Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ахтямов, О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам Келдыша для одной эллиптической задачи с параметром в граничном условии, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 622–625

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:56:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ПРОИЗВОДНЫМ ЦЕПОЧКАМ КЕЛДЫША ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

А. М. Ахтямов

Рассмотрим несамосопряженную спектральную задачу

$$a\Delta u(x) + b\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^2 u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \lambda u(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2)$$

Здесь $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$; $\partial u / \partial x = \sum_{i=1}^n \partial u / \partial x_i$; $\partial u / \partial \bar{n}$ – производная по внешней нормали, а Ω – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, которую можно локально выпрямить гладкими преобразованиями координат.

Подобные эллиптические задачи с параметром изучались многими авторами (см. [1]–[5]). Рассматриваемая спектральная задача возникает, например, при решении нестационарного односложного уравнения переноса (см. [6]).

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что все собственные значения задачи (1), (2) простые.

Согласно методу, предложенному в работах [5] и [7], рассматриваемая задача допускает линеаризацию в пространстве $\mathcal{H} = H^1 \times H^0$, где $H^s = H^s(\Omega)$ – соболевское пространство с нормой

$$\|f\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|f^{(s)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^s \|f^{(i)}\|_{L_2(\Gamma)}^2.$$

Более точно, в пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим линейный оператор L , заданный равенством

$$L(f_0, f_1) = \left(f_1, -a\Delta f_0 - b\frac{\partial f_1}{\partial x} \right), \quad (3)$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ \tilde{f} = (f_0, f_1) \mid f_0 \in H^2(\Omega), f_1 \in H^1(\Omega), \alpha \frac{\partial f_0}{\partial \bar{n}} + f_1 = 0 \right\}. \quad (4)$$

Тогда линейная спектральная задача $L\tilde{f} = \lambda\tilde{f}$ имеет те же собственные значения, что и задача (1), (2), а собственный элемент оператора L , соответствующий собственному значению λ_k , имеет вид $\tilde{f}_k = (u_k, \lambda_k u_k)$, где u_k – собственная функция задачи (1), (2), отвечающая тому же

собственному значению λ_k . Из [5] следует, что собственные элементы образуют полную и минимальную систему в пространстве $\mathcal{H}$. Важной является задача: как вычислить коэффициенты $\{c_k\}$ разложения элемента $\tilde{f} \in \mathcal{H}$ в ряд по системе $\{\tilde{f}_k\}$? Хорошо известна формула

$$c_k = \frac{\langle \tilde{f}, \tilde{g}_k \rangle}{\langle \tilde{f}_k, \tilde{g}_k \rangle}, \quad (5)$$

где $\tilde{g}_k$ – собственные элементы сопряженного оператора L^* , а скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ берется в пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому задача о вычислении коэффициентов сводится к решению двух задач:

- 1) найти сопряженный оператор L^* в пространстве $\mathcal{H}$;
- 2) выразить его собственные элементы $\tilde{g}_k$ через собственные функции v_k сопряженной задачи.

ТЕОРЕМА 1 (о сопряженном операторе). *Оператор, сопряженный к оператору L , определенному в пространстве $\mathcal{H}$, находится по формуле*

$$L^*(g_0, g_1) = \left(a \cdot g_1 + F(g_1), b \frac{\partial g_1}{\partial x} - \Delta g_0 \right), \quad (6)$$

$$D(L^*) = \left\{ \tilde{g} = (g_0, g_1) \mid g_0 \in H^2, g_1 \in H^1, \frac{\partial g_0}{\partial \bar{n}} + g_0 + \left(\frac{a}{\alpha} - bK \right) g_1 = 0 \right\}, \quad (7)$$

где $F = F(g_1)$ – решение краевой задачи

$$\Delta F = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{n}} + F = -a \cdot g_1 \quad \text{на } \Gamma. \quad (8)$$

(Задача (8) имеет единственное решение; доказательство этого см., например, в [8, с. 519].)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему Грина, получаем

$$\langle f_1, g_0 \rangle_{H^1} + \left\langle -a \Delta f_0 - b \frac{\partial f_1}{\partial x}, g_1 \right\rangle_{H^0} = \langle f_0, a g_1 \rangle_{H^1} + \left\langle f_1, b \frac{\partial g_1}{\partial x} - \Delta g_0 \right\rangle_{H^0} + P, \quad (9)$$

где

$$P = \int_{\Gamma} f_1 \overline{\left(\frac{\partial g_0}{\partial \bar{n}} + g_0 - bK g_1 \right)} ds - a \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \bar{n}} + f_0 \right) \overline{g_1} ds \quad (10)$$

– проинтегрированные члены. Воспользовавшись тем, что

$$\alpha \frac{\partial f_0}{\partial \bar{n}} + f_1 = 0 \quad \text{и} \quad -a \int_{\Gamma} f_0 \overline{g_1} ds = \langle f_0, F(g_1) \rangle_{H^1},$$

из (10) получаем

$$P = \int_{\Gamma} f_1 \overline{\left(\frac{\partial g_0}{\partial \bar{n}} + g_0 + \frac{a}{\alpha} g_1 - bK g_1 \right)} ds + \langle f_0, F(g_1) \rangle_{H^1}.$$

Отсюда и из (9) имеем

$$\langle L \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \langle \tilde{f}, L^* \tilde{g} \rangle. \quad (11)$$

Поэтому оператор L^* является сужением сопряженного к L оператора.

Операторы L и L^* являются сюръективными операторами с плотной областью определения. Следовательно, заданный формулами (6), (7) оператор L^* не имеет нетривиальных расширений таких, что равенство (11) выполняется для всех $\tilde{f} \in D(L)$. Таким образом, оператор L^* совпадает с оператором, сопряженным к L .

ТЕОРЕМА 2 (о сопряженной системе). Собственные значения $\mu_k = \overline{\lambda}_k$ сопряженного оператора L^* и сопряженной задачи

$$a\Delta v(x) - b\mu \frac{\partial v(x)}{\partial x} + \mu^2 v(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (12)$$

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial \overline{n}} + \mu \left(1 - \frac{bK\alpha}{a}\right) v(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (13)$$

совпадают, а собственные элементы $\tilde{g}_k$ оператора L^* выражаются через собственные функции v_k задачи (12), (13) следующим образом:

$$\tilde{g}_k = \left(\frac{av_k + F(v_k)}{\overline{\lambda}_k}, v_k \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача на собственные значения $L^* \tilde{g}_k = \overline{\lambda}_k \tilde{g}_k$ для оператора L^* эквивалентна выполнению следующих равенств для двух компонент $g_{0,k}$ и $g_{1,k}$ функции $\tilde{g}_k$:

$$ag_{1,k} + F(g_{1,k}) = \overline{\lambda}_k g_{0,k} \quad \text{в } \Omega, \quad (14)$$

$$b \frac{\partial g_{1,k}}{\partial x} - \Delta g_{0,k} = \overline{\lambda}_k g_{1,k} \quad \text{в } \Omega, \quad (15)$$

$$\frac{\partial g_{0,k}}{\partial \overline{n}} + g_{0,k} + \left(\frac{a}{\alpha} - bK \right) g_{1,k} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (16)$$

Из (14)–(16) следует, что вторая компонента $g_{1,k}$ собственной функции $\tilde{g}_k$ является решением краевой задачи

$$a\Delta g_{1,k} - b\overline{\lambda}_k \frac{\partial g_{1,k}}{\partial x} + \overline{\lambda}_k^2 g_{1,k} = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\alpha \frac{\partial g_{1,k}}{\partial \overline{n}} + \overline{\lambda}_k \left(1 - \frac{bK\alpha}{a}\right) g_{1,k} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Из (14) получаем, что первая компонента собственной функции $\tilde{g}_k$ выражается через вторую равенством

$$g_{0,k} = \frac{1}{\overline{\lambda}_k} (ag_{1,k} + F(g_{1,k})).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Таким образом, оператор L^* является линейизатором сопряженной задачи (12), (13) (это другой вид линейаризации, нежели для задачи (1), (2)).

Из последней теоремы и формулы (5) вытекает

ТЕОРЕМА 3 (о коэффициентах разложения). Если $\tilde{f} = \sum c_k \tilde{f}_k$ – разложение элемента $\tilde{f}$ по собственным функциям оператора L , то коэффициенты c_k находятся по формулам $c_k = p_k/q_k$, где

$$p_k = -\alpha a \int_{\Omega} f_0 \overline{\Delta v_k} dx + \alpha \lambda_k \int_{\Omega} f_1 \overline{v_k} dx + (\alpha bK - a\lambda_k) \int_{\Gamma} f_0 \overline{v_k} ds,$$

$$q_k = -\alpha a \int_{\Omega} u_k \overline{\Delta v_k} dx + \alpha \lambda_k^2 \int_{\Omega} u_k \overline{v_k} dx + (\alpha bK - a\lambda_k) \int_{\Gamma} u_k \overline{v_k} ds.$$

Изложенный в настоящей заметке метод нахождения коэффициентов c_k в действительности годится не только для рассматриваемой задачи (1), (2). Он пригоден и для общих спектральных задач высокого порядка. Можно указать алгоритм вычисления коэффициентов, аналогичный найденному в работах [9], [10].

Автор приносит свою искреннюю благодарность профессору А. А. Шкаликову за постановку задачи и руководство работой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С., Вишик М. И. // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161. 2. Agmon S. // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147. 3. Якубов С. Я. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 2. С. 425–432. 4. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Т. 14. С. 140–224. 5. Шкред А. В. // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 4. С. 99–109. 6. Темирбулатов Н. С. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 472–476. 7. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229. 8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 9. Ахтямов А. М. // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 137–139. 10. Ахтямов А. М. Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов и соответствующие эволюционные уравнения. Дисс. . . к.ф.-м.н. М., 1992.