $h_m = H_2^{-m} \circ R \circ H_2^m$. Тогда $h_m(z) \rightarrow z + b_0$ равномерно по z в окрестности V точки $x \in J$. Так как J неискл. множество, по теореме 1 $h_j = h_{j+i}$ для некоторого $i > 0$. Следовательно, R коммутирует с H_2^i (которое является сдвигом $z \mapsto z + i$). Отсюда следует, что R – тоже сдвиг и H_1 линейно (в z -координате). Но $f \circ H_1 = f^2$, противоречие.

2б) $A'(0) \neq 1$. Повторяя доказательство предложения 1 или леммы 3, получаем, что $R = \text{id}$.

Я благодарен А. Еременко за указание на препринт [3] с обсуждением теоремы 2 [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Г. М. // Матем. заметки. 1990. Т. 48. С. 72–79. 2. Levin G., Przytycki F. // RAMS. 1997. V. 125. P. 2179–2190. 3. Boyd D. Translation Invariant Julia Sets. Preprint, 1998.