Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Балтрунас, О субэкспоненциальности одного класса случайных величин, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 625–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:10:24

О СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Балтрунас

Введение. Будем говорить, что функция распределения F неотрицательной случайной величины X принадлежит классу S *субэкспоненциальных распределений*, если ее хвост $\overline{F} := 1 - F$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * \overline{F}}(t)}{\overline{F}(t)} = 2, \quad (1)$$

где $*$, как обычно, означает свертку по Стильтесу.

Известно (см. теорему 2 работы [1]), что если выполнено (1), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(t+y)}{\overline{F}(t)} = 1, \quad y \geq 0. \quad (2)$$

Через $\mathbf{L}$ обозначим класс всех функций, удовлетворяющих соотношениям (2).

Функция распределения F является *мажорируемо меняющейся на бесконечности*, если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(2t)} < \infty. \quad (3)$$

Если выполнено соотношение (3), мы будем писать $F \in \mathbf{D}$. Имеем, что если $F \in \mathbf{D} \cap \mathbf{L}$, то $F \in S$.

Пусть X и Y – независимые неотрицательные случайные величины, имеющие функции распределения F_X и F_Y соответственно. Далее везде будем предполагать, что $F_X \in S$ и $F_Y \in S$. В работе [2] изучались условия, при выполнении которых функции распределения случайных величин $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y)$ принадлежат классу S . В этой работе Якымив связал вопрос субэкспоненциальности случайной величины $\max(X, Y)$ с проблемой субэкспоненциальности случайной величины $X + Y$, которая уже достаточно подробно изучена (см. [3]–[6]). Более сложным оказался вопрос о принадлежности функции распределения случайной величины $\min(X, Y)$ классу S . Если через V мы обозначим функцию распределения случайной величины $\min(X, Y)$, то в [2] доказан такой результат: если $F_X \in \mathbf{D} \cap S$ и $F_Y \in \mathbf{D} \cap S$, то $V \in S$. Цель настоящей заметки – обобщить этот результат. А именно, для достаточно широкого класса субэкспоненциальных распределений мы дадим достаточные условия субэкспоненциальности функции распределения V .

Основные результаты. Мы будем говорить, что неотрицательная неубывающая функция g , определенная на $[0, \infty)$, является *ограниченно полуаддитивной*, если $g(0) = 0$ и

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left(g(x) - \min_{0 \leq y \leq x/2} (g(y) + g(x-y)) \right) < \infty. \quad (4)$$

Определим

$$R_X(t) = -\ln \overline{F}_X(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$R_Y(t) = -\ln \overline{F}_Y(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Наш основной результат представляет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Допустим, что R_X и R_Y являются ограничено полуаддитивными функциями. Если $F_X \in S$ и $F_Y \in S$, то $V \in S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $F_X \in S$, существует функция $a_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ такая, что

$$\int_{a_1(t)}^t \overline{F}_X(t-u) dF_X(u) = o(\overline{F}_X(t))$$

при $t \rightarrow \infty$.

Аналогично, из $F_Y \in S$ следует, что для какой-то функции $a_2(t) \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{a_2(t)}^t \overline{F}_Y(t-u) dF_Y(u) = o(\overline{F}_Y(t))$$

при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $a(t) = \max(a_1(t), a_2(t))$. Имеем

$$\overline{V * V}(t) = \overline{V}(t) + \int_0^t \overline{V}(t-u) dV(u).$$

Поскольку $\overline{V}(t) = P(\min(X, Y) > t) = \overline{F}_X(t) \cdot \overline{F}_Y(t)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{a(t)}^t \overline{V}(t-u) dV(u) &= \int_{a(t)}^t \overline{F}_X(t-u) \overline{F}_X(u) \overline{F}_Y(t-u) dF_Y(u) \\ &\quad + \int_{a(t)}^t \overline{F}_X(t-u) \overline{F}_Y(t-u) \overline{F}_Y(u) dF_X(u) \\ &= \text{I} + \text{II}. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что R_X является ограничено полуаддитивной функцией, получаем, что для всех u таких, что $0 \leq u \leq t/2$, имеет место оценка

$$\frac{\overline{F}_X(t-u) \overline{F}_X(u)}{\overline{F}_X(t)} \leq C < \infty.$$

Тогда мы имеем

$$\text{I} = O(1) \overline{F}_X(t) \int_{a(t)}^t \overline{F}_Y(t-u) dF_Y(u) = \overline{F}_X(t) o(\overline{F}_Y(t)) = o(\overline{V}(t))$$

при $t \rightarrow \infty$. Аналогично, из ограниченной полуаддитивности функции R_Y вытекает, что $\text{II} = o(\overline{V}(t))$ при $t \rightarrow \infty$.

Отсюда

$$\int_{a(t)}^t \overline{V}(t-u) dV(u) = o(\overline{V}(t))$$

при $t \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Следующая лемма дает достаточное условие ограниченной полуаддитивности функции g .

ЛЕММА 2. Допустим, что $F \in \mathbf{D}$. Тогда функция $R = -\ln \overline{F}$ является ограниченно полуаддитивной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $F \in \mathbf{D}$, имеем

$$A := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq y \leq t/2} (R(t) - R(t-y)) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(R(t) - R\left(\frac{t}{2}\right) \right) < \infty. \quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_R(t) &:= R(t) - \min_{0 \leq y \leq t/2} (R(y) + R(t-y)) \leq R(t) - \min_{0 \leq y \leq t/2} R(t-y) \\ &\leq \sup_{0 \leq y \leq t/2} (R(t) - R(t-y)) \leq A < \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Будем говорить, что неотрицательная неубывающая функция g , определенная на $[0, \infty)$, является асимптотически полуаддитивной, если $g(0) = 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(g(x) - \min_{0 \leq y \leq x/2} (g(y) + g(x-y)) \right) = 0. \quad (8)$$

Как нетрудно убедиться, любая асимптотически полуаддитивная функция является ограниченно полуаддитивной.

Следующая лемма дает достаточное условие, при выполнении которого функция g будет асимптотически полуаддитивной.

ЛЕММА 3. Допустим, что функция g имеет представление

$$g(t) = \int_0^t q(u) du, \quad (9)$$

где q — неотрицательная невозрастающая функция. Тогда g является асимптотически полуаддитивной функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$H_g(t) := g(t) - \min_{0 \leq y \leq t/2} (g(y) + g(t-y)) = - \min_{0 \leq y \leq t/2} \left(\int_0^y q(u) du - \int_{t-y}^t q(u) du \right).$$

Поскольку q является неотрицательной невозрастающей функцией, то для любого y такого, что $0 \leq y \leq t/2$, выполнено неравенство

$$\int_0^y q(u) du \geq \int_{t-y}^t q(u) du.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_g(t) \leq 0.$$

С другой стороны, при $y = 0$ мы получаем

$$H_g(t) \geq g(t) - g(t) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} H_g(t) = 0$.

Лемма доказана.

Допустим, что функции R_X и R_Y , определенные соотношениями (5), (6), имеют следующие представления:

$$R_X(t) = \int_0^t q_X(u) du, \quad R_Y(t) = \int_0^t q_Y(u) du, \quad t \geq 0,$$

где q_X и q_Y — неотрицательные функции.

Из теоремы 1 и леммы 3 вытекает следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Допустим, что q_X и q_Y монотонно стремятся к 0. Если $F_X \in S$ и $F_Y \in S$, то $V \in S$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рогозин в работе [7] представил теорему 1, в которой утверждается, что если $F \in S$, то $R = -\ln \overline{F}$ является асимптотически полуаддитивной функцией.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чистяков В. П. // Теор. вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718. 2. Якимив А. Л. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 138–144. 3. Cline D. B. H. // Probab. Theory Related Fields. 1986. V. 72. P. 529–557. 4. Cline D. B. H. // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1987. V. 43. P. 347–365. 5. Embrechts P., Goldie C. M. // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. V. 29. P. 243–256. 6. Leslie J. // J. Appl. Probab. 1989. V. 26. P. 58–66. 7. Рогозин Б. А. // Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам (Туапсе, 17–24 сентября 1996 г.). Тезисы докладов (сост. Ю. В. Прохоров и др.). М.: ТВП, 1996. С. 141–142.

Институт математики и информатики, г. Вильнюс
E-mail: jurgita@ktl.mii.lt

Поступило
30.03.2000